PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 115–128.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES PARACYCLIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

Dragoslav S. Mitrinović

(Communiqué le 12 septembre 1963)

Préliminaires

Hypothèse 1. Soit

$$x_i \in \sigma, \quad y_i \in \sigma \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

où σ est un ensemble non vide arbitraire.

Hypothèse 2. Supposons que la fonction f prenne des valeurs appartenant à un groupe additif abélien quelconque μ.

Hypothèse 3. Dans le groupe μ l'équation

$$mX = \theta \qquad (m \text{ nombre naturel}, \ \theta \in \mu, \ X \in \mu)$$

possède, par rapport à X, une solution unique, qui sera désignée par $\frac{1}{m}\theta$.

Définition 1. Si

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \sigma),$$

on introduit l'opérateur cyclique C_p^k (p nombre naturel $\leqslant n$) au moyen des égalités:

$$(0.1) \qquad C_p^0 x = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \ C_p^1 x = (x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}), \ \ldots, \ C_p^{n-1} x = (x_n, x_1, \ldots, x_{p-1}),$$

avec $C_p^n x = C_p^0 x$, $C_p^{n+1} x = C_p^1 x, \ldots$

Définition 2. L'équation

$$(0.2) \quad f(C_p^0 x, C_q^0 y) + f(C_p^1 x, C_q^1 y) + f(C_p^2 x, C_q^2 y) + \cdots + f(C_p^{n-1} x, C_q^{n-1} y) = 0,$$

avec

$$p \leqslant n, \ q \leqslant n, \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

sera appelée équation fonctionnelle linéaire paracyclique de première espèce.

Définition 3. L'équation

$$(0.3) \quad f(C_p^0 x, C_q^0 y) + f(C_p^1 x, C_q^1 y) + f(C_p^2 x, C_q^2 y) + \cdots + f(C_p^{n-1} x, C_q^{n-1} y)$$
$$+ f(C_q^0 x, C_p^0 y) + f(C_q^1 x, C_p^1 y) + f(C_q^2 x, C_p^2 y) + \cdots + f(C_q^{n-1} x, C_p^{n-1} y) = 0$$

sera appelée équation fonctionnelle linéaire paracyclique de seconde espèce.

Plus généralement, soit

$$X_k = (x_1^k,\ x_2^k,\ \ldots,\ x_n^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

L'équation fonctionnelle linéaire paracyclique de première espèce, à fonction inconnue f dépendant de ν systèmes de variables X_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, s'écrit sous la forme que voici

$$\begin{aligned}(0.4)\qquad & f(C_{p_1}^0 X_1,\ C_{p_2}^0 X_2,\ \ldots,\ C_{p_\nu}^0 X_\nu)\\ & + f(C_{p_1}^1 X_1,\ C_{p_2}^1 X_2,\ \ldots,\ C_{p_\nu}^1 X_\nu)\\ & + \cdots\\ & + f(C_{p_1}^{n-1} X_1,\ C_{p_2}^{n-1} X_2,\ \ldots,\ C_{p_\nu}^{n-1} X_\nu) = 0,\end{aligned}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ sont des entiers positifs tels que

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_\nu \leqslant n.$$

L'équation paracyclique de seconde espèce à fonction inconnue f dépendant de ν systèmes de variables X_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, a la forme suivante

