PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 131–137.

QUELQUES REMARQUES SUR LES APPLICATIONS CONTINUES DES ESPACES DE VOISINAGES

Zlatko P. Mamuzić

(Communiqué le 16 septembre 1963)

§ 1. Soit E un ensemble non vide et soit 2^E l'ensemble partitif de E. On sait [2], [3] qu'on peut définir un espace de voisinages de M. Fréchet sur E au moyen d'une application

$$\iota : 2^E \to 2^E \tag{1.1}$$

vérifiant les conditions suivantes:

1° $\iota(\varnothing) = \varnothing$, $\varnothing$ étant l'ensemble vide;

2° $\iota(A) \subset A$, pour chaque sousensemble $A \subset E$;

3° $B \subset A \subset E$ entraîne que $\iota(B) \subset \iota(A)$.

Pour tout point $a \in E$ posons:

$\mathfrak{B}_a =$ la famille de tous les sousensembles Va de E avec la propriété que $a \in \iota(Va)$. De cette manière on obtient la base de voisinages $\mathfrak{B} = \bigcup_{a \in E} \mathfrak{B}_a$ la plus vaste de l'espace abstrait (E, ι) défini sur E par (1.1) vérifiant les conditions 1°, 2° et 3°. Désignons par $\mathfrak{W}$ une base de voisinages quelconque de l'espace (E, ι). On vérifie aisément que pour tout sousensemble non vide A de E et tout point $a \in \iota(A)$ il existe au moins un voisinage $Wa \in \mathfrak{W}$ du point a tel qu'on a

$$a \in Wa \subset \iota(A).$$

On appelle l'ensemble $\iota(A)$ intérieur de A. L'ensemble A est *ouvert* si et seulement si $\iota(A) = A$.

D'autre part, C signifiant l'opération de complémentation, si l'application ι vérifie les conditions 1°, 2° et 3°, l'application composée

$$\tau = C \circ \iota \circ C$$

satisfait aux conditions:

a) $\tau(\varnothing) = \varnothing$;

b) $\tau(A) \supset A$, pour tout $A \subset E$;

c) $B \subset A \subset E$ entraîne $\tau(B) \subset \tau(A)$.

On peut lire: $\tau(A)$ = adhérence de A. Inversement, si l'on pose $\iota = C \circ \tau \circ C$, où τ vérifie les conditions a), b) et c), on voit sans peine que ι vérifie les conditions 1°, 2° et 3°.

Cela étant, considérons une application

$$f : E \to T$$

d'un espace de voisinages (E, ι_E) dans un espace de voisinages (T, ι_T), ι_E resp. ι_T signifiant une application de 2^E dans 2^E resp. de 2^T dans 2^T vérifiant les conditions 1°, 2° et 3°. De plus, soit $\mathfrak{W}_E$ resp. $\mathfrak{W}_T$ une base de voisinages quelconque de (E, ι_E) resp. de (T, ι_T).

Par définition, *f est continu sur E si et seulement si pour tout point $a \in E$ et tout voisinage $W_T f(a) \in \mathfrak{W}_T$ du point $f(a) \in T$ il existe au moins un voisinage $W_E a$ du point $a \in E$ tel qu'on a*

$$f(W_E a) \subset W_T f(a).$$

Indiquons ici un critère de la continuité (v. aussi [2]) portant sur les intérieurs des ensembles:

Théorème 1.1. *L'application f de l'espace (E, ι_E) dans l'espace (T, ι_T) est continue sur E si et seulement si la condition suivante est remplie:*

Pour chaque sousensemble B de T, l'image inverse $f^{-1}(\iota_T(B))$ par f de l'intérieur $\iota_T(B)$ de B dans l'espace (T, ι_T) est incluse dans l'intérieur $\iota_E(f^{-1}(B))$ de l'image inverse $f^{-1}(B)$ par f de B dans l'espace (E, ι_E), càd:

$$\iota_E(f^{-1}(B)) \supset f^{-1}(\iota_T(B)). \tag{1.2}$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $B \subset T$ un sousensemble de T tel que $f^{-1}(\iota_T(B))$ n'est pas vide et supposons $a \in f^{-1}(\iota_T(B))$. On aura $f(a) \in \iota_T(B)$ et il existe un voisinage $W_T f(a)$ du point $f(a) \in T$ tel que $W_T f(a) \subset B$. Par hypothèse, il existe au moins un voisinage $W_E a$ du point $a \in E$ avec la propriété $f(W_E a) \subset W_T f(a) \subset B$ d'où $W_E a \subset f^{-1}(W_T f(a)) \subset f^{-1}(B)$, càd. $a \in \iota_E(f^{-1}(B))$.

