PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 61–68.

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE. X.

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

(Communiqué le 10 mai 1963)

Cette Note développe et complète des résultats obtenus dans l'article [1]. Les fonctions qu'on considère dans cette Note sont continues et differéntiables.

1. Si l'équation différentielle[1]

$$x\,[a_1 x^p y^q + f(x^r y^s)]\,\mathrm{d}y + y\,[a_2 x^p y^q + g(x^r y^s)]\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.1}$$

a un facteur intégrant de la forme

$$W = F(xy)\,G(x^r y^s), \tag{1.2}$$

les fonctions F et G doivent satisfaire à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} xy\frac{F'}{F}\{(a_1-a_2)x^p y^q + f - g\} + x^r y^s \frac{G'}{G}\{(ra_1-sa_2)\,x^p y^q + rf - sg\} \\ + [a_1(p+1)-a_2(q+1)]\,x^p y^q + f - g + (rf'-sg')\,x^r y^s = 0 \\ \left(F' \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}(xy)}, \quad G' \equiv \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}(x^r y^s)}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans l'équation (1.3) les variables se séparent si l'on admet, par exemple,

$$ra_1 - sa_2 = 0. \tag{1.4}$$

En posant

$$xy\frac{F'}{F} = \frac{r(q+1)-s(p+1)}{s-r} \qquad (s \neq r),$$

l'équation (1.3) devient

$$x^r y^s \frac{G'}{G} = \frac{sp-qr}{s-r}\,\frac{f-g}{rf-sg} - \frac{rf'-sg'}{rf-sg}\,x^r y^s \qquad (rf-sg \neq 0).$$

Ainsi, le facteur intégrant de l'équation (1.1), suivie de la condition (1.4), est

$$W = \frac{(xy)^\lambda}{rf-sg}\exp\left\{\frac{sp-qr}{s-r}\int\frac{f-g}{rf-sg}\,\mathrm{d}\log(x^r y^s)\right\}, \tag{1.5}$$

avec

$$\lambda = \frac{r(q+1)-s(p+1)}{s-r}.$$

Le cas où $s=r$ a été déjà considéré dans [1].

[1] Pour abréger l'écriture, dans plusieurs endroits, au lieu de $f(x)$, $F(x)$... sera imprimé respectivement f, F,...

Si $rf-sg\equiv 0\,(ra_1-sa_2=0,$ ou $ra_1-sa_2\neq 0)$, on peut poser

$$xy\frac{F'}{F}=-1$$

et l'on obtient alors

$$x^r y^s\frac{G'}{G}(ra_1-sa_2)+a_1p-a_2q=0.$$

Dans ce cas, un facteur intégrant de l'équation (1.1) est

$$W=\frac{1}{xy}(x^r y^s)^{(a_2q-a_1p)/(a_1r-a_2s)}.$$

Il serait aussi intéressant de trouver d'autres cas dans lesquels les variables se séparent, en dehors de ceux indiqués plus haut.

Dans quelques cas on peut prendre comme facteur intégrant de l'équation (1.1) une fonction de la forme suivante:

$$W=x^\lambda y^\mu F(x^{a_2}y^{a_1}).$$

Le facteur cherché doit alors vérifier l'équation suivante

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad x^{a_2}y^{a_1}\frac{F'}{F}(a_2f-a_1g)+x^py^q[(\lambda+p+1)\,a_1-(\mu+q+1)\,a_2]&\\+(\lambda+1)f-(\mu+1)\,g+x^ry^s(rf'-sg')&=0.\end{aligned}$$

Dans le cas où l'on a, par exemple,

$$\frac{x^ry^s(rf'-sg')+qg-pf}{a_2f-a_1g}=k\qquad(k=\text{const}),$$

si l'on pose dans (1.6)

$$\lambda=-p-1,\quad \mu=-q-1,$$

on obtient

$$W=x^{-p-1}y^{-q-1}(x^{a_2}y^{a_1})^{-k}$$

comme facteur intégrant de l'équation (1.1).

