SUR UNE GÉNÉRALISATION DES MOYENNES QUASILINÉAIRES

M. Bajraktarević

(Communiqué le 21 juin 1963)

Sommaire. — Définition des moyennes quasilinéaires généralisées. Solution du problème d'égalité, d'homogénéité et des propriétés caractéristiques des moyennes ainsi définies. Liaison avec l'entropie de la théorie des informations.

Soit:

$$1^{\circ} I = [A, B] (-\infty < A < B < +\infty), \qquad P = (0, +\infty);$$

 2° Φ respectivement F l'ensemble de toutes les fonctions continues strictement monotones sur I respectivement de toutes les fonctions nonnégatives dans I différentes de zéro aux points A et B;

 $3^{\circ}M_{\varphi}(p_i, f, t_i)$ la valeur moyenne de $\varphi \in \Phi$ par rapport à $f \in F$ au point $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ pour $(p_1, \ldots, p_n) \in P^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ définie par 1

(1)
$$M_{\varphi}(p_i, f, t_i) = \varphi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i \varphi_i}{\sum_{i=1}^n p_i f_i} \right), \qquad \sum_{i=1}^n f_i > 0;$$

 $4^{\circ} G$ l'ensemble des fonctions en escaliers $\gamma(x)$ ayant les sauts $p_i f_i \left| \sum_{i=1}^n p_i f_i \right|$ aux point $t_i (t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$, définies par

(2)
$$\gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i f_i} \right) E_{t_i}(x), \quad \sum_{i=1}^{n} f_i > 0$$

avec
$$E_t(x) = E(x-t), E(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x).$$

Évidemment on a

(3)
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i} f_{i} \varphi_{i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i} f_{i}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) d[\gamma(x)],$$

Pour simplifier l'écriture on écrira f_i , g_i , φ_i , ψ_i pour $f(t_i)$, $g(t_i)$ $\varphi(t_i)$, $\psi(t_i)$.

l'intégral étant prise dans le sens de Stieltjes, et la moyenne (1) peut être écrite

(4)
$$M_{\varphi}[\gamma] = \varphi^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) d[\gamma(x)] \right\}.$$

 $\varphi(x)$ étant continue strictement monotone dans I, $M_{\varphi}[\gamma]$ est bien définie par (4) pour toutes les $\gamma \in G$ si l'on choisit $\varphi(x)$ en dehors de I tellement que $\varphi(x)$ soit continue strictement monotone pour $-\infty < x < +\infty$, ce qui est permis puisque les valeurs de $\varphi(x)$ pour $x \in I$ n'interviennent pas efectivement dans (4).

L'introduction da la moyenne (1) est justifiée par le fait évident de l'existence d'un seul nombre M tel que

$$\varphi(M) = \frac{\sum pf\varphi}{\sum pf}, \qquad A \leqslant M \leqslant B.$$

Le problème d'égalité des moyennes, c'est-à-dire le problème de donner toutes les transformations des fonctions déterminant la moyenne qui ne change pas sa valeur, est résolu par le

Théorème 1. — Pour qu'il soit pour tous les $n \ge 2$

(5)
$$M_{\varphi}(p_i, f, t_i) = M_{\psi}(p_i, g, t_i),$$

 ψ , $\varphi \in \Phi$; f, $g \in F$; $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ arbitraire; $(p_1, \ldots, p_n) \in P^n$ arbitraire $(n = 2, 3, \ldots)$, il faut et il suffit que les relations

(6)
$$\psi = \frac{a \varphi + b}{c \varphi + d}, \quad g = k f(c \varphi + d), \quad k(c^2 + d^2) (ad - bc) \neq 0$$

soient remplies, a, b, c, d, k étant des constantes arbitraires, $f \in F$ et $\varphi \in \Phi$ deux fonctions arbitraires.

Démonstration. — Par la substitution directe de ψ et g données par (6) dans (5), cette dernière devient une identité. Donc, les conditions sont suffisantes.