La condition est suffisante. Soit la condition (1.2) satisfaite pour tout $B \subset T$. En particulier, pour chaque point $a \in E$ et chaque voisinage $W_T f(a)$ du point $f(a) \in T$ on aura

$$f^{-1}(\iota_T(W_T f(a))) \subset \iota_E f^{-1}(W_T f(a)).$$

Or, puisque $a \in f^{-1}(\iota_T W_T f(a))$ on aura $a \in \iota_E f^{-1}(W_T f(a))$, ce qui signifie qu'il existe un voisinage $W_E a$ du point $a \in E$ tel que $W_E a \subset f^{-1}(W_T f(a))$ d'où $f(W_E a) \subset W_T f(a)$, ce qu'il fallait démontrer.

Du théorème 1.1 on déduit immédiatement (v. [2]) que si f est une application continue de $(E, \iota_E, \mathfrak{W})$ dans $(E, \iota_T, \mathfrak{W})$, alors l'image inverse par f d'un ouvert dans le deuxième espace est un ouvert dans le premier. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par contre, la réciproque est vraie si le deuxième espace vérifie *l'axiome de transitivité* qui s'énonce de la façon suivante: *pour tout point $a \in T$ et tout voisinage Wa de a il existe un voisinage $W^1 a$ du même point tel que pour tout point $b \in W^1 a$ il existe un voisinage Wb du point b à propriété $Wb \subset Wa$.*

Rappelons encore que les espaces de voisinages sur le support E vérifiant l'axiome de transitivité sont caractérisés par les familles $\mathfrak{O}$ de sousensembles $O \subset E$, appelés *ouverts*, satisfaisantes aux conditions (v. [2], § 4):

(O_1) $\varnothing$, $E \in \mathfrak{O}$.

(O_3) $\bigcup_{O \in \mathfrak{O}^*} O \in \mathfrak{O}$ *pour chaque sousfamille* $\mathfrak{O}^* \subset \mathfrak{O}$.

§ 2. Soient maintenant (E, τ_1) et (E, τ_2) deux espaces de voisinages sur le même support E, $\tau_1 A$ resp. $\tau_2 A$ signifiant les adhérences correspondantes de $A \subset E$ et soient $\mathfrak{V}$ resp. $\mathfrak{W}$ leurs bases de voisinages les plus vastes. Pour $x \in E$, alors $\mathfrak{V}_x$, $\mathfrak{W}_x$ signifient les bases locales de voisinages les plus vastes correspondantes du point $x \in E$.

On a la généralisation suivante d'une proposition bien connue de N. Bourbaki:

Théorème 2.1. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

1° $\tau_2 A \subset \tau_1 A$, *pour chaque sousensemble* $A \subset E$;

2° $\mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{W}_x$, *pour chaque point* $x \in E$.

Démonstration. Soit $\tau_2 A \subset \tau_1 A$ pour tout sousensemble $A \subset E$.

En particulier, pour tout point $x \in E$ et tout voisinage $Vx \in \mathfrak{V}_x$ du point x on aura

$$\tau_1 CVx \supset \tau_2 CVx,$$

ou bien

$$C\tau_1 CVx \subset C\tau_2 CVx,$$

càd.

$$\iota_1(Vx) \subset \iota_2(Vx),$$

ι_1 resp. ι_2 désignant les applications composées $C \circ \tau_1 \circ C$ resp. $C \circ \tau_2 \circ C$ correspondantes de 2^E dans 2^E. Or, on a $x \in \iota_1(Vx) \subset \iota_2(Vx)$, ce qui signifie que le point x se trouve à l'intérieur de Vx dans l'espace (E, τ_2) et alors $Vx \in \mathfrak{W}_x$.

