PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 105–114.

QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES CYCLIQUES NON LINÉAIRES À PROPRIÉTÉS CURIEUSES

Dragoslav S. Mitrinović et *Petar M. Vasić*

(Communiqué le 6 septembre 1963)

Préliminaires

Toutes les fonctions qui interviennent dans cet article sont supposées être des fonctions complexes de variables complexes.

L'équation fonctionnelle

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) + F(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_1) + \cdots + F(x_0, x_{2n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}) = 0 \qquad (n > 2), \tag{0.1}$$

suivie de

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = \{f(x_0, x_1) + f(x_2, x_3) + \cdots + f(x_{2k-2}, x_{2k-1})\} \times \{f(x_{2k}, x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}, x_{2k+3}) + \cdots + f(x_{2n-2}, x_{2n-1})\} \tag{0.2}$$

sera notée: *équation* (E_1).

La solution générale de l'équation (E_1), déterminée dans l'article [1], est représentée par

$$f(u, v) = g(v) - g(u), \tag{0.3}$$

g étant une fonction arbitraire.

Dans le cas où $n = 4$ et $k = 2$ l'équation (E_1) reçoit la forme que voici:

$$\begin{aligned} &\{f(x_0, x_1) + f(x_2, x_3)\}\{f(x_4, x_5) + f(x_6, x_7)\} \\ &+ \{f(x_0, x_2) + f(x_3, x_4)\}\{f(x_5, x_6) + f(x_7, x_1)\} \\ &+ \{f(x_0, x_3) + f(x_4, x_5)\}\{f(x_6, x_7) + f(x_1, x_2)\} \\ &+ \{f(x_0, x_4) + f(x_5, x_6)\}\{f(x_7, x_1) + f(x_2, x_3)\} \\ &+ \{f(x_0, x_5) + f(x_6, x_7)\}\{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4)\} \\ &+ \{f(x_0, x_6) + f(x_7, x_1)\}\{f(x_2, x_3) + f(x_4, x_5)\} \\ &+ \{f(x_0, x_7) + f(x_1, x_2)\}\{f(x_3, x_4) + f(x_5, x_6)\} = 0. \end{aligned} \tag{0.4}$$

La solution générale de cette équation est donnée par (0.3).

A partir de l'équation (0.4), en y permutant les seconds des arguments dont dépend f, on a construit l'équation fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
(0.5)\qquad & \{f(x_0, x_3)+f(x_2, x_1)\}\{f(x_4, x_7)+f(x_6, x_5)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)+f(x_3, x_2)\}\{f(x_5, x_1)+f(x_7, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)+f(x_4, x_3)\}\{f(x_6, x_2)+f(x_1, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)+f(x_5, x_4)\}\{f(x_7, x_3)+f(x_2, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)+f(x_6, x_5)\}\{f(x_1, x_4)+f(x_3, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_1)+f(x_7, x_6)\}\{f(x_2, x_5)+f(x_4, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)+f(x_1, x_7)\}\{f(x_3, x_6)+f(x_5, x_4)\}=0.
\end{aligned}
$$

Cette équation a également la fonction (0.3) comme solution.

Les équations fonctionnelles

$$
\begin{aligned}
(0.6)\qquad & \{f(x_0, x_1)-f(x_3, x_2)\}\{f(x_4, x_7)+f(x_6, x_5)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)-f(x_4, x_3)\}\{f(x_5, x_1)+f(x_7, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_3)-f(x_5, x_4)\}\{f(x_6, x_2)+f(x_1, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)-f(x_6, x_5)\}\{f(x_7, x_3)+f(x_2, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)-f(x_7, x_6)\}\{f(x_1, x_4)+f(x_3, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)-f(x_1, x_7)\}\{f(x_2, x_5)+f(x_4, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)-f(x_2, x_1)\}\{f(x_3, x_6)+f(x_5, x_4)\}=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0.7)\qquad & \{f(x_0, x_3)+f(x_2, x_1)\}\{f(x_4, x_5)-f(x_7, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)+f(x_3, x_2)\}\{f(x_5, x_6)-f(x_1, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)+f(x_4, x_3)\}\{f(x_6, x_7)-f(x_2, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)+f(x_5, x_4)\}\{f(x_7, x_1)-f(x_3, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)+f(x_6, x_5)\}\{f(x_1, x_2)-f(x_4, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_1)+f(x_7, x_6)\}\{f(x_2, x_3)-f(x_5, x_4)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)+f(x_1, x_7)\}\{f(x_3, x_4)-f(x_6, x_5)\}=0
\end{aligned}
$$

construites aussi en partant de l'équation (0.4) par la permutation des variables et par le changement de signes, d'après une loi fixée, ont de même (0.3) comme solution.