$$\begin{aligned}(0.5)\qquad & \{f(C_{p_1}^0 X_1,\ C_{p_2}^0 X_2,\ \ldots,\ C_{p_\nu}^0 X_\nu)\\ & + f(C_{p_2}^0 X_1,\ C_{p_3}^0 X_2,\ \ldots,\ C_{p_1}^0 X_\nu)\\ & + \cdots\\ & + f(C_{p_\nu}^0 X_1,\ C_{p_1}^0 X_2,\ \ldots,\ C_{p_{\nu-1}}^0 X_\nu)\}\\ & + \{f(C_{p_1}^1 X_1,\ C_{p_2}^1 X_2,\ \ldots,\ C_{p_\nu}^1 X_\nu)\\ & + f(C_{p_2}^1 X_1,\ C_{p_3}^1 X_2,\ \ldots,\ C_{p_1}^1 X_\nu)\\ & + \cdots\\ & + f(C_{p_\nu}^1 X_1,\ C_{p_1}^1 X_2,\ \ldots,\ C_{p_{\nu-1}}^1 X_\nu)\}\\ & + \cdots\\ & + \{f(C_{p_1}^{n-1} X_1,\ C_{p_2}^{n-1} X_2,\ \ldots,\ C_{p_\nu}^{n-1} X_\nu)\\ & + f(C_{p_2}^{n-1} X_1,\ C_{p_3}^{n-1} X_2,\ \ldots,\ C_{p_1}^{n-1} X_\nu)\\ & + \cdots\\ & + f(C_{p_\nu}^{n-1} X_1,\ C_{p_1}^{n-1} X_2,\ \ldots,\ C_{p_{\nu-1}}^{n-1} X_\nu)\} = 0.\end{aligned}$$

Entre chaque couple d'accolades se trouve, dans l'équation précédente, une somme où les indices $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ se succèdent cycliquement.

Dans l'équation (0.4) les variables de chacun des systèmes X_k se succèdent séparèment cycliquement.

Dans cet article sont résolues les équations fonctionnelles suivantes:

$$(0.6)\quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3)+f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1)=0,$$

$$(0.7)\quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)+f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)$$
$$+f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1)=0,$$

$$(0.8)\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$$
$$+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1)$$
$$+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

$$(0.9)\quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)+f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3, z_2, z_3)$$
$$+f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1, z_3, z_1)=0.$$

Les hypothèses 1, 2 et 3 étant réalisées, les solutions générales des équations (0.6), (0.7), (0.8), (0.9) sont respectivement

$$(0.10)\quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=F(x_1, x_2, x_3, y_1)-F(x_2, x_3, x_1, y_2)$$

$$(0.11)\quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=F(x_1, x_2, y_1)-F(x_2, x_3, y_2)+G(x_1, x_3)+G(x_3, x_1),$$

$$(0.12)\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$$
$$=F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)-F(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4)$$
$$+G(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4)-G(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$$
$$+H(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4)-H(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1).$$

$$(0.13)\quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)=G(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1)-G(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2).$$

Les fonctions F, G, H sont arbitraires à valeurs appartiennent à μ et dépendent des variables mises en évidence.

A notre connaissance, jusqu'à présent dans la littérature mathématique la classe des équations fonctionnelles faisant l'objet du présent article n'a pas été étudiée. En réalité, cette classe généralise l'équation fonctionnelle cyclique

$$(0.14)\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p)+f(x_2, x_3, \ldots, x_p, x_{p+1})+\cdots$$
$$+f(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{2p-2}, x_{2p-1})+f(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p-1}, x_{2p})+\cdots$$
$$+f(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$
$$+f(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1)+\cdots+f(x_n, x_1, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1})=0,$$

où $p \leqslant n$.

Sur la dernière équation il existe une abondante littérature (*voir*, en particulier, l' article [1], où est donnée la bibliographie assez complète concernant les équations fonctionnelles cycliques).

Dans le présent article, en nous bornant à quelques équations particulières, nous avons mis en évidence un procédé qui s'applique aussi bien

dans le cas général (0.4). Dans un autre article il s'agira des équations (0.2) et (0.3) ainsi que des équations plus générales, comme par exemple:

$$f_1(C_p^0 x,\ C_q^0 y)+f_2(C_p^1 x,\ C_q^1 y)+\ \cdots\ +f_n(C_p^{n-1} x,\ C_q^{n-1} y)=0,$$

ou

$$f_1(C_p^0 x,\ C_q^0 y)+f_2(C_p^1 x,\ C_q^1 y)+\ \cdots\ +f_n(C_p^{n-1} x,\ C_q^{n-1} y)$$
$$+f_{n+1}(C_q^0 x,\ C_p^0 y)+f_{n+2}(C_q^1 x,\ C_p^1 y)+\ \cdots\ +f_{2n}(C_q^{n-1} x,\ C_p^{n-1} y)=0.$$

1. Équation fonctionnelle (0.6)

Considérons l'équation fonctionnelle paracyclique

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3)+f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1)=0. \tag{1.1}$$