Pour en démontrer la nécessité il ne suffit que considérer le cas où n=2, $(t_1, t_2) \in I^2$ arbitraire $(t_1 < t_2)$, $p_1 = x$, $p_2 = 1$, de sorte que (5) devient

$$\varphi^{-1}\left\{\frac{xf_1\,\varphi_1+f_2\,\varphi_2}{xf_1+f_2}\right\}=\psi^{-1}\left\{\frac{x\,g_1\,\psi_1+g_2\,\psi_2}{x\,g_1+g_2}\right\}=t\in I,$$

d'où,

$$\frac{xf_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2}{xf_1 + f_2} = \varphi(t), \quad \frac{xg_1 \psi_1 + g_2 \psi_2}{xg_1 + g_2} = \psi(t),$$

ce qui donne, après l'élimination de x, la première relation (6) avec

(7)
$$\begin{cases} a = f_1 g_2 \psi_2 - f_2 g_1 \psi_1, & b = f_2 \varphi_2 g_1 \psi_1 - f_1 \varphi_1 g_2 \psi_2, \\ c = f_1 g_2 - f_2 g_1, & d = f_2 \varphi_2 g_1 - f_1 \varphi_1 g_2, \\ ad - bc = f_1 f_2 g_1 g_2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\psi_2 - \psi_1) \neq 0. \end{cases}$$

Si c=0, on a $d\neq 0$; si d=0, on a $c\neq 0$. Les constantes a,b,c,d sont indépendentes de $(t_1,t_2)\in I^2$ puisqu'on peut faire $t_1=A,\ t_2=B$.

Des relations (7) on tire d'abord

$$f_1 g_2 = \frac{c \varphi_2 + d}{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad f_2 g_1 = \frac{c \varphi_1 + d}{\varphi_2 - \varphi_1},$$

puis, en divisant,

$$\frac{g_1}{f_1\left(c\,\varphi_1+d\right)}=\frac{g_2}{f_2\left(c\,\varphi_2+d\right)},$$

d'où, (t_1, t_2) étant arbitrairement fixé dans I^2 ,

$$g = kf(c \varphi + d), \quad k \neq 0.$$

Remarque 1. — Le théorème 1 reste valable même dans le cas où le segment [A, B] est remplacé par un intervalle quelconque < A, B> (fini ou infini, fermé, ouvert ou demiouvert) sous la condition de l'existence des suites $A_n \downarrow A$, $B_n \uparrow B$ $(n \to \infty)$ telles que $f(A_n) \cdot f(B_n) \cdot g(A_n) \cdot g(B_n) \neq 0$ (n = 1, 2, ...) avec $A_n = A$ respectivement $B_n = B$ (n = 1, 2, ...) dans le cas où A respectivement B appartient à < A, B>.

Remarque 2. — Dans le cas où $f = g = \text{const} \neq 0$ {[4], pp. 65—67}, (6) est à remplacer par $\psi = a \varphi + b$, $a \neq 0$.

Remarque 3. — Le théorème 1 n'est démontré que pour les moyenes (1) considérées dans leur ensemble par rapport à $n=2,3,\ldots,\ (t_1,\ldots,t_n)\in I^n$ et $(p_1,\ldots,p_n)\in P^n$. C'est pourquoi il ne doit pas nécessairement être valable, p. ex., pour un nombre n arbitrairement fixé ou pour $p_i=C>0$ $(i=1,\ldots,n)$. En effet, dans le cas où $n=2,\ p_1=p_2>0$, toutes les solutions de (5) ne sont pas données par (6) {[3], th. 4; [1], remarque 3}.

La démonstration du th. 1 est beaucoup plus simple et plus courte que les démonstrations des théorèmes correspondants $\{[3], \text{ th. 5}; [1], \text{ th. 1}\}$ se rattachant aux moyennes (1) avec $p_i = 1$ (i = 1, 2, ...). Le théorème 5 dans [3] est démontré pour un entier n > 2 arbitrairement fixé mais sous les conditions exigeant l'existence de la deuxième dérivée.

Remarque 4. — Un cas particulier de l'équation (5) avec $f(t) \equiv c \neq 0$, $p_i = 1$ (i = 1, ..., n; n = 3, 4, ...) a été traité par l'auteur dans [2] sous la condition de l'existence de la deuxième dérivée des foncions φ , ψ et g.

Remarque 5. — Le théorème 1 reste valable même pour tout entier $n \ge 3$ arbitrairement fixé si, toutes les autres conditions du th. 1 supposées remplies, on suppose encore l'existence des dérivées secondes des fonctions f, g, φ, ψ . La démonstration est à la lettre la même que celle du th. 5 dans [3] en y écrivant toujours $p_i f_i$ respectivement $p_i g_i$ à la place de f_i respectivement g_i .

Les propriétés caractéristiques de la moyenne (1) sont données par le

Théorème 2. — Supposons qu'à tout $\gamma \in G$ correspond un nombre réel $M[\gamma]$ et un seul.