Les propriétés mentionnées concernant les équations (0.4), (0.5), (0.6) et (0.7) suggèrent de poser la question si la fonction (0.3) est une solution des équations analogues à celles indiquées plus haut (où k et n ($\geqslant k$) sont des nombres entiers positifs quelconques). Dans le cas affirmatif, il resterait à déterminer le caractère de la solution dont il s'agit ici.

Les questions mises au point plus haut relatives à des équations plus généraux que (0.4)—(0.7) sont l'objet du présent article.

1. Équation fonctionnelle (E_2)

L'équation fonctionnelle (0.1), avec

$$(1.1)\quad F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = \{f(x_0, u_0) + f(x_2, u_1) + \cdots + f(x_{2k-2}, u_{k-1})\} \times \{f(x_{2k}, v_0) + f(x_{2k+2}, v_1) + \cdots + f(x_{2n-2}, v_{n-k-1})\}$$

$$(u_i \in \{x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2k-1}\}\ (i=0, 1, \ldots, k-1),\ v_j \in \{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}\ (j=0, 1, \ldots, n-k-1);\ u_\nu \neq u_\mu \text{ et } v_\nu \neq v_\mu \text{ si } \mu \neq \nu),$$

sera symbolisée: *équation* (E_2).

Relativement à l'équation (E_2) nous allons prouver le résultat suivant:

Théorème 1. — *La solution générale de l'équation* (E_2) *est*

$$(1.2)\qquad f(u, v) = g(v) - g(u),$$

g étant une fonction arbitraire.

Démonstration. La fonction (1.2) est une solution de l'équation (E_2), ce qui est facile à montrer. En effet, si l'on porte (1.2) dans (1.1), on obtient

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = \{g(x_0) - g(x_1) + g(x_2) - \cdots + g(x_{2k-2}) - g(x_{2k-1})\} \times \{g(x_{2k}) - g(x_{2k+1}) + g(x_{2k+2}) - \cdots + g(x_{2n-2}) - g(x_{2n-1})\}.$$

On arrive au même résultat si l'on porte (1.2) dans (0.1). Étant donné que (1.2) représente une solution de (E_1), on est conduit à la conclusion que (1.2) est une solution de l'équation (E_2).

Inversement, nous allons démontrer que chaque solution de l'équation (E_2) a précisément la forme (1.2).

La solution triviale est comprise aussi dans (1.2). Dans ce qui suit, nous ne chercherons que des solutions non triviales. Pour toute solution non triviale il existe au moins un couple (a, b) de nombres complexes tels que $f(a, b) \neq 0$.

En faisant $x_i = u$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$, l'équation ($E_2$) se ramène, pour n'importe quel u, à

$$(1.3)\qquad f(u, u) = 0.$$

Si l'on pose $x_1 = x_{2n-1} = v$ et $x_0 = u$, $x_i = u$ $(i = 2, 3, \ldots, 2n-2)$ l'équation (E_2), selon (1.3), devient

$$(1.4)\qquad p f^2(u, v) + q f(u, v)\, f(v, u) + r f^2(v, u) = 0,$$

où $p\,(>0)$, $q\,(\geqslant 0)$, $r\,(>0)$ sont des entiers.

Étant donné que (1.2) doit satisfaire à l'équation (1.4), pour tout g, par substitution de (1.2) dans (1.4), on arrive à la condition suivante $q = p + r$. Si l'on permute u et v, l'égalité (1.4) devient

$$(1.5)\qquad p f^2(v, u) + q f(u, v)\, f(v, u) + r f^2(u, v) = 0.$$

En additionnant, membre à membre, les égalités (1.4) et (1.5) et ayant en vue la condition $q = p + r\,(>0)$, on parvient à

$$(1.6)\qquad f(u, v) + f(v, u) = 0.$$

Nous allons à présent distinguer les deux cas suivants: 1° $k=1$; 2° $k>1$.