2. La recherche d'un facteur intégrant de l'équation

$$(2.1)\qquad x[a_1x^py^q+b_1x^ry^s+f(xy)]\,\mathrm{d}y+y[a_2x^py^q+b_2x^ry^s+g(xy)]\,\mathrm{d}x=0$$

dans le cas où ce facteur possède la forme

$$(2.2)\qquad W=F(xy)\;G(x^2y)\;H(xy^2),$$

conduit à l'égalité suivante

$$\begin{aligned}(2.3)\qquad & xy\frac{F'}{F}\{(a_1-a_2)\,x^py^q+(b_1-b_2)\,x^ry^s+f-g\}\\&+x^2y\frac{G'}{G}\{(2a_1-a_2)\,x^py^q+(2b_1-b_2)\,x^ry^s+2f-g\}\\&+xy^2\frac{H'}{H}\{(a_1-2a_2)\,x^py^q+(b_1-2b_2)\,x^ry^s+f-2g\}\\&+[a_1(p+1)-a_2(q+1)]\,x^py^q\\&+[b_1(r+1)-b_2(s+1)]\,x^ry^s+f-g+xy\,(f'-g')=0\end{aligned}$$

$$\left(F' \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}(xy)}, \qquad G' \equiv \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}(x^2y)}, \qquad H' \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}(xy^2)}\right).$$

Si l'on a, par exemple,

(2.4) $$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad p-q = r-s$$

on peut trouver les fonctions F, G, H satisfaisant à l'égalité (2.3).

En effet, si l'on pose

(2.5) $$x^2y\frac{G'}{G} = -p, \quad xy^2\frac{H'}{H} = -q$$

et met à profit les conditions (2.4), l'égalité (2.3) devient

(2.6) $$(f-g)\,xy\frac{F'}{F} = (2p+q-1)f + (-p-2q+1)g - xy(f'-g').$$

Grâce aux égalités (2.5) et (2.4), on obtient

(2.7) $$W = \frac{x^{-q-2p}y^{-2q-p}}{f-g}\exp\int\frac{(2p+q-1)f+(-p-2q+1)g}{f-g}\,\mathrm{d}\log(xy),$$

qui est un facteur intégrant de l'équation (2.1), suivie des conditions (2.4).

Le cas $f \equiv g$ est fort simple et c'est pourquoi il est omis.

3. Si l'équation

(3.1) $$x(a_1x^p + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1)\,\mathrm{d}y + y(a_2x^p + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2)\,\mathrm{d}x = 0$$

possède un facteur intégrant de la forme

(3.2) $$W = F(x^2y)\,G(xy^2)\,H\left(\frac{y}{x}\right),$$

on doit avoir

(3.3) $$\begin{aligned} & x^2y\frac{F'}{F}\{(2a_1-a_2)x^p + (2b_1-b_2)x^2y + (2c_1-c_2)xy^2 + 2d_1-d_2\} \\ & + xy^2\frac{G'}{G}\{(a_1-2a_2)x^p + (b_1-2b_2)x^2y + (c_1-2c_2)xy^2 + d_1-2d_2\} \\ & - \frac{y}{x}\frac{H'}{H}\{(a_1+a_2)x^p + (b_1+b_2)x^2y + (c_1+c_2)xy^2 + d_1+d_2\} \\ & + [a_1(p+1)-a_2]x^p + (3b_1-2b_2)x^2y + (2c_1-3c_2)xy^2 + d_1-d_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(F' \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}(x^2y)}, \qquad G' \equiv \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}(xy^2)}, \qquad H' \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}(y/x)}\right).$$

De là, on peut déterminer les fonctions F, G, H si, par exemple, on admet

(3.4) $$a_1 = 2a_2, \quad b_1 = 2b_2, \quad p = \frac{3}{2}.$$

En faisant

(3.5) $$x^2y\frac{F'}{F} = -1, \quad \frac{y}{x}\frac{H'}{H} = \frac{1}{3},$$

et, en utilisant (3.4), l'équation (3.3) se ramène à

(3.6) $$xy^2\frac{G'}{G} = \frac{(c_1+7c_2)xy^2 + 4d_1 + d_2}{3[(c_1-2c_2)xy^2 + d_1 - 2d_2]}.$$

Les équations (3.5) et (3.6) donnent les fonctions cherchées F, G, H.

