PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 75—80.

SUR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS CONTINUES MONOTONES DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $\varphi(x)+\varphi[f_\varphi(x)]=F(x)$

Mahmud Bajraktarević

(Reçu le 21. XII 1962)

L'objet de la présente note est la démonstration de l'existence des solutions continues monotones non décroissantes dans $[a, b]$ de l'équation fonctionnelle (2) sous des conditions déterminées. L'équation (2) est une généralisation de l'équation

$$\varphi(x)+\varphi[\varphi(x)]=F(x),$$

considérée par l'auteur dans [2]. L'équation plus générale

$$\varphi[\varphi(x)]=g(x, \varphi(x))$$

a été considérée par *M. Kuczma* [3] mais sous des conditions tout à fait différentes et avec des résultats différents. L'équation (2) est encore une généralisation de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x)+\varphi[f(x)]=F(x),$$

étudiée antérieurement par *M. Kuczma* [4] et par l'auteur [1].

1. Résultats

Dans cette note Φ désignera l'ensemble de toutes les fonctions φ continues monotones non décroissantes dans $I=[a, b]$ telles que

$$\varphi(x)>x \quad (a\leqslant x<b), \quad \varphi(b)=b;$$

Ψ désignera l'ensemble de toutes les fonctions f continues, monotones non décroissantes dans I, telles que

$$f(x)\geqslant x \quad (a\leqslant x<b), \quad f(b)=b;$$

les itérées successives d'une fonction $\varphi\in\Phi$ seront désignées par

$$\varphi^\circ(x)=x, \quad \varphi^{k+1}(x)=\varphi[\varphi^k(x)] \qquad (k=0, 1, 2, \ldots; \ x\in I; \ \varphi\in\Phi);$$

finalement, on posera

$$(1)\qquad f_\varphi(x)=f_1\{\varphi^{\lambda_1}[f_2\{\varphi^{\lambda_2}[\cdots[f_r\{\varphi^{\lambda_r}(x)\}]\cdots]\}]\}\ \left(\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu>0,\ \lambda_\nu\geqslant 0;\quad f_\nu\in\Psi,\ \varphi\in\Phi\right).$$

Il est évident que $f_\varphi\in\Phi$.

Théorème I. — *Pour que l'équation fonctionnelle*

$$(2)\qquad \varphi(x)+\varphi[f_\varphi(x)]=F(x),$$

où $f_\varphi(x)$ *est définie par* (1) *et* $F(x)$ *est une fonction donnée continue dans* I, *admette une solution* $\varphi\in\Phi$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

1° *la série*

$$(3)\qquad A\varphi(x)\equiv\frac{1}{2}F(b)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{F[f_\varphi^k(x)]-F(b)\}\qquad(\varphi\in\Phi,\ x\in I)$$

est convergente;

2° $\varphi=\varphi(x)$ $(\varphi\in\Phi,\ x\in I)$ *est une solution de l'équation fonctionnelle*

$$(4)\qquad \varphi=A\varphi.$$

On suppose les $f_\nu\in\Psi$ $(\nu=1,\ldots,r)$ *connues.*

Théorème II. — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue dans* I *et* f_φ *définie par* (1). *Si la série* (3) *est sommable* T *avec la somme* $\varphi\in\Phi$, *où* T *est une matrice*

$$T=(a_{kn})=\left\|\begin{matrix}a_{00} & a_{01} & \ldots\\ a_{10} & a_{11} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{matrix}\right\|$$

dont les éléments satisfont aux conditions

$$(\mathrm{i})\qquad a_{kn}\to 0\qquad(k\to\infty,\ n\geqslant 0),$$

$$(\mathrm{ii})\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{k\nu}|<K\qquad(k\geqslant 0,\ K\ \textit{fixe}),$$

$$(\mathrm{iii})\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_{kn}=A_k\to 1\qquad(k\to\infty),$$

φ *est une solution de* (2).

On suppose les $f_\nu\in\Psi\,(\nu=1,\ldots,r)$ *connues.*

Une conséquence immédiate des théorèmes I et II est donnée par le

Corollaire. — *Pour que l'équation* (2), $F(x)$ *y étant continue dans* I *et* $f_\varphi(x)$ *donnée par* (1), *admette dans* I *une solution* $\varphi\in\Phi$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

1° *la série* (3) *est sommable* T, T *étant un procédé régulier de sommation* (le cas $T(s_n) \equiv s_n$ n'étant pas exclu);

2° $\varphi = \varphi(x)$ $(\varphi \in \Phi,\ x \in I)$ *est une solution de l'équation fonctionnelle*

$$\varphi = TA\varphi,$$

où $TA\varphi$ *représente la transformée* T *de la série* (3).