Pour qu'il existe un $\varphi \in \Phi$ avec

(8)
$$M[\gamma] = M_{\varphi}[\gamma] = \varphi^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ d\gamma(x) \right\},$$

il faut et il suffit que $M[\gamma]$ satisfasse les conditions:

(i)
$$M[E_{\xi}(x)] = \xi, \ \xi \in I;$$

(ii)
$$\forall x \in I: \gamma_1(x) \geqslant \gamma_2(x), \\ \exists x \in I: \gamma_1(x) > \gamma_2(x), \\ \gamma_1, \ \gamma_2 \in G$$
 $\Rightarrow M[\gamma_1] < M[\gamma_2];$

(iii)
$$\begin{array}{c} M\left[\gamma\right] = M\left[\gamma^*\right]; \\ \gamma, \ \gamma^*, \ \chi \in G; \ t \in (0,1) \end{array} \Rightarrow M\left[t\gamma + (1-t)\chi\right] = M\left[t\gamma^* + (1-t)\chi\right].$$

Démonstration. — Si $f(t) \equiv \text{const} \neq 0$ dans (1), on est dans le cas considéré et démontré dans {[4], pp. 157—162} avec $p_i/\sum p_i = q_i$, $\sum q_i = 1$. Le cas général, ici considéré, se ramène à ce cas particulier en remarquant que le système d'équations

(9)
$$\frac{p_i f_i}{\sum_{i=1}^n p_i f_i} = q_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

avec $q_i > 0$, $\sum q_i = 1$, qui peut être écrit sous la forme d'un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux p_i f_i au déterminant nul du système, admet toujours une solution pas triviale; que, inversement, les q_i sont bien définis par (9) et que, finalement, l'ensemble G des fonctions $\gamma(x)$ correspondant à une fonction quelconque $f \in F$ est le même que l'ensemble G_1 des fonctions $\gamma(x)$ correspondant à $f \equiv \text{const} \neq 0$.

Théorème 3. — Si la valeur moyenne (1) satisfait à la condition d'homogénéité

(10)
$$M_{\varphi}(p_i, f, \lambda t_i) = \lambda M_{\varphi}(p_i, f, t_i)$$

pour tout λ , t_i , $\lambda t_i \in I$ (i = 1, ..., n) et pour tout $(p_1, ..., p_n) \in P^n$ (n = 2, 3, ...), lorsque $1 \in I$, $\varphi \in \Phi$ et que $f \in F$ est une fonction continue qui ne s'annule pas identiquement dans aucun sousintervalle $(a, b) \subset I$ (a < b), alors:

(11)
$$M_{\varphi}(p_i, f, t_i) = \left\{ \frac{\left| \sum_{i=1}^n p_i | t_i|^{\alpha} \operatorname{sgn} t_i \right|}{\sum_{i=1}^n p_i | t_i|^{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\alpha - \beta}} \cdot \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^n p_i | t_i|^{\alpha} \operatorname{sgn} t_i\right)$$

$$\alpha > \beta > 0$$
, $I \subset (-\infty, +\infty)$;

οù

(12)
$$M_{\varphi}(p_i, f, t_i) = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i, t_i^{\beta} \ln t_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\beta}}\right\}, I \subset (0, +\infty),$$

ou

(13)
$$M_{\varphi}(p_i, f, t_i) = \exp\left\{\frac{1}{\alpha} \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i t_i^{\beta} \sin(\alpha \ln t_i)}{\sum_{i=1}^n p_i t_i^{\beta} \cos(\alpha \ln t_i)}\right), \alpha \neq 0, I \subseteq \left(e^{-\frac{\pi}{2\alpha}}, e^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right),\right\}$$

où α, β sont des constantes arbitraires.

Dans les trois cas le segment I doit être remplacé par l'intervalle correspondant $[(-\infty,+\infty),\ (0,+\infty)$ respectivement $(e^{-\frac{\pi}{2\alpha}},\ e^{\frac{\pi}{2\alpha}})]$ qui le contient. Si dans (11) on n'exige pas la continuité de $f(t)=|t|^{\beta}$ pour t=0, la condition $\beta>0$ est à supprimer. Lorsque I est remplacé par $(0,+\infty)$, alors (11) prend la forme plus simple

(14)
$$M_{\varphi}(p_i, f, t_i) = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\alpha - \beta}}, \quad \alpha > \beta.$$

Démonstration. — En introduisant — λ étant, pour le moment, fixe — les notations

(15)
$$\psi(t) = \varphi(\lambda t), \quad g(t) = f(\lambda t),$$

(10) devient (5), d'où, d'après le théorème 1, on obtient le système d'équations fonctionnelles