Dans l'équation (3.3) les variables se séparent aussi si l'on a, par exemple,

$$a_2=2a_1, \quad c_2=2c_1, \quad p=-3, \tag{3.7}$$

ou

$$a_1=-a_2, \quad b_1=-b_2, \quad c_1=-c_2, \quad p=3. \tag{3.8}$$

Dans le cas (3.7), les équations

$$xy^2\frac{G'}{G}=-\frac{1}{3}, \qquad \frac{y}{x}\frac{H'}{H}=-1, \qquad x^2y\frac{F'}{F}=-\frac{(11b_1-b_2)x^2y+5d_1+2d_2}{3[(2b_1-b_2)x^2y+2d_1-d_2]}$$

et dans le cas (3.8) les équations

$$x^2y\frac{F'}{F}=-\frac{2}{3}, \qquad xy^2\frac{G'}{G}=-1, \qquad \frac{y}{x}\frac{H'}{H}=\frac{5d_2-4d_1}{3(d_1+d_2)},$$

donnent les fonctions cherchées F, G, H.

4. Considérons maintenant l'équation différentielle suivante

$$x\left\{f(x^ry^s)+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{p_i}y^{q_i}\right\}dy+y\left\{g(x^ry^s)+\sum_{i=1}^{n}b_ix^{p_i}y^{q_i}\right\}dx=0 \tag{4.1}$$

qui est une généralisation de l'équation (1.1).

Nous allons examiner dans quels cas l'équation (4.1) possède un facteur intégrant de la forme

$$W=x^\lambda y^\mu F(x^ry^s). \tag{4.2}$$

Si W est un facteur intégrant, la condition suivante doit être remplie:

$$\begin{aligned} x^ry^s\frac{F'}{F}&\left\{\sum_{i=1}^{n}(ra_i-sb_i)x^{p_i}y^{q_i}+rf-sg\right\}\\ &+\sum_{i=1}^{n}[a_i(p_i+\lambda+1)-b_i(q_i+\mu+1)]\,x^{p_i}y^{q_i}+(rf'-sg')x^ry^s+\lambda f-\mu g=0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Si l'on a, par exemple,

$$ra_i=sb_i, \quad sp_i-rq_i=k \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n;\ k \text{ constante quelconque}), \tag{4.4}$$

l'équation différentielle (4.3), pour $\lambda=r-1-\frac{k}{s}$, $\mu=s-1$, a pour solution

$$F=\frac{1}{rf-sg}\exp\int\frac{s^2g-(rs-k)f}{s(rf-sg)}\,d\log(x^ry^s) \qquad (rf-sg\neq 0,\ s\neq 0). \tag{4.5}$$

Donc, sous l'hypothèse (4.4), l'équation (4.1) a pour facteur intégrant

$$W=\frac{x^{r-1-k/s}y^{s-1}}{rf-sg}\exp\int\frac{s^2g-(rs-k)f}{s(rf-sg)}\,d\log(x^ry^s) \qquad (rf-sg\neq 0,\ s\neq 0). \tag{4.6}$$

Dans le cas où $s=0$, les variables dans l'équation (4.3) se séparent si l'on pose $\mu=-\frac{r-k}{r}$ $(r\neq 0)$. Le cas où $r=s=0$ a été considéré dans [2] et [3].

Le cas où $f\equiv g\equiv 0$ est très intéressant et il a été déjà considéré dans les articles [2] et [3].

5. Si l'on cherche un facteur intégrant de l'équation

$$x\{f(x^p y^q)+F(x^r y^s)\}\,dy+y\{g(x^p y^q)+G(x^r y^s)\}\,dx=0 \tag{5.1}$$

ayant la forme suivante

$$W=\theta(x^p y^q)\;\varphi(x^r y^s), \tag{5.2}$$

on est amené à résoudre l'équation indéterminée suivante

$$\begin{gathered} x^p y^q \frac{\theta'}{\theta}(pf+pF-qg-qG)+x^r y^s \frac{\varphi'}{\varphi}(rf+rF-sg-sG) \\ +f-g+x^p y^q(pf'-qg')+F-G+x^r y^s(rF'-sG')=0 \\ \left(\theta'\equiv\frac{d\,\theta}{d\,(x^p y^q)},\quad \varphi'\equiv\frac{d\,\varphi}{d\,(x^r y^s)}\right). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Si l'on a, par exemple,

$$pF-qG\equiv 0,\quad rf-sg\equiv 0, \tag{5.4}$$

d'après (5.3) un facteur intégrant est détérminé par

$$\frac{\theta'}{\theta}+\frac{s-r}{sp-qr}\,x^{-p}y^{-q}+\frac{f'}{f}=0,$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{q-p}{rq-sp}\,x^{-r}y^{-s}+\frac{F'}{F}=0.$$

