PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 65—70.

ÉQUATION FONCTIONNELLE D'UN CERTAIN TYPE DE DÉTERMINANTS

Petar M. Vasić

(Reçu le 19. XII 1962)

1. Dans l'article [1] il a été montré que l'équation fonctionnelle

$$f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4)+f(x_1, x_3)\, f(x_4, x_2)+f(x_1, x_4)\, f(x_2, x_3)=0 \tag{1.1}$$

a pour solution générale la fonction suivante

$$f(u, v)=G(u)\, H(v)-G(v)\, H(u), \tag{1.2}$$

où $G(u)$ et $H(u)$ sont des fonctions quelconques de u.

Dans l'article [2] on a trouvé que l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} f(x, y, z)\, f(u, v, w)+f(y, x, u)\, f(z, v, w) \\ +f(x, y, v)\, f(z, u, w)+f(y, x, w)\, f(z, u, v)=0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

a pour solution générale la fonction

$$f(u, v, w)=\begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_1(v) & \varphi_1(w) \\ \varphi_2(u) & \varphi_2(v) & \varphi_2(w) \\ \varphi_3(u) & \varphi_3(v) & \varphi_3(w) \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

où $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$ sont des fonctions quelconques de u.

Dans la monographie de Ghermănescu [3] on a démontré que la solution générale continue de l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_1, x_4, x_5)+f(x_1, x_3, x_4)\, f(x_1, x_2, x_5) \\ +f(x_1, x_4, x_2)\, f(x_1, x_3, x_5)=0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

est la fonction

$$f(u, v, w)=H(u, v)\, G(u, w)-H(u, w)\, G(u, v) \tag{1.6}$$

où $H(u, v)$ et $G(u, v)$ sont des fonctions continues quelconques.

Dans [4] il a été montré que la fonction (1.6), où $H(u, v)$ et $G(u, v)$ sont des fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation (1.5).

2. Toutes les fonctions qu'on considère dans cet article sont des fonctions réelles des variables réelles.

Théorème. — La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\, f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})\, f(x_n, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) \\ &+ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+2})\, f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \dots, x_{2n}) + \cdots \\ &+ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{2n})\, f(x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}, x_n), \end{aligned}$$

où $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ $(n \geqslant 2)$ est une fonction réelle des variables réelles $u_1, u_2, \dots, u_n$, est donnée par

$$(2.2)\qquad f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) & \cdots & \varphi_1(u_n) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) & & \varphi_2(u_n) \\ \vdots & & & \\ \varphi_n(u_1) & \varphi_n(u_2) & & \varphi_n(u_n) \end{vmatrix},$$

avec $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)$ des fonctions quelconques de u.

Pour démontrer la théorème, nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme. — Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les nombres réels tels que

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0,$$

on a

$$(2.3)\qquad f(a_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, a_n) = 0.$$

Démonstration du lemme. — En posant

$$x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_{n+1} = x_{2n} = a_n, \ x_j = u_{j-n-1} \ (j = n+2, n+3, \dots, 2n-1),$$

l'équation (2.1) devient

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} & f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)\, f(a_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, a_n) \\ &+ f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, a_n, u_2, \dots, u_{n-2}, a_n) \\ &+ f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, a_n, u_3, \dots, u_{n-2}, a_n) + \cdots \\ &+ f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, u_{n-2})\, f(a_n, u_1, \dots, u_{n-3}, a_n, a_n) = 0. \end{aligned}$$

Soit $E_{n-2} = \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$ et S_ν $(0 < \nu \leqslant n-2)$ un sous-ensemble quelconque de E_{n-2} contenant ν éléments. Pour $\nu = n-2$ on a $S_{n-2} = E_{n-2}$. En remplaçant dans l'équation (2.1) toutes les variables par a_n, on obtient

$$(2.5)\qquad f(a_n, a_n, a_n, \dots, a_n, a_n) = 0.$$

Supposons que l'on ait

$$(2.6)\qquad f(a_n, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, a_n) = 0$$

où

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} v_i &= a_n \quad (i \in S_\nu), \\ &= y_i \quad (i \in E_{n-2} \backslash S_\nu). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

$$f(a_n, w_1, w_2, \dots, w_{n-2}, a_n) = 0, \tag{2.8}$$

avec

$$\begin{aligned} w_i &= a_n \quad (i \in S_{\nu-1}), \\ &= y_i \quad (i \in E_{n-2} \setminus S_{\nu-1}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

si l'hypotese (2.6) est vraie.