Premier cas: $k=1$. La fonction (1.1) est

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = f(x_0, x_1)\ \{f(x_2, v_0) + f(x_4, v_1) + \cdots + f(x_{2n-2}, v_{n-2})\}$$

$$(v_i \in \{x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1}\}\ (i=0, 1, \ldots, n-2);\ v_\mu \neq v_\nu \text{ si } \mu \neq \nu).$$

Il faut séparément examiner les deux cas possibles suivants: $v_{n-2} \neq x_{2n-1}$ et $v_{n-2} = x_{2n-1}$. Dans la première de ces possibilités, la substitution

$$(1.7)\quad x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_{2n-2} = u,\ v_{n-2} = v,\ x_2 = x_4 = \cdots = x_{2n-4} = a,\ v_0 = v_1 = \cdots = v_{n-3} = a,$$

transforme l'équation (E_2) en celle-ci

$$f(a, b)\ f(u, v) + f(a, u)\ \{f(a, b) + f(a, v)\} + f(a, v)\ \{f(b, a) + f(u, a)\} = 0.$$

A partir de cette équation et ayant en vue (1.6), on arrive à

$$f(u, v) = f(a, v) - f(a, u).$$

En introduisant la notation $f(a, u) = g(u)$, on conclut que la fonction f a la forme (1.2).

Si $v_{n-2} = x_{2n-1}$, le changement (1.7) transforme l'équation (E_2) en celle-ci

$$(1.8)\quad f(a, b)\ f(u, v) + f(a, u)\ \{f(v, a) + f(a, b)\} + f(a, v)\ \{f(b, a) + f(a, u)\} = 0,$$

dans le cas où $v_0 \neq x_3$, ou en

$$(1.9)\quad f(a, b)\ f(u, v) + f(a, u)\ f(v, b) + f(a, v)\ f(b, a) + f(a, v)\ f(a, u) = 0,$$

pour le cas $v_0 = x_3$.

L'équation (1.8), selon (1.6), fournit

$$(1.10)\qquad f(u, v) = g(v) - g(u),$$

où nous avons employé la notation $f(a, u) = g(u)$.

Si $v = b$, l'équation (1.9) conduit à

$$f(u, b) = f(a, b) - f(a, u).$$

En utilisant la dernière égalité et introduisant la notation $f(a, u) = g(u)$, l'équation (1.9) se raméne à (1.10).

Second cas: $k>1$. Soit $u_0 = x_{2l-1}$ $(0<l<k)$. Il faut distinguer les deux possibilités suivantes: $(0<2l\leqslant k)$ et $(k<2l\leqslant 2k)$.

Prenons en considération tout d'abord la première de ces possibilités. Posons alors $x_0 = u$, $x_{2l-1} = v$, $x_{2n-1} = y$ et remplaçons les variables restantes par x. Alors l'équation (E_2), en vertu de (1.3) et (1.6), prend la forme

$$(1.11)\quad f(x, y)\ f(u, v) + Af(u, x)\ f(v, x) + Bf(u, x)\ f(y, x)$$
$$+ Cf(x, y)\ f(v, x) + Df(u, x)\ f(y, v) + Ef(u, y)\ f(v, x) = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers.

Remarquons que, dans (1.1), on a $E=0$. En effet, le terme $f(u, y) f(v, x)$ figurant dans (0.1) peut se présenter uniquement dans le terme

$$F(x_0, x_{2n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}),$$

où la variable x_{2l-1} intervient comme $(2l+1)$-ième argument et au moyen de ladite substitution on obtient

$$F(x_0, x_{2n-1}, x_1, \ldots, x_{2n-2}) = \{f(u, y)+f(v, x)\} \times \{(n-k) f(x, x)\} = 0.$$

La fonction $f(u, v)=g(v)-g(u)$ doit satisfaire à l'équation (1.11) pour tout g. Si l'on porte (1.2) dans (1.11), on parvient au système suivant qui doint être vérifié pour que (1.2) soit une solution de (1.11) pour tout g, à savoir:

$$A+B=1, \quad A-C-D=-1, \quad C=1,$$

$$B-C+D=0, \quad A-D=0, \quad A+B-C=0.$$

Il en résulte

$$B=1-A, \quad C=1, \quad D=A \tag{1.12}$$

et alors l'équation (1.1) s'écrit

$$\begin{aligned} f(x, y) f(u, v)+Af(u, x) f(v, x)+(1-A) f(u, x) f(y, x) \\ +f(x, y) f(v, x)+Af(u, x) f(y, v)=0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Pour $x=a$ et $y=v=b$ l'équation (1.13) fournit

