

PROPRIÉTÉS D'UNE MATRICE CYCLIQUE ET SES APPLICATIONS

D. S. Mitrović et D. Ž. Djoković

(Reçu le 3. XII 1962)

1. Quelques propriétés d'une matrice cyclique

Considérons la matrice cyclique d'ordre $n (\geq 2)$ que voici:

$$(1.1) \quad A(n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & n & 1 \\ \vdots & & & & & \\ n & 1 & 2 & & n-2 & n-1 \end{bmatrix}.$$

Divisons la $i^{\text{ième}}$ ($i=1, 2, \dots, n$) ligne de $A(n)$ en deux parties: la première composée de $\nu_i (1 \leq \nu_i \leq n-1)$ premiers éléments et la seconde des autres éléments de cette ligne. Toutes les premières parties des lignes de $A(n)$ font la première partie de $A(n)$. On définit la seconde partie de $A(n)$ par une voie analogue. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. — *Pour que chaque élément de $A(n)$ apparaisse $p (1 \leq p \leq n-1)$ fois dans la première partie de $A(n)$ (et $n-p$ fois dans la seconde), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

1° *Les derniers éléments des premières parties de toutes les lignes de $A(n)$ sont différents entre eux;*

2° *L'inégalité $i + \nu_i > n$ est satisfaite précisément pour p valeurs de $i (= 1, 2, \dots, n)$.*

Démonstration. L'élément k de la $i^{\text{ième}}$ ligne de $A(n)$ sera contenu dans sa première partie si et seulement si la condition

$$(1.2) \quad \begin{aligned} k &< i + \nu_i && (i = 1, 2, \dots, k) \\ k &< i + \nu_i - n && (i = k + 1, k + 2, \dots, n) \end{aligned}$$

est satisfaite. Représentons par

$$N^k (P_k)$$

le nombre des entiers positifs k appartenant au segment $[p, q]$ pour lesquels la propriété P_k est vraie. Avec cette notation, l'assertion du théorème peut s'écrire

$$(1.3) \quad p = \sum_{1 \leq i \leq k} N^i (k < i + \nu_i) + \sum_{k+1 \leq i \leq n} N^i (k < i + \nu_i - n) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Supposons que les égalités (1.3) soient vraies. L'égalité (1.3) pour $k=n$ donne

$$(1.4) \quad p = \sum_{1 \leq i \leq n} N^i (n < i + v_i),$$

c'est-à-dire que la condition 2^o du théorème est vérifiée. En faisant $k=r$ et $k=r+1$ ($r=1, 2, \dots, n-1$), l'égalité (1.3) fournit

$$(1.5) \quad p = \sum_{1 \leq i \leq r} N^i (r < i + v_i) + \sum_{r+1 \leq i \leq n} N^i (r < i + v_i - n)$$

$$(1.6) \quad p = \sum_{1 \leq i \leq r+1} N^i (r < i + v_i - 1) + \sum_{r+2 \leq i \leq n} N^i (r < i + v_i - n - 1).$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq r} N^i (r < i + v_i) &= \sum_{1 \leq i \leq r} N^i (r = i + v_i - 1) + \sum_{1 \leq i \leq r+1} N^i (r < i + v_i - 1) - \sum_{i=r+1} N^i (r < i + v_i - 1), \\ \sum_{r+1 \leq i \leq n} N^i (r < i + v_i - n) &= \sum_{i=r+1} N^i (r < i + v_i - n - 1) + \sum_{r+2 \leq i \leq n} N^i (r < i + v_i - n - 1) \\ &\quad + \sum_{r+1 \leq i \leq n} N^i (r = i + v_i - n - 1), \end{aligned}$$

en retranchant les égalités (1.5) et (1.6), il vient

$$\sum_{1 \leq i \leq r} N^i (r = i + v_i - 1) + \sum_{r+1 \leq i \leq n} N^i (r = i + v_i - n - 1) = 1.$$

Cette égalité peut être mise sous la forme suivante

$$(1.7) \quad \sum_{1 \leq i \leq n} N^i (i + v_i - 1 \equiv r \pmod{n}) = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1).$$

Un seul des nombres $i + v_i - 1$ ($i=1, 2, \dots, n$) est congru (mod n) à r ($r=1, 2, \dots, n-1$) et le nombre restant doit être congru à n (mod n). Donc, la relation (1.7) est valable également pour $r=n$.