En remplaçant dans (2.4) $u_i = w_i$, on obtient, d'après l'hypotese (2.6)

$$\nu f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) f(a_n, w_1, w_2, \dots, w_{n-2}, a_n) = 0.$$

De là, si l'hypotese (2.6) est vraie, on a

$$f(a_{..}, w_1, w_2, \dots, w_{n-2}, a_n) = 0.$$

Ainsi, nous avons démonıré par induction que

$$f(a_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, a_n) = 0$$

si précisément ν $(0 \leqslant \nu \leqslant n-2)$ éléments parmi $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$ sont égaux à a_n.

Pour $\nu = 0$ on obtient le lemme.

Démonstration du théorème. — Nous procédons par induction. Dans le cas $n = 2$ l'équation (2.1) a la forme suivante

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) = f(x_1, x_3) f(x_2, x_4) + f(x_1, x_4) f(x_3, x_2). \tag{2.10}$$

Pour toute solution non triviale de l'équation (2.10) il existe au moins un couple (a, b) des nombres réels a, b tels que $f(a, b) \neq 0$.

Si l'on pose $x_1 = a$, $x_3 = b$, $x_2 = u_1$, $x_4 = u_2$, l'équation (2.1) prend la forme suivante

$$f(u_1, u_2) = \frac{f(a, u_1)}{f(a, b)} f(b, u_2) - \frac{f(a, u_2)}{f(a, b)} f(b, u_1).$$

Si l'on y pose

$$\frac{f(a, u_1)}{f(a, b)} = \varphi_1(u_1), \qquad f(b, u_1) = \varphi_2(u_1),$$

on obtient que la fonction

$$f(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) \end{vmatrix}$$

est la solution générale de l'équation (2.1) pour $n = 2$, car elle embrasse la solution triviale $f(x, y) \equiv 0$.

Supposons que le théorème est vrai pour $n - 1$, c'est-à-dire que la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n-2}) \\ & = f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) f(x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{2n-2}) \\ & + f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-2}) + \dots \\ & + f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{2n-2}) f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n-3}, x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

est donnée par la fonction suivante

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) & \ldots & \varphi_1(u_{n-1}) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) & & \varphi_2(u_{n-1}) \\ \vdots & & & \\ \varphi_{n-1}(u_1) & \varphi_{n-1}(u_2) & & \varphi_{n-1}(u_{n-1}) \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

Soit $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. Si l'on pose

$$x_1 = a_n, \quad x_{n+1} = a_n; \quad f(a_n, x_2, x_3, \ldots, x_n) = F(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

l'équation (2.1), d'après le lemme, devient

$$\begin{aligned} F(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, F(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) &= F(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, F(x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\ &+ F(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_{n+3})\, F(x_{n+2}, x_n, x_{n+4}, \ldots, x_{2n}) + \cdots \\ &+ F(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, F(x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Grâce aux (2.11) et (2.12) on trouve que la solution générale de l'équation (2.13) est

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) &= f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) & \ldots & \varphi_1(u_{n-1}) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) & & \varphi_2(u_{n-1}) \\ \vdots & & & \\ \varphi_{n-1}(u_1) & \varphi_{n-1}(u_2) & & \varphi_{n-1}(u_{n-1}) \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_{n-1}(u)$ sont des fonctions quelconques de u.

En posant dans (2.1)

$$x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$x_n = u_1, \quad x_{n+1} = a_n, \quad x_{n+k} = u_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, u_2, \ldots, u_n) \\ &- f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, u_3, \ldots, u_n) - \cdots \\ &- f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_n)\, f(a_n, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1). \end{aligned} \tag{2.15}$$

La propriété (2.14) conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} f(a_n, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_{n-1}) &= -f(a_n, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_{n-1}) \\ &(1 \leqslant i < j \leqslant n-1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Mettant à profit (2.14) et (2.16), avec la notation

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u)}{f(a_1, \ldots, a_n)} = \varphi_n(u),$$

on obtient que $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est de la forme (2.2).