Théorème III. — *Si les conditions suivantes sont remplies:*

(i) $F(x)$ *est continue et concave, dans le sens plus large, dans* I,

(ii) $$x < F(x) - b \leqslant b \ (a \leqslant x < b),\ F(b) = 2b,$$

(iii) $$F(x_2) - F(x_1) \leqslant x_2 - x_1 \ (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b),$$

(iv) $$f_\nu(x_2) - f_\nu(x_1) \leqslant x_2 - x_1 \ (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b;\ f_\nu \in \Psi,\ \nu = 1, \ldots, r),$$

l'équation fonctionnelle (2), *où* $f_\varphi(x)$ *est définie par* (1), *admet au moins une solution* $\varphi \in \Phi$.

Sous les conditions du théorème III on ne peut pas exiger que l'existence d'une solution $\varphi \in \Phi$, ce qui montre le cas où $F(x) \equiv 2b$.

2. Démonstrations

Démonstration du théorème I. — Soit $\varphi \in \Phi$ une solution de (2). Alors

(5) $$\varphi(b) = \frac{1}{2} F(b) = b,$$

(6) $$f_\varphi^k(x) \to b \ (k \to \infty,\ x \in I).$$

L'équation (2) peut être écrite sous la forme

$$\left\{\varphi(x) - \frac{1}{2} F(b)\right\} + \left\{\varphi[f_\varphi(x)] - \frac{1}{2} F(b)\right\} = F(x) - F(b).$$

En y posant $f_\varphi^k(x)$ à la place de $x \in I$, en multipliant l'équation obtenue par $(-1)^k$ et en faisant la somme des équations obtenues pour $k = 0, 1, \ldots, n$, on obtient une équation qui, compte tenu de (5) et (6), pour $n \to \infty$, tend vers (4). Donc, les conditions 1° et 2° sont nécessaires.

En formant la somme $\varphi(x) + \varphi[f_\varphi(x)]$, (3) et (4) donnent immédiatement l'identité (2), ce qui montre que les conditions 1° et 2° sont suffisantes.

Démonstration du théorème II. — La démonstration du théorème II est celle du théorème Ib dans [1] pourvu qu'on y pose f_φ à la place de f.

Démonstration du théorème III. — Remarquons d'abord que (i) et (ii) entraînent la monotonie non décroissante de $F(x)$ dans I avec $F(x) - b \in \Phi$.

La démonstration du théorème III repose sur les démonstrations des lemmes suivants.

L e m m e 1. — *Si $F(x)$ est continue, monotone non décroissante dans I avec $F(b)=2b$ et si $f_\varphi(x)$ est définie par* (1), *alors pour toute $\varphi\in\Phi$,*

1° *la série* (3) *est uniformément convergente dans I;*

$$2^\circ\ F(x)-b\leqslant A\varphi(x)\leqslant b \quad (\varphi\in\Phi,\ x\in I). \tag{7}$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e 1. — Tenant compte des hypothèses faites sur les fonctions φ, f_φ, F, on voit que la série (3) est alternée et convergente de sorte que

$$|R_n(x)|\leqslant F(b)-F[f_\varphi^{n+1}(x)]\leqslant F(b)-F[f_\varphi^{n+1}(a)]\leqslant\varepsilon\ (n\geqslant N),$$

$R_n(x)$ étant le reste de la série (3) et N un entier positif dépendant seulement de ε et de φ, le même pour tout $x\in I$.

Si

$$s_{-1}(x)=\frac{1}{2}F(b),\ s_n(x)=\frac{1}{2}F(b)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\{F[f_\varphi^k(x)]-F(b)\} \quad (n=0,1,2\ldots)$$

représentent les sommes partielles de la série (3), alors, la série (3) étant alternée, on a

$$s_{2n}(x)\leqslant A\varphi(x)\leqslant s_{2n-1}(x) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

d'où, pour $n=0$, il résulte (7).