Inversement, soit $\mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{W}_x$ pour chaque $x \in E$. Supposons qu'il existe un sousensemble $A \subset E$ non vide tel que $x \in \tau_2 A$ et $x \notin \tau_1 A$. On aura alors

$$x \notin C\tau_2 CCA \quad \text{et} \quad x \in C\tau_1 CCA,$$

d'où $x \in \iota_1(CA)$ et $x \notin \iota_2(CA)$. On aboutit ainsi à la contradiction puisque $CA \in \mathfrak{V}_x$, $CA \notin \mathfrak{W}_x$ contrairement à l'hypothèse que $\mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{W}_x$, ce qu'il fallait démontrer.

Si les deux espaces (E, τ_1) et (E, τ_2) vérifient l'axiome de transitivité et si par $\mathfrak{O}_1$ resp. $\mathfrak{O}_2$ nous désignons les familles d'ouverts correspondantes, alors on montre aisément que $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ *est équivalent à la condition* 2° *du théorème* 2.1.

Le théorème précédent nous permet d'introduire la définition suivante:

Définition 2.1. *Nous dirons que la topologie généralisée de l'espace de voisinages* (E, τ_2) *est plus fine que la topologie généralisée de l'espace de voisinages* (E, τ_1) *(par abus de langage: l'espace* (E, τ_2) *est plus fin que l'espace* (E, τ_1)*), si et seulement si pour tout point* $x \in E$ *la base locale de*

voisinages $\mathfrak{W}_x$ la plus vaste du point x dans l'espace (E, τ_2) contient la base locale de voisinages $\mathfrak{V}_x$ la plus vaste du même point dans l'espace (E, τ_1), càd. si et seulement si

$$\mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{W}_x \text{ pour chaque } x \in E.$$

En posant $\mathfrak{V} = \bigcup_{x \in E} \mathfrak{V}_x$ et $\mathfrak{W} = \bigcup_{x \in E} \mathfrak{W}_x$ pour tout $x \in E$, on peut alors définir une rélation d'ordre notée $\prec$ telle que $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{W}$ si et seulement si l'espace (E, τ_2) est plus fin que l'espace (E, τ_1).

S'il s'agit des espaces topologiques au sens des définitions usuelles, on déduit immédiatement que la définition 2.1 est bien équivalente à la définition connue de N. Bourbaki [1], p. 19—20.

Remarquons que parmi tous les espaces de voisinages sur un même support E il existe un espace de voisinages qui est plus fin (l'espace discret) et il existe un espace de voisinages qui est moins fin que tous les autres (c'est l'espace indiscret). En d'autres termes: $\mathfrak{V}$ désignant la famille de voisinages la plus vaste d'un espace de voisinages (E, τ), le système de toutes les familles $\mathfrak{V}$ qu'on peut définir sur E, partiellement ordonné par la rélation d'ordre $\prec$, possède un élément maximal (et un seul) et un élément minimal (et un seul).

§ 3. Considérons maintenant une application f d'un ensemble non vide S dans un espace de voisinages (T, τ).

La famille d'espaces de voisinages sur le support S tels que la function f soit continue, n'est pas vide: en effet, tel est l'espace discret sur S. Mais cet espace est le plus fin de tous les espaces de voisinages qu'on peut définir sur S.

Théorème 3.1. *Il existe un espace de voisinages et un seul sur le support S moins fin que tous les autres pour lesquels la fonction f est continue.*

Démonstration. $\mathfrak{B} = \bigcup_{x \in T} \mathfrak{V}_x$ étant une base quelconque de voisinages de l'espace (T, τ), nous définissons un espace de voisinages (S, σ) sur S au moyen de la base de voisinages suivante: pour tout $a \in S$ nous posons

(3.1) $\mathfrak{W}_a =$ la famille de tous les sousensembles Wa contenant le point a pour lesquels il existe au moins un voisinage $Vf(a) \in \mathfrak{V}_{f(a)}$ du point $f(a) \in T$ avec la propriété

$$f^{-1}(Vf(a)) \subset Wa,$$

en désignant par $f^{-1}(Vf(a))$ l'image inverse par f du voisinage $Vf(a)$ du point $f(a)$ dans l'espace (T, τ).