Inversement, nous allons prouver que la fonction (2.2) est justement la solution de l'équation (2.1). A cet effet, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & & \varphi_n(x_2) & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ \varphi_1(x_{n-1}) & \varphi_2(x_{n-1}) & & \varphi_n(x_{n-1}) & 0 & 0 & & 0 \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & & \varphi_n(x_n) & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & & \varphi_n(x_n) \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & & \varphi_n(x_{n+1}) & \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & & \varphi_n(x_{n+1}) \\ \vdots & & & & & & & \\ \varphi_1(x_{2n}) & \varphi_2(x_{2n}) & & \varphi_n(x_{2n}) & \varphi_1(x_{2n}) & \varphi_2(x_{2n}) & & \varphi_n(x_{2n}) \end{vmatrix} = 0.$$

En évaluant le déterminant d'après la règle de Laplace, on vérifie aisément que la fonction (2.2) est la solution de l'équation (2.1).

La démonstration est ainsi achevée.

3. Considérons l'équation

$$\begin{aligned} (3.1) \qquad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) f(x_1, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+2}) f(x_1, x_{n+1}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+1}) \\ &+ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+3}) f(x_1, x_{n+2}, x_{n+1}, x_{n+4}, \ldots, x_{2n+1}) + \cdots \\ &+ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{2n+1}) f(x_1, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}, x_{n+1}) \end{aligned}$$

où $f(u_1, \ldots, u_{n+1})$ $(n \geqslant 2)$ est une fonction réelle des variables réelles $u_1, \ldots, u_{n+1}$.

Comme conséquence du théorème démontré il suit que la fonction

$$f(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \begin{vmatrix} \varphi_1(u_1, u_2) & \varphi_1(u_1, u_3) & \cdots & \varphi_1(u_1, u_{n+1}) \\ \varphi_2(u_1, u_2) & \varphi_2(u_1, u_3) & & \varphi_2(u_1, u_{n+1}) \\ \vdots & & & \\ \varphi_n(u_1, u_2) & \varphi_n(u_1, u_3) & & \varphi_n(u_1, u_{n+1}) \end{vmatrix},$$

où $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ sont des fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation (3.1).

4. Pour $n=2$, l'équation (2.1) devient

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) = f(x_1, x_3) f(x_2, x_4) + f(x_1, x_4) f(x_3, x_2)$$

ou bien, d'après $f(u, v) = -f(v, u)$,

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 0.$$

C'est précisément l'équation (1.1).

Pour $n=3$, l'équation (2.1) prend la forme suivante

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_4, x_5, x_6) = \; & f(x_1, x_2, x_4)\, f(x_3, x_5, x_6) \\
& + f(x_1, x_2, x_5)\, f(x_4, x_3, x_6) \\
& + f(x_1, x_2, x_6)\, f(x_4, x_5, x_3).
\end{aligned}
$$

Etant donné que $f(u, v, w) = -f(u, w, v)$ et $f(u, v, w) = -f(v, u, w)$, l'équation (4.1) est bien du type (1.3).

Pour $n=2$, d'après $f(u, v, w) = -f(u, w, v)$, l'équation (3.1) prend la forme (1.5).

Remarque 1. — Le théorème démontré reste valable sous des conditions suffisamment affaiblies. A savoir, on peut supposer que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ apartiennent à un ensemble quelconque et que la fonction cherchée prend ses valeurs dans un corps convenablement choisi.

Remarque 2. — Un résumé de cet article a été publié dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 256, 1963, p. 1898.

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović et S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur*. Publications de la Faculté d'Électrotechique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 70 (1962).

[2] L. Carlitz: *A special functional equation*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 97 (1962).

[3] M. Ghermănescu: *Ecuaţii funcţionale*, Bucarest, 1960, p. 428—430.

[4] D. S. Mitrinović et S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire*, Comptes rendus des séaces de l'Académie des Sciences, t. 254, p. 611—613, Paris.