Le nombre $r \in [1, n]$ qui est congru à $i + v_i - 1 \pmod{n}$ est précisément le dernier élément de la première partie de la $i^{\text{ième}}$ ligne. D'après (1.7), tous ces éléments sont différents, c'est-à-dire que la condition 1^o est également remplie.

Nous allons prouver que, inversement, les conditions 1^o et 2^o sont suffisantes.

Ces conditions sont équivalentes à (1.7) et (1.4) respectivement.

L'égalité (1.3) est vraie pour $k=n$, car elle est identique à (1.4).

Supposons que l'égalité (1.3) soit vraie pour $k=r+1$ ($r=1, 2, \dots, n-1$), c'est-à-dire que l'égalité (1.6) ait lieu. L'égalité (1.5) a aussi lieu, car l'égalité (1.7), obtenue en retranchant membre à membre les égalités (1.5) et (1.6), est vraie d'après l'hypothèse que nous avons admise. Donc, l'égalité (1.3) est aussi vraie pour $k=r$. Par induction, on conclut que l'égalité (1.3) est vraie pour tout $k=1, 2, \dots, n$, ce qu'il fallait démontrer.

Définition 1. La caractéristique ν de la matrice $A(n)$, décomposée en deux parties, est

$$(1.8) \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n),$$

où ν_i ($1 \leq \nu_i \leq n-1$) est le nombre des éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne de $A(n)$ appartenant à sa première partie.

La correspondance entre les décompositions de $A(n)$ et les caractéristiques \bar{v} est biunivoque.

Désignons par $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ celles des caractéristiques (1.8) qui correspondent aux décompositions de $A(n)$ obéissant à la condition 1^o du théorème 1. D'après (1.7) les caractéristiques \bar{v} sont précisément celles qui satisfont aux conditions que voici

$$(1.9) \quad N^i \quad (i + \bar{v}_i - 1 \equiv r \pmod{n}) \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

$$1 \leq i \leq n$$

D'autre part, désignons par $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ celles des permutations $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de l'ensemble $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ pour lesquelles on a

$$(1.10) \quad \bar{\alpha}_i \neq i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous allons établir dans ce qui suit une correspondance biunivoque entre les caractéristiques \bar{v} et les permutations $\bar{\alpha}$. Cette correspondance est définie par la congruence suivante

$$(1.11) \quad \bar{\alpha}_i \equiv i + \bar{v}_i \pmod{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

avec

$$1 \leq \bar{\alpha}_i \leq n, \quad 1 \leq \bar{v}_i \leq n-1.$$

À la vérité, les nombres $\bar{\alpha}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, déterminés par (1.11), d'après (1.9) sont différents et ils satisfont aux conditions (1.10).

Inversement, étant donné que $\bar{\alpha}_i \neq i$, on peut déterminer les \bar{v}_i satisfaisant à (1.11). Ces nombres \bar{v}_i , ainsi obtenus, obéissent à (1.9), car les $\bar{\alpha}_i$ sont différents.

Théorème 2. — *Le nombre total des différentes décompositions de la matrice $A(n)$ en deux parties, vérifiant la condition 1^o du théorème 1, est égal à*

$$n! \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Démonstration. Nous avons démontré qu'il existe une application biunivoque entre les décompositions considérées de $A(n)$ et l'ensemble des permutations $\bar{\alpha}$. Donc, le nombre cherché est le nombre des différentes permutations $\bar{\alpha}$.

Considérons à présent l'ensemble de toutes les permutations α de l'ensemble E_n . Nous dirons que la permutation α possède la propriété $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ si $\alpha_i = i$.

Le nombre de toutes les permutations α est $n!$

Le nombre des permutations α possédant la propriété P_i est $(n-1)!$

Le nombre des permutations α possédant les propriétés P_i et $P_j (i \neq j)$ est égal à $(n-2)!$

En général, il y a précisément $(n-k)!$ permutations α possédant des propriétés $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$, où les i_1, i_2, \dots, i_k sont des nombres naturels différents appartenant au segment $[1, n]$.

Par application d'un théorème de Sylvester [1] on trouve que le nombre des permutations α ne possédant aucune des propriétés P_i ($i=1, 2, \dots, n$), c'est-à-dire le nombre des permutations $\bar{\alpha}$, est égal à

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Le théorème 2 est ainsi complètement établi.