L e m m e 2.— *En désignant par $\Lambda=C[a,\ b]$ l'espace de* B a n a c h *de toutes les fonctions continues dans I, la norme et la distance étant données par les relations*

$$\|\varphi\|=\max_{x\in I}|\varphi(x)|,\quad \rho(\varphi,\ \psi)=\|\varphi-\psi\| \quad (\varphi,\ \psi\in\Lambda),$$

par $\bar\varphi\in\Phi$ une fonction déterminée telle que

$$\bar\varphi(x_2)-\bar\varphi(x_1)\leqslant x_2-x_1 \quad (a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$$

et par Φ_0 le sous-ensemble de Φ consistant en toutes les fonctions $\varphi\in\Phi$ telles que

$$\bar\varphi(x)\leqslant\varphi(x) \quad (x\in I),$$

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)\leqslant x_2-x_1 \quad (a\leqslant x_1<x_2\leqslant b),$$

alors: 1° *les fonctions de Φ_0 sont également continues et bornées dans leur ensemble et $\Phi_0\subset\Lambda$;* 2° *Φ_0 est convexe et fermé.*

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e 2. — La démonstration de la première partie découle immédiatement de la définition des ensembles Φ et Φ_0.
Si $\varphi,\psi\in\Phi_0$, les relations

$$\bar\varphi(x)\leqslant p\varphi(x)+q\psi(x)\leqslant b \quad (p+q=1;\ p,q\geqslant 0),$$

$$0\leqslant[p\varphi(x_2)+q\psi(x_2)]-[p\varphi(x_1)+q\psi(x_1)]\leqslant x_2-x_1 \quad (a\leqslant x_1<x_2\leqslant b),$$

montrent que $p\varphi+q\psi\in\Phi_0$ $(p+q=1;\ p,\ q\geqslant 0;\ \varphi,\psi\in\Phi_0)$.
Donc, Φ_0 est convexe.

Soit maintenant $\varphi_0\in\Lambda$ un point d'accumulation de Φ_0. Alors, pour toute suite $\varepsilon_n\downarrow 0\ (n\to\infty)$, on peut trouver une suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi_0$ $(\varphi_n\neq\varphi_0,\ n>0)$ telle que

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|\leqslant\varepsilon_n$$

d'où

$$\varphi_n(x) \to \varphi_0(x) \quad (n \to \infty) \text{ uniformément dans } I.$$

Or,

$$\{\bar{\varphi}(x) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant b \ (n > 0,\ x \in I)\} \Rightarrow \{\bar{\varphi}(x) \leqslant \varphi_0(x) \leqslant b \ (x \in I)\},$$

$$\{0 \leqslant \varphi_n(x_2) - \varphi_n(x_1) \leqslant x_2 - x_1 \ (n > 0,\ a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)\} \Rightarrow \{0 \leqslant \varphi_0(x_2) - \\ - \varphi_0(x_1) \leqslant x_2 - x_1 \ (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)\};$$

par conséquent $\varphi_0 \in \Phi_0$.

L e m m e 3. — *Sous les conditions du théorème* III *on a:*

1° $\Phi_1 = \{A\varphi \mid \varphi \in \Phi_0\} \subset \Phi_0$, *$A\varphi$ étant défini par* (3);

2° *Φ_1 est compact*;

3° *l'opérateur A est continu dans Φ_0,*

où Φ_0 est l'ensemble, défini dans le lemme 2, correspondant à une fonction $\bar{\varphi} \in \Phi$ (ce choix est toujours possible) *telle que*

$$x < \bar{\varphi}(x) < F(x) - b \quad (a \leqslant x < b).$$

D é m o n s t r a t i o n du l e m m e 3. — Pour $\varphi \in \Phi_0$ on a

$$\bar{\varphi}(x) \leqslant f_{\bar{\varphi}}(x) \leqslant f_{\varphi}(x),$$

$$f_{\varphi}(x_2) - f_{\varphi}(x_1) \leqslant x_2 - x_1 \qquad (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b),$$

d'où

$$f_{\varphi} \in \Phi_0 \qquad (\varphi \in \Phi_0).$$

D'après le lemme 1, $A\varphi(x)$ $(\varphi \in \Phi)$ est une fonction continue satisfaisant à (7). Des hypothèses faites sur $\varphi \in \Phi_0$, f_{φ} (définie par (1)) et F, il résulte que la série

$$A\varphi(x_2) - A\varphi(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{F[f_{\varphi}^k(x_2)] - F[f_{\varphi}^k(x_1)]\} \quad (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b,\ \varphi \in \Phi_0)$$

est une série alternée; par conséquent

$$0 \leqslant A\varphi(x_2) - A\varphi(x_1) \leqslant F(x_2) - F(x_1) \leqslant x_2 - x_1 \qquad (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b,\ \varphi \in \Phi_0),$$

d'où $\Phi_1 \subset \Phi_0$. Les fonctions de Φ_1 sont également continues et bornées dans leur ensemble. Ainsi 1° est démontré et, d'après un théorème connu d'Arzelà, même 2°.