$$f(u, b)=f(u, a)+f(a, b). \tag{1.14}$$

En posant à présent, dans (1.13), $x=a$ et $y=b$, on obtient

$$\begin{aligned} f(a, b) f(u, v)+Af(u, a) f(v, a)+(1-A) f(u, a) f(b, a) \\ +f(a, b) f(v, a)+Af(u, a) f(b, v)=0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

ou bien, vu (1.14),

$$f(u, v)=f(a, v)-f(a, u).$$

Avec la notation $g(u)=f(a, u)$, la dernière égalité conduit à

$$f(u, v)=g(v)-g(u).$$

Passons maintenant au cas $k<2l\leqslant 2k$.

Faisons $x_0=u$, $x_{2l-1}=v$, $x_{2n-1}=y$ et remplaçons par x toutes les variables restantes. Cela étant fait, l'équation (E_2) devient

$$\begin{aligned} f(x, y) f(u, v)+A_1 f(u, x) f(v, x)+B_1 f(u, x) f(y, x) \\ +C_1 f(x, y) f(v, x)+D_1 f(u, x) f(y, v)+E_1 f(u, y) f(v, x)=0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Par un examen analogue à celui utilisé pour le cas $0<2l\leqslant k$, on arrive à la conclusion que l'on a: $E_1=1$, $B_1=1-D_1$, $C_1=0$, $-B_1=A_1$. En fait, on obtient uoe équation équivalente à (1.15).

Par conséquent, dans ce cas, toute solution a également la forme (1.2).

2. Équation fonctionnelle (E_3)

L'équation (0.1), suivie de

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) \\
&= \{f(x_0, x_1) - f(x_3, x_2) + \cdots + f(x_{2k-4}, x_{2k-3}) - f(x_{2k-1}, x_{2k-2})\} \\
&\quad \times \{f(x_{2k}, v_0) + f(x_{2k+2}, v_1) + \cdots + f(x_{2n-2}, v_{n-k-1})\} \qquad (k = 2m) \\
&= \{f(x_0, x_1) - f(x_3, x_2) + \cdots - f(x_{2k-3}, x_{2k-4}) + f(x_{2k-2}, x_{2k-1})\} \\
&\quad \times \{f(x_{2k}, v_0) + f(x_{2k+2}, v_1) + \cdots + f(x_{2n-2}, v_{n-k-1})\} \quad (k = 2m-1)
\end{aligned}
$$

$(v_i \in \{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-k-1)$; $v_\nu \neq v_\mu$ si $\nu \neq \mu)$,

sera notée: *équation* (E_3).

En ce qui concerne cette équation, nous prouverons le résultat suivant:

Théorème 2. — *La solution générale de l'équation* (E_3) *pour* $k = 2m-1$ *est*

$$(2.2)\qquad f(u, v) = g(v) - g(u) \qquad (g, \textit{ fonction arbitraire}).$$

Pour $k = 2m$ *la solution générale de cette équation est une constante ou la fonction* (2.2).

Démonstration. Considérons, eu premier lieu, le cas pour lequel on a $k = 2m-1$.

En faisant $x_i = u$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$, on obtient

$$(2.3)\qquad f(u, u) \equiv 0.$$

Pour $x_0 = x_{2n-1} = u$ et $x_j = v$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n-2)$ et ayant en vue la propriété (2.3), l'équation (E_3) devient

$$(2.4)\qquad f^2(u, v) + f(u, v)\, f(v, u) = 0.$$

Si l'on y permute u et v, on arrive à

$$(2.5)\qquad f^2(v, u) + f(u, v)\, f(v, u) = 0.$$

Par addition des égalités (2.4) et (2.5), membre à membre, on trouve

$$\{f(u, v) + f(v, u)\}^2 = 0,$$

ce qui conduit à

$$(2.6)\qquad f(u, v) = -f(v, u).$$

En appliquant (2.6), l'équation (E_3) se ramène à (E_2) dont la solution générale est

$$(2.7)\qquad f(u, v) = g(v) - g(u).$$

Puisque la fonction (2.7) est une solution de l'équation (E_3), le théorème 2 pour $k = 2m-1$ est démontré.