Théorème 3. — Si la caractéristique $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ obéit à la condition

$$(1.12) \quad N^i (i + \bar{v}_i > n) = p,$$

il en est de même de la caractéristique

$$(1.13) \quad (\bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n, \bar{v}_1).$$

Démonstration. Tout d'abord montrons que (1.13) est une v caractéristique. D'après la définition des \bar{v} caractéristiques, les nombres $i + \bar{v}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) forment un système complet de résidus (mod n). Il en résulte que les nombres $i + \bar{v}_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) et $n + \bar{v}_1$ forment aussi un tel système. Donc, (1.13) est bien une \bar{v} caractéristique.

Il faut encore démontrer la relation suivante

$$N^i (i + \bar{v}_{i+1} > n) = p - 1.$$

En utilisant la relation (1.12) et la définition des \bar{v} caractéristiques, on obtient

$$\begin{aligned} N^i (i + \bar{v}_{i+1} > n) &= N^i (i + \bar{v}_i > n + 1) \\ &= N^i (i + \bar{v}_i > n + 1) \\ &= N^i (i + \bar{v}_i > n) - N^i (i + \bar{v}_i = n) \\ &= p - 1 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 4. — Si $n=2m$ et si la caractéristique

$$(1.14) \quad \bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{2m})$$

satisfait à la condition

$$(1.15) \quad N^i (i + \bar{v}_i > 2m) = m,$$

il en est de même de la caractéristique

$$(1.16) \quad (2m - \bar{v}_{2m}, 2m - \bar{v}_{2m-1}, \dots, 2m - \bar{v}_1).$$

Démonstration. Étant donné que

$$i + 2m - \bar{v}_{2m-i+1} = 4m + 1 - \{(2m - i + 1) + \bar{v}_{2m-i+1}\} \quad (i=1, 2, \dots, 2m),$$

ces nombres forment un système complet de résidus (mod $2m$). c'est-à-dire que (1.16) est une \bar{v} caractéristique. Il faut encore démontrer l'égalité suivante:

$$(1.17) \quad N^i \quad (i + 2m - \bar{v}_{2m-i+1} > 2m) = m.$$

La dernière relation peut s'écrire également sous la forme que voici:

$$N^i \quad (i + \bar{v}_i < 2m + 1) = m.$$

Donc, (1.17) est une conséquence de (1.15) et le théorème est ainsi démontré.

Définition 2. *Nous dirons que les caractéristiques*

$$(1.18) \quad \begin{aligned} & (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n), \\ & (v_2, v_3, \dots, v_n, v_1), \\ & \vdots \\ & (v_n, v_1, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}) \end{aligned}$$

forment un cycle dont la période est égale au nombre des différentes caractéristiques (1.18).

La période du cycle est obligatoirement le diviseur de n .

Définition 3. *Nous dirons que la \bar{v} caractéristique (1.16), laquelle vérifie la relation (1.15), est conjuguée de la \bar{v} caractéristique (1.14).*

Inversement, on trouve que la caractéristique (1.14) est conjuguée de (1.16). Représentons par B_{2m} l'ensemble des \bar{v} caractéristiques (1.14) qui obéissent à la condition (1.15).

L'ensemble B_{2m} , d'après le théorème 3, est la réunion des différents cycles C_i ($i = 1, 2, \dots$). Il est évident, selon (1.14) et (1.16), que les conjuguées des \bar{v} caractéristiques d'un cycle C_i forment aussi un cycle C_j (conjugué de C_i). Si $C_i = C_j$, nous dirons que le cycle C_i est auto conjugué.

2. Liaison entre A(n) et une équation fonctionnelle

Nous allons appliquer les résultats obtenus à un type d'équations fonctionnelles. À la matrice $A(2m)$, décomposée en deux parties, dont la caractéristique est

$$(2.1) \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_{2m}),$$

faisons correspondre l'équation fonctionnelle suivante:

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^{2m} f(x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+v_i-1}, x_{i+v_i} + x_{i+v_i+1} + \dots + x_{i+2m-1}) = 0$$

avec

$$x_{i+2m} \equiv x_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2m-1).$$

On suppose dans ce qui suit que toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles de variables réelles.