Soit maintenat $\varphi_n \to \varphi$ $(n \to \infty;\ \varphi_n,\ \varphi \in \Phi_0)$. Alors

$$|A\varphi_n(x) - A\varphi(x)| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \{F[f_{\varphi_n}^k(x)] - F[f_{\varphi}^k(x)]\}\right| + \\ + \left|\sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k \{F[f_{\varphi_n}^k(x)] - F(b)\}\right| + \left|\sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k \{F[f_{\varphi}^k(x)] - F(b)\}\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \{F[f_{\varphi_n}^k(x)] - F[f_{\varphi}^k(x)]\}\right| + \{F(b) - F[f_{\varphi_n}^N(x)]\} + \\ + \{F(b) - F[f_{\varphi}^N(x)]\} \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \{F[f_{\varphi_n}^k(x)] - F[f_{\varphi}^k(x)]\}\right| + \\ + 2\{F(b) - F[f_{\bar{\varphi}}^N(a)]\}.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier N tel que

$$0 \leqslant F(b) - F[f_{\varphi}^{N}(a)] \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part,

$$\{\varphi_n \to \varphi \ (n \to \infty)\} \Rightarrow \{f_{\varphi_n}^{k} \to f_{\varphi}^{k},\ n \to \infty\};$$

par conséquent

$$|f_{\varphi_n}^{k}(x) - f_{\varphi}^{k}(x)| \leqslant \delta \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1; \ \ n \geqslant n_0 = n_0(\delta)),$$

et, $F(x)$ étant uniformément continue, on peut, pour $\varepsilon > 0$, trouver $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\left| F\left[f_{\varphi_n}^{k}(x)\right] - F\left[f_{\varphi}^{k}(x)\right] \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3N} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

dès que $|f_{\varphi_n}^{k}(x) - f_{\varphi}^{k}(x)| < \delta$, c'est-à-dire dès que $n \geqslant n_0$, uniformément par rapport à $x \varepsilon I$. Il s'ensuit

$$\rho(A\varphi_n, A\varphi) \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant n_0).$$

Ainsi on a démontré 3°. Évidemment

$$\{\varphi_n \to \varphi \ (n \to \infty); \ \varphi_n, \ \varphi \in \Phi_o\} \Rightarrow \{A\varphi \in \Phi_1\}$$

puisque $A\varphi$ est l'image de $\varphi \in \Phi_o$, et, d'aprés la définition de Φ_1, appartient à Φ_1. Ainsi le lemme 3 est démontré.

Les lemmes 1—3 étant démontrés il s'ensuit, d'après le théorème sur les points fixes de Schauder [5], que (4) admet au moins une solution $\varphi \in \Phi_0$. Par conséquent, d'après le théorème I, l'équation (2) admet au moins une solution $\varphi \in \Phi_o$, donc au moins une solution $\varphi \in \Phi$.

RÉFÉRENCES

[1] M. Bajraktarević: *Sur une solution de l'équation fonctionnelle* $\varphi(x) + \varphi[f(x)] = F(x)$, Glasnik mat.—fiz. i astr., Zagreb, 15 (1960), p. 91—98.

[2] M. Bajraktarević: *Sur l'existence des solutions continues monotones d'une équation fonctionnelle* (à paraître).

[3] M. Kuczma: *On monotonic solution of a functional equation, I and II*, Ann. Pol. Math., 9 (1961), p. 295—297; 10 (1961), p. 162—166.

[4] M. Kuczma: *On the functional equation* $\varphi(x) + \varphi[f(x)] = F(x)$, Ann. Pol. Math., 6 (1959), p. 281—287.

[5] C. Kuratowski: *Topologie, I*, Warszawa (1958), p. 481.