Passons à présent au cas $k=2m$.

Divisons toutes les fonctions f en deux classes, à savoir:

Soit C_1 la classe à propriété $f(u, u)=0$ pour tout u et C_2 celle à propriété $f(u, u) \not\equiv 0$.

Étudions tout d'abord le cas correspondant à $f(u, u)=0$ pour tout u.

En mettant $x_0=x_{2n-1}=u$, $x_i=v$ $(i=1, 2, \ldots, 2n-2)$, l'équation (E_3), vu la condition $f(u, u)=0$, se ramène à (2.4). Par permutation des u et v dans (2.4), on obtient (2.5); par addition, des égalités (2.4) et (2.5), membre à membre, on parvient à (2.6), ce qui signifie que l'équation (E_3), dans le cas considéré, se réduit à (E_2).

Par conséquent, la solution générale de l'équation (E_3), pour $k=2m$, dans la classe C_1 des fonctions f, est représentée par (2.7).

Envisageons maintenant le cas où $f(u, u) \not\equiv 0$. Il existe alors au moins un nombre c tel que $f(c, c) \neq 0$.

En faisant $x_1=u$, $x_2=v$ et en remplaçant toutes les variables restantes par c, l'équation (E_3) reçoit la forme que voici:

$$(2.8) \quad (m-1)(n-2m)\alpha f(u,v)-m(n-2m)\alpha f(v,u)$$
$$+\{m(n-2m)-1\}\alpha\{f(c,u)-f(u,c)\}+\{(m-1)(n-2m)+1\}\alpha\{f(v,c)-f(c,v)\}$$
$$+f(c,u)f(c,v)-f(v,c)f(u,c)+\alpha^2(n-2m)=0,$$

avec $f(c, c)=\alpha$.

Pour $u=c$, l'équation (2.8) fournit

$$(2.9) \qquad f(v, c)=\alpha,$$

et pour $v=u$

$$(2.10) \qquad f(c, u)=\alpha.$$

Vu les égalités (2.9) et (2.10), l'égalité (2.8) devient

$$(2.11) \quad (m-1)(n-2m)\alpha f(u, v)-m(n-2m)\alpha f(v, u)+\alpha^2(n-2m)=0.$$

Si l'on y permute u et v, on obtient

$$(2.12) \quad m(n-2m)\alpha f(u, v)-(m-1)(n-2m)\alpha f(v, u)+\alpha^2(n-2m)=0.$$

Dans le cas où $m=1$, étant donné que $n-2m \neq 0$, il résulte de (2.11) ce qui suit

$$(2.13) \qquad f(u, v)=\alpha \ (=\text{const}).$$

Si $m \neq 1$, en résolvant le système des équations (2.12) et (2.13) par rapport à $f(u, v)$ et $f(v, u)$, on obtient de nouveau (2.13).

Puisque $f(u, v)=\alpha$ $(=\text{const})$ est en réalité une solution de l'équation (E_3), avec $k=2m$, il résulte que la solution générale de l'équation (E_3), dans la classe C_2 des fonctions f est représentée par (2.13).

3. Équation fonctionnelle (E_4)

L'équation fonctionnelle (0.1), où

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) \\
&= \{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\} \\
&\quad \times \{f(x_{2k}, x_{2k+1})-f(x_{2k+3}, x_{2k+2})+\cdots-f(x_{2n-3}, x_{2n-4}) \\
&\qquad +f(x_{2n-2}, x_{2n-1})\} \text{ pour } n-k=2m+1; \\
&= \{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\} \\
&\quad \times \{f(x_{2k}, x_{2k+1})-f(x_{2k+3}, x_{2k+2})+\cdots+f(x_{2n-4}, x_{2n-3}) \\
&\qquad -f(x_{2n-1}, x_{2n-2})\} \text{ pour } n-k=2m
\end{aligned}
$$

$(u_i \in \{x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2k-1}\}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$; $u_\nu \neq u_\mu$ si $\nu \neq \mu)$,

sera notée: *équation* (E_4).

Relativement à cette équation, nous allons prouver les résultats suivants:

Théorème 3.—*La solution générale de l'équation* (E_4), *avec* $n-k=2m+1$ *est*

$$(3.2)\qquad f(u, v)=g(v)-g(u) \qquad (g, \textit{ fonction arbitraire}).$$

Théorème 4. — *Dans le cas où* $n-k=2m$, *la fonction*

$$(3.3)\qquad f(u, v)=\alpha\, g(v)+\beta\, g(u)$$

(g, *fonction arbitraire;* α, β, *constantes arbitraires*),

représente une solution de l'équation (E_4).