Elle est équivalente à

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=-f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1)-f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3).$$

L'expression qui figure au premier membre de cette équation est indépendante de y_3. En posant[1] dans (1.2) $y_3=y_3^0$, on obtient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=-f(x_3, x_1, x_2, y_3^0, y_1)-f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3^0). \tag{1.2}$$

En introduisant les notations suivantes

$$-f(x_3, x_1, x_2, y_3^0, y_1)=F(x_1, x_2, x_3, y_1),$$

$$f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3^0)=G(x_2, x_3, x_1, y_2),$$

l'équation (1.2) devient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=F(x_1, x_2, x_3, y_1)-G(x_2, x_3, x_1, y_2). \tag{1.3}$$

Donc, la solution générale de l'équation (1.1) a la forme (1.3), mais la fonction (1.3) n'est pas nécessairement une solution de cette équation. Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, y_1)-G(x_1, x_2, x_3, y_1) \\ = G(x_2, x_3, x_1, y_2)-F(x_2, x_3, x_1, y_2) \\ +G(x_3, x_1, x_2, y_3)-F(x_3, x_1, x_2, y_3). \end{aligned} \tag{1.4}$$

L'expression figurant au premier membre de l'équation (1.4) ne dépend pas de y_2 et de y_3. Donc, on peut poser $y_2=y_2^0$, $y_3=y_3^0$ dans (1.4) et l'on obtient alors

$$F(x_1, x_2, x_3, y_1)-G(x_1, x_2, x_3, y_1)=H(x_1, x_2, x_3). \tag{1.5}$$

La formule (1.3), vu (1.5), devient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=G(x_1, x_2, x_3, y_1)-G(x_2, x_3, x_1, y_2)+H(x_1, x_2, x_3). \tag{1.6}$$

[1] Dans cet article, x_k^0, y_k^0, z_k^0, ... ($k=1, 2, \ldots$) désignent des constantes quelconques appartenant à l'ensemble σ.

Pour que (1.6) soit une solution de (1.1) il faut et il suffit que

$$H(x_1, x_2, x_3) + H(x_2, x_3, x_1) + H(x_3, x_1, x_2) = 0.$$

C'est l'équation cyclique dont la solution générale est

$$H(x_1, x_2, x_3) = I(x_1, x_2, x_3) - I(x_2, x_3, x_1).$$

La formule (1.6) devient alors

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, x_3, y_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2) + I(x_1, x_2, x_3) - I(x_2, x_3, x_1). \tag{1.7}$$

Si l'on introduit la nouvelle notation

$$G(x_1, x_2, x_3, y_1) + I(x_1, x_2, x_3) = G'(x_1, x_2, x_3, y_1),$$

on a

$$G(x_2, x_3, x_1, y_2) + I(x_2, x_3, x_1) = G'(x_2, x_3, x_1, y_2)$$

et la formule (1.7), après omission de l'accent, devient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, x_3, y_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2). \tag{1.8}$$

C'est la solution générale de l'équation (1.1).

2. Équation fonctionnelle (0.7)

Envisageons maintenant l'équation fonctionnelle

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) + f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4) + f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1) = 0. \tag{2.1}$$

En faisant $x_4 = \overset{0}{x}_4$, $y_3 = \overset{0}{y}_3$, $y_4 = \overset{0}{y}_4$, on obtient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = F(x_1, x_2, y_1) - G(x_2, x_3, y_2) + H(x_1, x_3), \tag{2.2}$$

où les fonctions F, G, H doivent satisfaire à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, y_1) - G(x_2, x_3, y_2) + H(x_1, x_3) \\ &+ F(x_2, x_3, y_2) - G(x_3, x_4, y_3) + H(x_2, x_4) \\ &+ F(x_3, x_4, y_3) - G(x_4, x_1, y_4) + H(x_3, x_1) \\ &+ F(x_4, x_1, y_4) - G(x_1, x_2, y_1) + H(x_4, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si l'on y remplace x_3, x_4, y_2, y_3, y_4 par $\overset{0}{x}_3, \overset{0}{x}_4, \overset{0}{y}_2, \overset{0}{y}_3, \overset{0}{y}_4$ respectivement, on obtient

$$F(x_1, x_2, y_1) = G(x_1, x_2, y_1) + R(x_1) - S(x_2). \tag{2.4}$$

D'après (2.4), l'égalité (2.2) devient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, y_1) - G(x_2, x_3, y_2) + H(x_1, x_3) + R(x_1) - S(x_2), \tag{2.5}$$

ou bien

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, y_1) - G(x_2, x_3, y_2) + T(x_1, x_2, x_3). \tag{2.6}$$