Ces deux égalités donnent θ et φ; il suit de là qu'un facteur intégrant de l'équation (5.1), où l'on a (5.4), est

$$W=\frac{1}{xyf\cdot F}. \tag{5.5}$$

6. Envisageons l'équation différentielle

$$x\{ax^p y^q+f(x^2+cy^2)\}\,dy+y\{bx^r y^s+g(x^2+cy^2)\}\,dx=0. \tag{6.1}$$

Si l'on cherche un facteur intégrant de l'équation (6.1) de la forme

$$W=F(y)\;G(x^2+cy^2), \tag{6.2}$$

on arrive à la condition suivante que doivent satisfaire les fonctions F et G:

$$\begin{gathered} -\frac{F'}{F}(bx^r y^{s+1}+yg)+2\frac{G'}{G}(ax^{p+2}y^q-bcx^r y^{s+2}+x^2 f-cy^2 g) \\ +a(p+1)x^p y^q-b(s+1)x^r y^s+f-g-2cy^2 g'+2x^2 f'=0 \\ \left(F'\equiv\frac{dF}{dy},\quad G'\equiv\frac{dG}{d(x^2+cy^2)}\right). \end{gathered} \tag{6.3}$$

Dans l'équation (6.3) les variables se séparent si l'on a, par exemple,

$$p=-1,\quad r=1,\quad q=s+2,\quad a=bc,\quad f\equiv -g. \tag{6.4}$$

Dans ce cas, en faisant

$$\frac{F'}{F}=-(s+1)\,y^{-1},$$

de (6.3) on obtient

$$2(x^2+cy^2)f\frac{G'}{G}+(1-s)f+2(x^2+cy^2)f'=0.$$

Donc, si la condition (6.4) est remplie, l'équation (6.1) a pour facteur intégrant

(6.5) $$W=(x^2+cy^2)^{(s-1)/2}y^{-s-1}f^{-1}.$$

7. Nous allons déterminer à présent les conditions sous lesquelles l'équation différentielle

(7.1) $$f(x,y)\,\mathrm{d}x+g(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

a un facteur intégrant de la forme

(7.2) $$W=F(u)\,G(v),$$

u et v désignant des fonctions des x et y.

Dans ce cas, on a

$$g_x-f_y\equiv\frac{F'}{F}(fu_y-gu_x)+\frac{G'}{G}(fv_y-gv_x)\qquad\left(F'\equiv\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u},\ G'\equiv\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}v}\right).$$

Donc, l'équation (7.1) aura un facteur intégrant de la forme (7.2), si l'on a

$$g_x-f_y=(u_yf-u_xg)\,U+(v_yf-v_xg)\,V,$$

U étant une fonction de u et V une fonction de v.

8. Dans le Traité de Kamke, on trouve plusieurs équations des types considérés plus haut qu'on peut résoudre par la méthode indiquée dans [1]. Dans ce Traité ces équations sont résolues par application de plusieurs méthodes différentes. Ce sont, par exemple, les équations suivantes: 1.87; 1.119; 1.236; 1.254; 1.257; 1.260; 1.261; 1.293; 1.302; 1.303; 1.324; 1.332; 1.329; 1.367, etc.

Par la méthode, appliquée dans cet article, on peut aussi intégrer certaines équations différentielles qu'on ne trouve pas dans le Traité de Kamke. En voici quelques exemples.

1° L'équation d'Abel

(8.1) $$x\cdot x^p\,\mathrm{d}y+y\,(rx^p+a_0+a_1x^ry+a_2x^{2r}y^2)\,\mathrm{d}x=0$$

est de la forme (1.1). Étant donné que le condition (1.4) est remplie, il existe, pour $r\neq 1$, un facteur intégrant

(8.2) $$W=\frac{1}{yx^{1+p}\,(a_0+a_1x^ry+a_2x^{2r}y^2)}$$

de l'équation (8.1).

Dans le cas où $r=1$, d'après (2.1) et (2.7), un facteur intégrant de l'équation (8.1) est aussi la fonction (8.2).