(16)
$$\begin{cases} \varphi(\lambda t) = \psi(t) = \frac{a(\lambda) \varphi(t) + b(\lambda)}{c(\lambda) \varphi(t) + d(\lambda)}, \\ f(\lambda t) = g(t) = k(\lambda) f(t) [c(\lambda) \varphi(t) + d(\lambda)], \\ k(\lambda) [c^{2}(\lambda) + d^{2}(\lambda)] [a(\lambda) d(\lambda) - b(\lambda) c(\lambda)] \neq 0 \end{cases}$$

équivalent à (10). Les seules solutions {v. [1], §§ 3—5} du système (16), abstraction faite de la transformation (6) (qui ne change pas la valeur de la moyenne), sont données par un (quelconque) des systèmes suivants:

(17)
$$f(t) = |t|^{\beta}, \quad \varphi(t) = |t|^{\alpha-\beta} \operatorname{sgn} t, \quad \alpha > \beta > 0, \quad I \subset (-\infty, +\infty);$$

(18)
$$f(t) = t^{\beta}, \quad \varphi(t) = \ln t, \quad I \subset (0, +\infty);$$

(19)
$$f(t) = t^{\beta} \cos{(\alpha \ln t)}, \quad \varphi(t) = \operatorname{tg}(\alpha \ln t), \quad t \in I \subset \left(e^{-\frac{\pi}{2\alpha}}, e^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right), \quad \alpha \neq 0,$$

d'où résultent, d'après le théorème 1, les seules moyennes homogènes (11), (12) et (13) de la forme (1).

Il est évident que *I*, étant arbitraire abstraction faite des restrictions de ci-dessus, peut être remplacé respectivement par les intervalles $(-\infty, +\infty)$, $(0, +\infty)$, $\left(e^{-\frac{\pi}{2\alpha}}, e^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right)$. Aussi est-il évident que la restriction $\beta > 0$ dans (17) est à supprimer lorsque la continuité de $f(t) = |t|^{\beta}$ au point t = 0 n'est pas exigée.

Ainsi le théorème est démontré.

Les moyennes (11) (respectivement (14)), (12) et (13) satisfont — on le vérifie facilement par substitution — non seulement l'équation d'homogénéité (10), mais aussi sa généralisation²

$$M_{\varphi}(p_{i} q_{j}, f, t_{i} \tau_{j}) \equiv \varphi^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{i} q_{j} f(t_{i} \tau_{j}) \varphi(t_{i} \tau_{j})}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{i} q_{j} f(t_{i} \tau_{j})} \right\}$$

$$= \varphi^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i} f(t_{i}) \varphi(t_{i})}{\sum_{i=1}^{n} p_{i} f(t_{i})} \right\} \cdot \varphi^{-1} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{m} q_{j} f(\tau_{j}) \varphi(\tau_{j})}{\sum_{j=1}^{m} q_{j} f(\tau_{j})} \right\} \equiv M_{\varphi}(p_{i}, f, t_{i}) \cdot M_{\varphi}(q_{j}, f, \tau_{j})$$

qui dans le cas particulier où $\tau_1 = \cdots = \tau_m$ se réduit à (10). Ça veut dire que les logarithmes des moyennes (14), (12) et (13) multipliés par -1

(21)
$$J_{\alpha,\beta}(p_i, t_i) = -\frac{1}{\alpha - \beta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\beta}}, \quad \alpha \neq \beta,$$

(22)
$$J_{\beta,\beta}(p_{i}, t_{i}) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i} t_{i}^{\beta} \ln t_{i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i} t_{i}^{\beta}},$$

(23)
$$J_{\beta}^{\alpha}(p_i, t_i) = -\frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\beta} \sin(\alpha \ln t_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^{\beta} \cos(\alpha \ln t_i)}, \quad \alpha \neq 0$$

satisfont l'équation

(24)
$$J(p_i q_j, t_i \tau_j) = J(p_i, t_i) + J(q_j, \tau_j)$$

déduite de (20) en prenant les logarithmes de ses deux membres.

L'équation (24) est une généralisation d'une équation importante de la théorie des informations représentant l'addivité de l'entropie²

(25)
$$J(t_i \tau_j) = J(t_i) + J(\tau_j)$$

et se déduisant de (24) en prenant $p_i = q_j = 1$ (i = 1, ..., n; j = 1, ..., m; m = n = 2, 3, ...).