Pour que (2.6) soit une solution de l'équation (2.1), la condition suivante doit être remplie:

$$T(x_1, x_2, x_3)+T(x_2, x_3, x_4)+T(x_3, x_4, x_1)+T(x_4, x_1, x_2)=0.$$

C'est l'équation cyclique donc la solution générale est

$$T(x_1, x_2, x_3)=G_1(x_1, x_2)-G_1(x_2, x_3)+G_2(x_1, x_3)-G_2(x_3, x_1). \tag{2.7}$$

La formule (2.6), selon (2.7), devient

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)= \quad & G(x_1, x_2, y_1)-G(x_2, x_3, y_2) \\ & +G_1(x_1, x_2)-G_1(x_2, x_3) \\ & +G_2(x_1, x_3)-G_2(x_3, x_1), \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)= \quad & g_1(x_1, x_2, y_1)-g_1(x_2, x_3, y_2) \\ & +g_2(x_1, x_3)-g_2(x_3, x_1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

La solution générale de l'équation (2.1) est représentée par (2.8).

3. Équation fonctionnelle (0.8)

Nous allons maintenant résoudre l'équation fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ & +f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5) \\ & +f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ & +f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) \\ & +f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2) \\ & +f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si l'on pose $x_6=\overset{0}{x}_6$, $y_5=\overset{0}{y}_5$, $y_6=\overset{0}{y}_6$, l'équation (3.1) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ & = \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)-G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\ & +H(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4)-K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\ & +I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4), \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec

$$\begin{aligned} f(x_2, x_3, x_4, x_5, \overset{0}{x}_6, y_2, y_3, y_4, \overset{0}{y}_5)= \quad & G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4), \\ f(x_3, x_4, x_5, \overset{0}{x}_6, x_1, y_3, y_4, \overset{0}{y}_5, \overset{0}{y}_6)= \quad & -H(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4), \\ f(x_4, x_5, \overset{0}{x}_6, x_1, x_2, y_4, \overset{0}{y}_5, \overset{0}{y}_6, y_1)= \quad & -I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4), \\ f(x_5, \overset{0}{x}_6, x_1, x_2, x_3, \overset{0}{y}_5, \overset{0}{y}_6, y_1, y_2)= \quad & K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2). \\ f(\overset{0}{x}_6, x_1, x_2, x_3, x_4, \overset{0}{y}_6, y_1, y_2, y_3)= \quad & -F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Pour que (3.2) soit une solution de l'équation (3.1), il faut et il suffit que

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad & F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\
& + F(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) - G(x_3, x_4, x_5, x_6, y_3, y_4, y_5) \\
& + F(x_3, x_4, x_5, x_6, y_3, y_4, y_5) - G(x_4, x_5, x_6, x_1, y_4, y_5, y_6) \\
& + F(x_4, x_5, x_6, x_1, y_4, y_5, y_6) - G(x_5, x_6, x_1, x_2, y_5, y_6, y_1) \\
& + F(x_5, x_6, x_1, x_2, y_5, y_6, y_1) - G(x_6, x_1, x_2, x_3, y_6, y_1, y_2) \\
& + F(x_6, x_1, x_2, x_3, y_6, y_1, y_2) - G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) \\
& + H(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \quad - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\
& + H(x_2, x_4, x_5, x_6, y_4, y_5) \quad - K(x_6, x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \\
& + H(x_3, x_5, x_6, x_1, y_5, y_6) \quad - K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\
& + H(x_4, x_6, x_1, x_2, y_6, y_1) \quad - K(x_2, x_4, x_5, x_6, y_4, y_5) \\
& + H(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \quad - K(x_3, x_5, x_6, x_1, y_5, y_6) \\
& + H(x_6, x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \quad - K(x_4, x_6, x_1, x_2, y_6, y_1) \\
& \qquad + I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) \\
& \qquad + I(x_2, x_3, x_5, x_6, y_2, y_5) \\
& \qquad + I(x_3, x_4, x_6, x_1, y_3, y_6) \\
& \qquad + I(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) \\
& \qquad + I(x_5, x_6, x_2, x_3, y_5, y_2) \\
& \qquad + I(x_6, x_1, x_3, x_4, y_6, y_3) = 0.
\end{aligned}
$$