2° L'équation différentielle

(8.3) $$x\,\{x^3y-x^2+4-\log^{-1}(xy)\}\,\mathrm{d}y+y\,\{x^3y-x^2+6-\log^{-1}(xy)\}\,\mathrm{d}x=0$$

a la forme (2.1). D'après (2.4) et (2.7) son facteur intégrant est

$$W = x^{-7} y^{-5} \log (xy);$$

3° L'équation

$$(8.4) \qquad x(2x^{3/2} + 2x^2 y + 2xy^2 + 1)\,dy + y(x^{3/2} + x^2 y + xy^2 - 4)\,dx = 0$$

appartient au type (3.1). On voit, d'après (3.4) et (3.6), qu'un facteur intégrant de l'équation (8.4) est

$$W = x^{-5/3} y^{-2/3} \exp \frac{xy^2}{3};$$

4° L'équation

$$(8.5) \qquad x\left(e^{x^2 y} + x^3 y^3 - x^{-3} + \frac{y}{x}\right) dy + y\left(2x^3 y^3 - 2x^{-3} + 2\frac{y}{x}\right) dx = 0$$

qui entre dans la classe des équations (4.1), d'après (4.4) et (4.6), possède comme facteur intégrant

$$W = x^{-1} y^{-5/2} \exp(-x^2 y);$$

5° Pour l'équation du type (5.1)

$$(8.6) \qquad x(\sin xy + xy^2 - 1)\,dy + y\left(\frac{1}{2}\sin xy + xy^2 - 1\right) dx = 0$$

les conditions (5.2) sont remplies. On obtient de (5.5) que le facteur intégrant est

$$W = \frac{1}{(x^2 y^3 - xy)\sin xy};$$

6° Étant donné que l'équation différentielle

$$(8.7) \qquad x(x^{-1} y^3 + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy + y(xy - \sqrt{x^2 + y^2})\,dx = 0$$

appartient au type (6.1), et satisfait aux conditions (6.4), son facteur intégrant est

$$W = \frac{1}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

9. L'équation différentielle

$$(9.1) \qquad x[F(x^p y^q) + G(x^r y^s)]\,dy + y[f(x^p y^q) + g(x^r y^s)]\,dx = 0 \qquad (ps - qr \neq 0)$$

par le changement des variables

$$x^p y^q = u, \quad x^r y^s = v$$

devient

$$(9.2) \qquad u\big[p\big(F(u) + G(v)\big) - q\big(f(u) + g(v)\big)\big]\,dv$$
$$+ v\big[s\big(f(u) + g(v)\big) - r\big(F(u) + G(v)\big)\big]\,du = 0.$$

Quelques cas d'intégrabilité de l'équation (9.2) peuvent conduire à des cas d'intégrabilité de l'équation (9.1). En voici quelques cas possibles:

1° Dans le cas où $f(u)$, $g(u)$, $F(u)$, $G(u)$ sont des fonctions homogènees du même degré, l'équation (9.2) s'intègre dans le cas général. De là, l'équation (9.1) a la même propriété.

2° Si

$$pF(u)-qf(u)=Au^k, \quad sf(u)-rF(u)=B \qquad (A,\ B=\text{const}),$$

ou bien

$$(9.3) \qquad f(u)=\frac{Aru^k+Bp}{ps-qr}, \qquad F(u)=\frac{Asu^k+Bq}{ps-qr} \qquad (ps-qr\neq 0)$$

l'équation (9.2) se ramène à une équation de Bernoulli. Donc, dans le cas où l'on a (9.3), l'équation (9.1) peut être intégrée.

L'équation (9.1) est également intégrable si l'on a:

$$sg(v)-rG(v)=Av^k, \quad pG(v)-qg(v)=B \qquad (A,\ B=\text{const}),$$

car dans ce cas l'équation (9.2) se ramène aussi à une équation de Bernoulli.

3° Si l'on a

$$\frac{p\,[F(u)+G(v)]-q\,[f(u)+g(v)]}{s\,[f(u)+g(v)]-r\,[F(u)+G(v)]}=A_0(v)+A_1(v)\,u+\cdots+A_n(v)\,u^n,$$

pour l'intégration de l'équation (9.2) peuvent être utilisés certains cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati (dans le cas où $n=2$) ou de l'équation d'Abel (dans le cas où $n=3$). Si $n=1$, l'équation (9.2) est une équation linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović: *Compléments au Traité de Kamke.* Note I. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 58 (1956), p. 58 — 60.

[2] D. S. Mitrinović: *Compléments au Traité de Kamke.* Note IV. Glasnik matemat̆cko-fizički i astronomski, série II. t. 11, Zagreb 1956, p. 7 — 10.

[3] D. Perčinkova — V'čkova: *Compléments au Traité de Kamke.* Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje, Section des sciences naturelles, t. 10 (1957), № 2, p. 39 — 42.