Les généralisations

(26)
$$J_{\alpha}(p_{i}, t_{i}) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i} t_{i}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i} t_{i}}, \quad \alpha \neq 1;$$

² Pour le cas où $p_i = q_i = 1$ (i = 1, ..., n; n = 2, 3, ...) v. [1], § 6.

(27)
$$J_{1}(p_{i}, t_{i}) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i} t_{i} \ln t_{i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i} t_{i}}$$

correspondant respectivement aux deux entropies employées jusqu'a présent²

(28)
$$J_{\alpha}(t_{i}) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\sum_{i=1}^{u} t_{i}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} t_{i}}, \quad \alpha \neq 1;$$

(29)
$$J_{1}(t_{i}) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i} \ln t_{i}}{\sum_{i=1}^{n} t_{i}}$$

ne sont que des cas particuliers ($\beta = 1$) de (21) et (22):

(30)
$$J_{\alpha}(p_i, t_i) = J_{\alpha, 1}(p_i, t_i), \quad J_{1}(p_i, t_i) = J_{1, 1}(p_i, t_i).$$

Entre (26) [(27)] et (21) [(22)] existent les relations

(31)
$$J_{\alpha,\beta}(p_i,t_i) = \frac{1}{\beta} J_{\frac{\alpha}{\beta}}(p_i,t_i^{\beta}), \quad J_{\beta,\beta}(p_i,t_i) = \frac{1}{\beta} J_{1}(p_i,t_i^{\beta}),$$

lesquelles contiennent (30).

On a aussi les relations

$$J_{lpha,\,eta}\left(p_{i},\,t_{i}
ight) = (eta - lpha)^{-1}\left[\left(1 - lpha
ight)J_{lpha}\left(p_{i},\,t_{i}
ight) + \left(eta - 1
ight)J_{eta}\left(p_{i},\,t_{i}
ight)
ight], \qquad lpha
eq eta; \ J_{eta,\,eta}\left(p_{i},\,t_{i}
ight) = \lim_{lpha
ightarrow eta}J_{lpha,\,eta}\left(p_{i},\,t_{i}
ight).$$

En effet, la première étant facile á démontrer, on a

$$\lim_{\alpha \to \beta} J_{\alpha,\beta}(p_i, t_i) = -\frac{d}{d\beta} \left(\ln \sum_{i=1}^n p_i t_i^{\beta} \right) = J_{\beta,\beta}(p_i, t_i).$$

Cela signifie que (11) tend vers (12) lorsque $\alpha \rightarrow \beta$.

Les formules (26) et (27), en posant $q_i = p_i t_i$, peuvent être écrites dans la forme

$$J_{\alpha}(p_{i}, t_{i}) = -\ln 2 \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \log_{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (q_{i}^{\alpha} / p_{i}^{\alpha - 1})}{\sum_{i=1}^{n} q_{i}} = -J_{\alpha}(Q \mid P) \ln 2$$

respectivement

$$J_{1}(p_{i}, t_{i}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i} \log_{2}(q_{i}/p_{i})}{\sum_{i=1}^{n} q_{i}} \ln 2 = -J_{1}(Q \mid P) \ln 2,$$

où $J_{\alpha}(Q \mid P)$ respectivement $J_{1}(Q \mid P)$ représente (v. [5]) "l'information d'ordre α respectivement d'ordre 1 obtenue lorsque la distribution $P = (p_{1}, \ldots, p_{n})$ est remplacée par la distribution $Q = (q_{1}, \ldots, q_{n})$ ".

En posant $Q_1 = (p_1 t_1^{\beta}, \ldots, p_n t_n^{\beta})$ les relations (31) peuvent être écrites sous la forme des égalités

$$J_{\alpha,\beta}(p_i, t_i) = -\frac{\ln 2}{\beta} J_{\frac{\alpha}{\beta}}(Q_1 | P),$$

$$J_{\beta,\beta}(p_i, t_i) = -\frac{\ln 2}{\beta} J_1(Q_1 \mid P).$$

Par conséquent l'équation (24) est l'équation qui exprime une propriété importante, addivité, de l'information.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Aczél und Z. Daróczy: Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. Publ. Math. Debrecen 10, 1963. Sous presse.
- [2] M. Bajraktarević: Sur certaines solutions de deux équations fonctionnelles. Bulletin de la Sociéte des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, Beograd, 6, (1954), 173 185.
- [3] M. Bajraktarević: Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. Glanik mat.-fiz. i astr., Zagreb, 13, (1958), 243 248.
- [4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities. Cambridge, 1952.
- [5] A. Rényi: On measures of entropy and information. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability 1960. I. Berkeley, 1961, 547 561.