Faisons, dans la dernière équation fonctionnelle,

$$y_4 = \overset{0}{y}_4, \quad y_5 = \overset{0}{y}_5, \quad y_6 = \overset{0}{y}_6.$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) \\
& = F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - G_1(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \\
& \quad + H_1(x_1, x_2, x_4, y_1) - K_1(x_1, x_3, x_4, y_3).
\end{aligned}
$$

Compte tenu de (3.4), la formule (3.2) devient

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\
& = G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\
& \quad + H(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\
& \quad + I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) \\
& \quad + F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - G_1(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3),
\end{aligned}
$$

où nous avons omis les fonctions H_1 et K_1, ce qui ne restreint pas la généralité du résultat en question.

Si dans (3.1) on porte $f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$, donné à l'aide de (3.5), on aboutit à

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad & H(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\
& + H(x_2, x_4, x_5, x_3, y_4, y_5) - K(x_6, x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \\
& + H(x_3, x_5, x_6, x_1, y_5, y_6) - K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\
& + H(x_4, x_6, x_1, x_2, y_6, y_1) - K(x_2, x_4, x_5, x_6, y_4, y_5) \\
& + H(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - K(x_3, x_5, x_6, x_1, y_5, y_6) \\
& + H(x_6, x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) - K(x_4, x_6, x_1, x_2, y_6, y_1) \\
& + I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) \\
& + I(x_2, x_3, x_5, x_6, y_2, y_5) \\
& + I(x_3, x_4, x_6, x_1, y_3, y_6) \\
& + I(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) \\
& + I(x_5, x_6, x_2, x_3, y_5, y_2) \\
& + I(x_6, x_1, x_3, x_4, y_6, y_3) \\
& + F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - G_1(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \\
& + F_1(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) - G_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\
& + F_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - G_1(x_4, x_5, x_6, y_4, y_5) \\
& + F_1(x_4, x_5, x_6, y_4, y_5) - G_1(x_5, x_6, x_1, y_5, y_6) \\
& + F_1(x_5, x_6, x_1, y_5, y_6) - G_1(x_6, x_1, x_2, y_6, y_1) \\
& + F_1(x_6, x_1, x_2, y_6, y_1) - G_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Si dans la dernière équation on met

$$x_2 = \overset{0}{x}_2, \quad x_6 = \overset{0}{x}_6, \quad y_1 = \overset{0}{y}_1, \quad y_2 = \overset{0}{y}_2, \quad y_5 = \overset{0}{y}_5, \quad y_6 = \overset{0}{y}_6,$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
& H(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\
& \quad = K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\
& \qquad + G_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - F_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\
& \qquad + L_1(x_1, x_3, x_4, y_3) - L_2(x_1, x_4, x_5, y_4) \\
& \qquad + M(x_1, x_3, x_5).
\end{aligned}
$$

En portant cette expression dans (3.5), il vient

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\
& \quad = G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\
& \qquad + K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\
& \qquad + I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4)
\end{aligned}
$$

$$+F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - F_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4)$$
$$+G_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - G_1(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)$$
$$+L_1(x_1, x_3, x_4, y_3) - L_2(x_1, x_4, x_5, y_4)$$
$$+M(x_1, x_3, x_5).$$

Dans (3.6) on peut poser $F_1 = 0$, $G_1 = 0$, $L_2 = 0$ sans restreindre la généralité de la solution du problème en question.