On voit tout de suite que la fonction f est continue sur (S, σ). En effet, pour tout point $a \in S$ et tout voisinage $Vf(a)$ du point $f(a) \in T$ il existe un voisinage $Wa = f^{-1}(Vf(a))$ du point a tel que $f(Wa) = f(f^{-1}(Vf(a))) \subset Vf(a)$ et, d'autant plus, $f(Wa) \subset Vf(a)$.

D'autre part, soit (S, σ_1) un espace de voisinages sur S quelconque tel que la fonction f soit encore continue sur (S, σ_1). Pour tout $a \in S$ nous désignons par J_a la base locale de voisinages du point a la plus vaste dans l'espace (S, σ_1). Nous allons montrer que $\mathfrak{W}_a$, défini par (3.1), est la base locale du point a la plus vaste dans l'espace (S, σ) et que $\mathfrak{W}_a \subset J_a$ pour tout

$a \in S$. Or, soit A un sousensemble de l'espace (S, σ) non vide quelconque dont l'intérieur contient le point $a \in S$. Cela signifie qu'il existe un voisinage Wa du point a tel que $Wa \subset A$; par la définition (3.1) même, il existe alors un voisinage $Vf(a)$ du point $f(a)$ dans (T, τ) tel que $f^{-1}(Vf(a)) \subset Wa \subset A$. En d'autres termes, l'ensemble A est un voisinage du point a et appartient à la famille $\mathfrak{W}_a$. Montrons enfin que $\mathfrak{W}_a \subset J_a$ pour tout $a \in S$. En effet, supposons qu'il existe un point $a \in S$ et un sousensemble $A \subset S$ tel que $a \in \iota(A) \subset A \in \mathfrak{W}_a$ et $A \notin J_a$. En désignant par σA resp. $\sigma_1 A$ l'adhérence de A dans (S, σ) resp. dans (S, σ_1), on aurait $a \in C\sigma CA$ et $a \notin C\sigma_1 CA$, d'où $a \notin \sigma CA$ et $a \in \sigma_1 CA$. La fonction f étant continue sur les deux espaces (S, σ) et (S, σ_1), on devrait avoir $f(a) \notin \tau f(CA)$ et $f(a) \in \tau f(CA)$, ce qui est une contradiction ($\tau f(CA)$ = l'adhérence de $f(CA)$ dans (T, τ)). Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

Supposons maintenant que l'espace $(T, \tau, \mathfrak{V})$ vérifie l'axiome de transitivité. Dans ce cas *l'espace* $(S, \sigma, \mathfrak{W})$ *vérifie aussi cet axiome*[1]. En effet, prenons un point $a \in S$ et soit Wa un voisinage de a. Il existe un voisinage $Vf(a)$ du point $f(a) \in T$ tel que $f^{-1}(Vf(a)) \subset Wa$. Par hypothèse, il existe un voisinage $V^1 f(a)$ de $f(a)$ tel que pour tout $c \in V^1 f(a)$ il existe un voisinage Vc de c à propriété $Vc \subset Vf(a)$. Posons $f^{-1}(V^1 f(a)) = W^1 a$ et soit $b \in W^1 a$ càd. $f(b) \in V^1 f(a)$. Il existe un voisinage $Vf(b)$ de $f(b)$ tel que $Vf(b) \subset Vf(a)$ d'où

$$f^{-1}(Vf(b)) \subset f^{-1}(Vf(a)) \subset Wa.$$

Puisque $b \in Wa$, ceci montre que l'espace $(S, \sigma, \mathfrak{W})$ vérifie l'axiome de transitivité. On en déduit facilement que cet espace peut être défini aussi de la manière suivante. $\mathfrak{O}_T$ étant la famille de tous les ouverts dans l'espace $(T, \tau, \mathfrak{V})$, on obtient la famille $\mathfrak{O}_S$ de tous les ouverts dans l'espace $(S, \sigma, \mathfrak{W})$ en prenant les images réciproques par f des ouverts de $\mathfrak{O}_T$ et tous les unions de ces images réciproques, càd. les membres de $\mathfrak{O}_S$ sont $f^{-1}(O_T)$ pour $O_T \in \mathfrak{O}_T$ et les unions