Si $k>1$ *et* $\alpha=-\beta$, *la fonction* (3.3) *est la solution générale de* (E_4) *dans la classe des fonctions* C_1 (*toutes les fonctions pour lesquelles est* $f(u, u)\equiv 0$).

Démonstration du théorème 3. En posant $x_i=u$ $(i=1, 2, \ldots, 2n-1)$ l'équation (E_4), avec $n-k=2m+1$, donne $f(u, u)\equiv 0$.

En remplaçant x_1 et x_{2k+1} par v et toutes les variables restantes par u dans l'équation (E_4), avec $n-k=2m+1$, on obtient

$$(3.4)\qquad f(u, v)\,\{f(u, v)+f(v, u)\}=0.$$

Par permutation des variables u et v, on trouve une nouvelle égalité qui, additionnée membre à membre, avec l'égalité (3.4), conduit a

$$f(u, v)+f(v, u)=0.$$

A partir de la dernière égalité, on peut réduire l'équation (E_4) à celle (E_2) dont la solution générale est

$$f(u, v)=g(v)-g(u).$$

Cette fonction est une solution de (E_4).

Donc, le théorème 3 est ainsi démontré.

Démonstration du théorème 4. En remplaçant x_1, x_2, x_3 par u et toutes les variables restantes par v dans l'équation (E_4), avec $n-k=2m$ $(k>1)$, on obtient

$$\{f(u, v)+f(v, u)-f(u, u)-f(v, v)\}\{f(u, v)-f(u, u)\}=0. \tag{3.5}$$

En permutant u et v, on trouve

$$\{f(v, u)+f(u, v)-f(v, v)-f(u, u)\}\{f(v, u)-f(v, v)\}=0. \tag{3.6}$$

Si l'on ajoute, membre à membre, des égalités (3.5) et (3.6), on parvient à

$$f(u, v)+f(v, u)-f(u, u)-f(v, v)=0.$$

La dernière égalité dans la classe C_1 des fonctions f est

$$f(u, v)+f(v, u)=0,$$

ce qui permet de ramener l'équation (E_4) avec $n-k=2m$ $(k>1)$ et par hypothèse $f(u, u)\equiv 0$, à l'équation (E_2).

Donc, la démonstration du théorème est achevée.

Il reste la question ouverte sur le caractère de généralité de la solution (3.3) de l'équation (E_4), avec $n-k=2m$ dans la classe des fonctions f à propriété $f(u, u)\not\equiv 0$.

Il reste également en suspens la question du caractère de la solution (3.3) de l'équation (E_4) avec $n-k=2m$ et $k=1$, dans la classe C_1 des fonctions f.

4. Généralisations diverses

En connexion avec les équations (E_2), (E_3), (E_4), étudiées plus haut, on peut faire de nombreuses généralisations. Ainsi, par exemple, chacune des fonctions f peut être remplacée par $A_i f$ (A_i une constante qui peut varier d'un terme à l'autre) et proposer alors le problème de résoudre une telle équation fonctionnelle.

L'équation (0.1), où

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) \\ = \{f(x_0, x_1)+f(x_2, x_3)+\cdots+f(x_{2k-2}, x_{2k-1})\} \\ \times\{A_0 f(x_{2k}, u_0)+A_1 f(x_{2k+1}, u_1)+\cdots+A_{n-k-1} f(x_{n-k-1}, u_{n-k-2})\}, \end{aligned}$$

avec $u_i=x_{2n-i-1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-k-1)$, représente un exemple de l'équation en question et sa solution est

$$f(u, v)=g(v)-g(u),$$

mais le caractère de sa généralité n'est pas connu.

Si dans l'équation (E_1) on permute les variables

$$x_i \ (0 \leqslant i \leqslant 2k-1) \text{ et } x_j \ (2k \leqslant j \leqslant 2n-1),$$

on obtient une équation fonctionnelle intéressante, sur laquelle nous n'insisterons pas dans cet article.

RÉFÉRENCE

[1] D. S. Mitrinović et S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 254, 1962, p. 611—613.