En effet, en introduisant la nouvelle notation suivante

$$K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - F_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) = K'(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4),$$

on a

$$K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = K'(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2).$$

Ensuite, posons

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G_1(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) = G'(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3);$$

on en déduit

$$G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) - G_1(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) = G'(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4).$$

Enfin, introduisons au lieu de la fonction I une nouvelle fonction I' comme suit

$$I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - L_2(x_1, x_4, x_5, y_4) = I'(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4).$$

Si dans (3.6) on porte les fonctions K, G, I et si l'on supprime ensuite l'accent, on obtient

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\ &\quad + K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\ &\quad + I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) \\ &\quad + L_1(x_1, x_3, x_4, y_3) \\ &\quad + M(x_1, x_3, x_5).\end{aligned}$$

Pour que (3.7) soit une solution de l'équation (3.1), la condition suivante doit être remplie:

$$\begin{aligned}& I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) + L(x_1, x_3, x_4, y_3) \\ & + I(x_2, x_3, x_5, x_6, y_2, y_5) + L(x_2, x_4, x_5, y_4) \\ & + I(x_3, x_4, x_6, x_1, y_3, y_6) + L(x_3, x_5, x_6, y_5) \\ & + I(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) + L(x_4, x_6, x_1, y_6) \\ & + I(x_5, x_6, x_2, x_3, y_5, y_2) + L(x_5, x_1, x_2, y_1) \\ & + I(x_6, x_1, x_3, x_4, y_6, y_3) + L(x_6, x_2, x_3, y_2) \\ & + M(x_1, x_3, x_5) + M(x_2, x_4, x_6) + M(x_3, x_5, x_1) \\ & + M(x_4, x_6, x_2) + M(x_5, x_1, x_3) + M(x_6, x_2, x_4) = 0,\end{aligned}$$

où au lieu de L_1 on a posé L.

En faisant, dans la dernière égalité,

$$x_3 = \overset{0}{x}_3, \quad x_6 = \overset{0}{x}_6, \quad y_2 = \overset{0}{y}_2, \quad y_3 = \overset{0}{y}_3, \quad y_5 = \overset{0}{y}_5, \quad y_6 = \overset{0}{y}_6,$$

on trouve

$$\begin{aligned} (3.8) \qquad & I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) + I(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) \\ & + L(x_2, x_4, x_5, y_4) + L(x_5, x_1, x_2, y_1) \\ & = E_1(x_1, x_4) + E_2(x_1, x_5) + E_3(x_2, x_4) + E_4(x_2, x_5). \end{aligned}$$

L'équation (3.8), si l'on y fait la substitution suivante

$$(3.9) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & y_1 & y_4 \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_2 & y_4 & y_1 \end{pmatrix}$$

se transforme en

$$\begin{aligned} (3.10) \qquad & I(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) + I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) \\ & + L(x_5, x_1, x_2, y_1) + L(x_2, x_4, x_5, y_4) \\ & = E_1(x_4, x_1) + E_2(x_4, x_2) + E_3(x_5, x_1) + E_4(x_5, x_2). \end{aligned}$$

Des relations (3.8) et (3.10) on déduit immédiatement

$$\begin{aligned} & E_1(x_1, x_4) + E_2(x_1, x_5) + E_3(x_2, x_4) + E_4(x_2, x_5) \\ & = E_1(x_4, x_1) + E_2(x_4, x_2) + E_3(x_5, x_1) + E_4(x_5, x_2). \end{aligned}$$

Par simple changement des notations, la dernière équation s'écrit

$$\begin{aligned} (3.11) \qquad & E_1(u, w) + E_2(u, t) + E_3(v, w) + E_4(v, t) \\ & = E_1(w, u) + E_2(w, v) + E_3(t, u) + E_4(t, v). \end{aligned}$$

Cette équation est une équation fonctionnelle linéaire à quatre fonctions inconnues.

Dans un autre article [2] nous avons démontré, relativement à l'équations (3.11), le résultat suivant:

La solution générale de l'équation (3.11) est donnée par l'ensemble $\{E_1(u, v), E_2(u, v), E_3(u, v), E_4(u, v)\}$, avec

$$\begin{aligned} & E_1(u, v) = g(u, v) + g(v, u) + A(u), \\ (3.12) \qquad & E_4(u, v) = h(u, v) + h(v, u) + B(u), \\ & E_2(u, v) = E_3(v, u) + B(v) - A(u), \end{aligned}$$

où la fonction inconnue E_3 est arbitraire, ainsi que les fonctions g, h, A, B.