$$\bigcup_{O_T \in \mathfrak{O}^*_T} f^{-1}(O_T) = f^{-1}\Big(\bigcup_{O_T \in \mathfrak{O}^*_T} O_T\Big)$$

pour chaque sousfamille $\mathfrak{O}^*_T \subset \mathfrak{O}_T$.

Le théorème précédent nous permet d'introduire la définition suivante:

Définition 3.1. *Nous dirons que l'espace* (S, σ) *défini sur le support* S *par la base de voisinages* (3.1) *est l'espace sur* S *obtenu par la condition d'être le moins fin de tous les espaces de voisinages sur* S *pour lesquels la fonction* $f : S \to (T, \tau)$ *est continue.*

Pour les espaces topologiques on peut utiliser la proposition mentionnée de N. Bourbaki et passer aux ouverts.

D'une manière analogue, soit

$$f : (S, \mathfrak{V}) \to T$$

une application de l'espace de voisinages $(S, \mathfrak{V})$ donné avec une base de voisinages $\mathfrak{V}$, dans un ensemble non vide T. Parmi tous les espaces de voisinages sur le support T pour lesquels la fonction f est continue il en existe un qui est moins fin que tous les autres: en effet, c'est l'espace indiscret sur T.

[1] Une idée analogue a été exposée par D. Adamović dans une discussion à propos de [2].

Théorème 3.2. *Parmi tous les espaces de voisinages définis sur le support T tels que la fonction f soit continue il existe un et un seul qui est le plus fin que tous les autres.*

Démonstration. Définissons sur T l'espace de voisinages $(T, \mathfrak{W})$ par la base de voisinages $\mathfrak{W}$ suivante: pour $x \in S$, les voisinages $Wy \in \mathfrak{W}$ du point $y = f(x) \in T$ sont tous les sousensembles de T pour lesquels il existe au moins un voisinage $Vx \in \mathfrak{V}$ du point x à propriété

$$Vx \subset f^{-1}(Wy), \tag{3.2}$$

et pour tout point $y \in T \setminus f(S)$, l'ensemble $Wy = \{y\}$ constitué d'un seul point y, est un voisinage de y. Dans ce dernier cas, la base locale de voisinages la plus vaste du point $y \in T \setminus f(S)$ est formée par tous les sousensembles de T contenant le point y.

Montrons d'abord que la fonction $f : (S, \mathfrak{V}) \to (T, \mathfrak{W})$ est continue. En effet, d'après la définition même, pour tout point $x \in S$ et tout voisinage Wy du point $y = f(x)$ il existe au moins un voisinage Vx du point x tel que $f(Vx) \subset Wf(x)$.

D'autre part, soit J la base de voisinages la plus vaste de l'espace $(T, \mathfrak{W})$ et soit J_1 la base de voisinages la plus vaste d'un espace de voisinages $(T, \mathfrak{W}_1)$ quelconque avec la propriété que la fonction $f : (S, \mathfrak{V}) \to (T, \mathfrak{W}_1)$ soit encore continue. Nous allons montrer que $J_1 \prec J$. En effet, la fonction f étant continue sur $(S, \mathfrak{V})$, pour chaque voisinage $W_1 f(x) \in \mathfrak{W}_1$ du point $f(x) \in T$ il existe au moins un voisinage $Vx \in \mathfrak{V}$ du point x tel que

$$f(Vx) \subset W_1 f(x) \quad \text{d'où} \quad Vx \subset f^{-1}(W_1 f(x)),$$

ce qui signifie que le sousensemble $W_1 f(x)$ de T est aussi un voisinage du point $f(x)$ dans l'espace $(T, \mathfrak{W})$. Il reste encore de montrer que $\mathfrak{W} = J$. Mais c'est bien évident puisque si $A \subset T$ est un sousensemble quelconque ayant à son intérieur le point $y = f(x)$, il existe un voisinage Wy de y tel que

$$Wy \subset A,$$

d'où $f^{-1}(Wy) \subset f^{-1}(A)$. Par la définition même (3.2) il existe alors un voisinage Vx du point x tel que $Vx \subset f^{-1}(Wy) \subset f^{-1}(A)$ et par la même définition on aura que A est aussi un voisinage du point $y = f(x)$. Le théorème 3.2 est ainsi démontré.