L'équation (3.8), suivie des formules (3.12), peut être écrite la forme suivante:

$$\begin{aligned} (3.13) \quad & \{I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) + L(x_2, x_4, x_5, y_4) + g(x_1, x_4) + h(x_2, x_5) + E_3(x_5, x_1)\} \\ & + \{I(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) + L(x_5, x_1, x_2, y_1) + g(x_4, x_1) + h(x_5, x_2) + E_3(x_2, x_4)\} = 0, \end{aligned}$$

où B peut être omis sans restreindre la généralité de la solution dont il s'agit ici.

Au moyen de la substitution (3.9) le premier terme, figurant entre les accolades dans le premier membre de l'équation (3.13) se transforme en le second terme figurant aussi entre les accolades au premier membre de la même équation.

La solution générale de l'équation (3.13) est

$$(3.14)\quad I(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) + L(x_2, x_4, x_5, y_4) + g(x_1, x_4) + h(x_2, x_5) + E_3(x_5, x_1)$$
$$= R(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - R(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1),$$

où R désigne une fonction arbitraire.

En associant les égalités (3.7) et (3.14), on trouve

$$(3.15)\quad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ = \; & G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\ & + K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\ & + R(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - R(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) \\ & + L(x_1, x_3, x_4, y_3) - L(x_2, x_4, x_5, y_4) \\ & + M(x_1, x_3, x_5) \\ & - g(x_1, x_4) - h(x_2, x_5) - E_3(x_5, x_1). \end{aligned}$$

Sans nuire à la généralité, on peut dans (3.15) poser $L=0$.

En effet, faisons

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) + L(x_1, x_3, x_4, y_3) = G'(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$$

et substituons dans (3.15) la fonction G ainsi définie. On obtient précisément la formule (3.15) avec $L=0$ si l'on supprime, au préalable, l'accent.

Donc, on peut mettre (3.15) sous la forme suivante:

$$(3.16)\quad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ = \; & G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\ & + K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - K(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\ & + R(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - R(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1) \\ & + S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{aligned}$$

où S doit satisfaire à

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + S(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + S(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ S(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + S(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + S(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

La solution générale de cette équation cyclique est

$$(3.17)\quad \begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \; & \Lambda_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - \Lambda_1(x_2, x_3, x_4, x_5) \\ & + \Lambda_2(x_1, x_3, x_4, x_5) - \Lambda_2(x_5, x_1, x_2, x_3) \\ & + \Lambda_3(x_1, x_2, x_4, x_5) - \Lambda_3(x_4, x_5, x_1, x_2). \end{aligned}$$

La formule (3.16), vu (3.17), devient

$$(3.18)\qquad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= G_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - G_1(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4) \\ &\quad + G_2(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \quad - G_2(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \\ &\quad + G_3(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) \quad - G_3(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1). \end{aligned}$$

En réalité, en posant

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) + \Lambda_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= G_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) \\ K(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) + \Lambda_2(x_1, x_3, x_4, x_5) &= G_2(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) \\ R(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) + \Lambda_3(x_1, x_2, x_4, x_5) &= G_3(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4), \end{aligned}$$

on obtient précisément la formule (3.18).

En conséquence, la solution générale de l'équation (3.1) est donnée par (3.18).

4. Équation fonctionnelle (0.9)

Prenons maintenant l'équation fonctionnelle

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2) + f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3, z_2, z_3) \\ & \qquad + f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1, z_3, z_1) = 0, \end{aligned}$$

qui est paracyclique, à trois systèmes de variables.

Si l'on y fait $y_3 = y_3^0$ et $z_3 = z_3^0$, on trouve

$$(4.2)\qquad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2) = F(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2),$$

où les fonctions F et G doivent vérifier la relation

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} & F(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2) \\ & + F(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2) - G(x_3, x_1, x_2, y_3, z_3) \\ & + F(x_3, x_1, x_2, y_3, z_3) - G(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) = 0. \end{aligned}$$

Pour $y_2 = y_2^0$, $y_3 = y_3^0$, $z_2 = z_2^0$, $z_3 = z_3^0$ l'équation (4.3) reçoit la forme suivante

$$(4.4)\qquad F(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) - G(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) = H(x_1, x_2, x_3).$$

Alors (4.2) devient

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2) \\ & \qquad = G(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2) + H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Pour que (4.5) soit une solution de l'équation (4.1), on doit avoir

$$H(x_1, x_2, x_3) + H(x_2, x_3, x_1) + H(x_3, x_1, x_2) = 0.$$

On déduit immédiatement

$$H(x_1, x_2, x_3) = I(x_1, x_2, x_3) - I(x_2, x_3, x_1).$$

Donc, la formule (4.5) devient

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2) = G(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2) + I(x_1, x_2, x_3) - I(x_2, x_3, x_1).$$

On peut omettre la fonction I, sans nuire à la généralité de la solution de l'équation (4.1).

Donc, la solution générale de l'équation (4.1) avec les hypothèses 1, 2 et 3 (pour $m=3$) est

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2) = G(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1) - G(x_2, x_3, x_1, y_2, z_2). \tag{4.6}$$

5. S. B. Prešić, qui a lu cet article dans sa première rédaction, nous a suggéré le rapprochement suivant entre certaines classes d'équations paracycliques de première espèce.

Considérons, en premier lieu, l'équation (4.1) et posons

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3, X_1, X_2), \tag{5.1}$$

où X_1 et X_2 remplacent respectivement les couples de variables suivants (y_1, z_1) et (y_2, z_2). L'équation (4.1) s'écrit alors sous la forme suivante

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, X_1, X_2) + \varphi(x_2, x_3, x_1, X_2, X_3) + \varphi(x_3, x_1, x_2, X_3, X_1) = 0, \tag{5.2}$$

avec $X_3 = (y_3, z_3)$.

En réalité, l'équation (5.2) coïncide en forme avec (1.1).

L'équation (1.1) est résolue sous la condition que $x_i, y_j \in \sigma$. Cependant, la forme de la solution (1.8) reste aussi inaltérée dans le cas où $x_i \in \sigma_1$ et $y_j \in \sigma_2$, σ_1 et σ_2 étant deux ensembles différents, ce qui se présente avec l'équation (5.2).

En conséquence, la solution générale de l'équation (5.2) s'écrit, en partant de (1.8), sous la forme qui suit

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, X_1, X_2) = G(x_1, x_2, x_3, X_1) - G(x_2, x_3, x_1, X_2).$$

Si l'on y remplace X_1 par (y_1, z_1) et X_2 par (y_2, z_2), on a précisément la solution générale (4.6) de l'équation (4.1).

À l'équation paracyclique (0.4) à ν systèmes de variables correspond la suite caractéristique suivante

$$(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu).$$

La suite caractéristique, rattachée à l'équation (4.1) est (3, 2, 2) et cette équation est réduite à l'équation (1.1), ayant la suite caractéristique (3, 2). Mais les suites (3, 2, 2) et (3, 2) sont équivalentes par rapport à la résolution des équations correspondantes.

En réalité, dans le cas où parmi les entiers positifs

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu$$

il en existe d'égaux, alors la résolution de l'équation (0.4) peut être ramenée à une équation paracyclique plus simple dont tous les indices p_k sont différents. Soit, par exemple,

$$(5, 4, 4, 2, 2)$$

la suite caractéristique d'une équation paracyclique de première espèce. Alors sa solution peut être obtenue au moyen de la solution de l'équation paracyclique dont la suite caractéristique est

$$(5,\ 4,\ 2).$$

Dans le cas où

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_\nu,$$

l'équation (0.4) se ramène à une équation cyclique.

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović et D. Ž. Djoković: *Ciklične funkcionalne jednačine.* Matematička biblioteka, sveska 22, Beograd 1962, p. 5—23.

[2] D. S. Mitrinović: *Sur certaines équations fonctionnelles linéaires à plusieurs fonctions inconnues.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, serie: Mathématiques et physique, fasc. 116 (1963).