Supposons maintenant que l'espace de voisinages $(S, \mathfrak{V})$ vérifie l'axiome de transitivité. Nous allons montrer *que l'espace* $(T, \mathfrak{W})$ *aussi vérifie cet axiome.* En effet, pour $y \in T \setminus f(S)$ c'est bien évident. Soit $y = f(x)$ pour $x \in S$ et soit Wy un voisinage quelconque de y dans $(T, \mathfrak{W})$. Il existe un voisinage Vx de x dans $(S, \mathfrak{V})$ tel que $Vx \subset f^{-1}(Wy)$. Par hypothèse, il existe un voisinage $V^1 x$ de x tel que pour tout $c \in V^1 x$ il existe un voisinage Vc de c à propriété $Vc \subset Vx$. Posons $f(V^1 x) = W^1 y$ d'où $V^1 x \subset f^{-1}(W^1 y)$. Si $z \in f(V^1 x)$, soit $b \in f^{-1}(z)$ tel que $b \in V^1 x$. Or il existe un voisinage Vb de b dans $(S, \mathfrak{V})$ tel que $Vb \subset Vx$ d'où $Vb \subset f^{-1}(Wy)$. En d'autres termes, puisque $f(b) \in Wy$, Wy est aussi un voisinage de $f(b)$. La proposition est démontrée. Dans ce cas, soit $\mathfrak{O}_S$ la famille de tous les ouverts dans l'espace $(S, \mathfrak{V})$. On montre aisément que l'espace $(T, \mathfrak{W})$ peut être défini aussi de la façon suivante. La famille $\mathfrak{O}_T$ de tous les ouverts de l'espace $(T, \mathfrak{W})$ est définie ainsi: on pose $O_T \in \mathfrak{O}_T$ si et seulement si $O_S = f^{-1}(O_T)$ pour un $O_S \in \mathfrak{O}_S$.

Il est évident alors que pour chaque sousfamille $\mathfrak{O}^*_T \subset \mathfrak{O}_T$, le sousensemble $\bigcup_{O_T \in \mathfrak{O}^*_T} O_T$ de T est aussi un membre de $\mathfrak{O}_T$, puisque

$$f^{-1}\left(\bigcup_{O_T \in \mathfrak{O}^*_T} O_T\right) = \bigcup_{O_T \in \mathfrak{O}^*_T} f^{-1}(O_T)$$

est un ouvert dans l'espace $(S, \mathfrak{B})$.

C'est ainsi que nous pouvons proposer la définition suivante:

Définition 3.2. *Nous dirons que l'espace de voisinages* $(T, \mathfrak{W})$ *sur* T *défini par la base de voisinages* (3.2) *est l'espace qu'on obtient par la condition d'être le plus fin de tous les espaces de voisinages sur* T *tel que la fonction* f *soit une application continue de* $(S, \mathfrak{B})$ *dans* T.

Dans le cas des espaces topologiques on montre aisément que la définition précédente est bien équivalente à la définition connue portant sur les ouverts.

Les deux procédés de topologisation des ensembles, indiqués par les démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.2 pour les espaces de voisinages, sont à la base d'introduction de la topologie généralisée dans quelques cas spéciaux importants dont on peut faire une étude particulière.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki: *Topologie générale.* Livre III, Chap. I, II Paris 1951.

[2] Z. Mamuzić: *Introduction to General Topology.* Groningen 1963 (traduit par L. Boron et ses collaborateurs de serbo-croate en anglais).

[3] Dj. Kurepa: *Teorija skupova.* Zagreb 1961.