Théorème 5. — *Pour que l'équation (2.2) admette comme solution la fonction*

$$(2.3) \quad f(x, y) = (x - y)g(x + y),$$

où $g(x)$ désigne une fonction arbitraire, il faut et il suffit que la caractéristique (2.1) appartienne à B_{2m} .

Démonstration. La substitution de (2.3) dans l'équation (2.2) étant effectuée, l'assertion du théorème 5 se ramène à la vérification de l'identité suivante

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^{2m} (x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+v_i-1}) = \sum_{i=1}^{2m} (x_{i+v_i} + x_{i+v_i+1} + \dots + x_{i+2m-1}).$$

La variable x_i figure au premier (second) membre de (2.4) le même nombre de fois que l'élément i dans la première (seconde) partie de $A(2m)$. Pour que l'égalité (2.4) soit vraie, il faut et il suffit que la matrice $A(2m)$ soit décomposée de telle manière que chaque élément i ($1 \leq i \leq 2m$) apparaisse précisément m fois dans la première partie. Mais cette condition est justement celle, qui fait appartenir la caractéristique (2.1) à B_{2m} .

Le théorème 5 est ainsi établi.

Définition 4. Appelons B équations celles des équations fonctionnelles (2.2), qui admettent la solution (2.3), où $g(x)$ désigne une fonction arbitraire.

Lemme 1. Toute B équation implique l'égalité suivante:

$$(2.5) \quad f(x, y) + f(y, x) = 0.$$

Démonstration. En faisant $x_1 = x$, $x_2 = x_3 = \dots = x_{2m} = 0$, toute B équation prend la forme suivante

$$(2.6) \quad pf(x, 0) + qf(0, x) = 0.$$

Puisque le nombre 1 figure le même nombre de fois dans les deux parties de $A(2m)$, on a $p = q = m$, ce qui conduit à

$$(2.7) \quad f(x, 0) + f(0, x) = 0.$$

Si l'on pose à présent

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x_4 = \dots = x_{2m} = 0,$$

B équation devient

$$(2.8) \quad pf(x, y) + qf(y, x) + rf(x + y, 0) + sf(0, x + y) = 0.$$

Dans la deuxième ligne de $A(2m)$ le nombre 2 se trouve dans la première partie et 1 dans la seconde. Il n'existe qu'une ligne différente de la deuxième, dans laquelle le nombre 1 se trouve dans la première partie et 2 dans la seconde. Dans toutes les autres lignes de $A(2m)$ les nombres 1 et 2 appartiennent à la même partie. Il en résulte que $p = q = 1$ et $r = s = m - 1$, ce qui implique

$$f(x, y) + f(y, x) + (m - 1) \{f(x + y, 0) + f(0, x + y)\} = 0.$$

Vu l'égalité (2.7), la dernière égalité prend la forme (2.5), ce qu'il fallait démontrer.

Les B équations correspondant aux B caractéristiques du même cycle sont identiques, ce que l'on démontre par permutation cyclique des variables x_1, x_2, \dots, x_{2m} .

Lemme 2. *Les deux B équations, qui correspondent aux deux cycles conjugués, sont équivalentes.*

Démonstration. Si, en vertu du lemme 1, on remplace dans l'une de ces équations $f(x, y)$ par $-f(y, x)$, on obtient l'autre. La preuve est ainsi achevée.

Le lemme 2 nous permet de conclure qu'il suffit de résoudre les B équations correspondant aux différents cycles de B caractéristiques non-conjuguées.

3. Rappel de certains résultats connus

Dans ce qui suit, nous nous proposons de démontrer que toute B équation dans les cas où $2m=4$ ou $2m=6$ est équivalente à l'une des deux équations fonctionnelles cycliques que voici:

$$(3.1) \quad f(x, y) + f(y, x) = 0,$$

$$(3.2) \quad f(y+z, x) + f(z+x, y) + f(x+y, z) + f(0, x+y+z) = 0.$$

L'équation (3.1) a comme solution générale la fonction

$$(3.3) \quad f(x, y) = g(x, y) - g(y, x),$$

où $g(x, y)$ est une fonction arbitraire. La fonction (2.3) est un cas particulier de la fonction (3.3).

L'équation (3.2), en y faisant $f(x, y) + \frac{1}{3} f(0, x+y) = F(x, y)$, ou bien

$$(3.4) \quad f(x, y) = F(x, y) - \frac{1}{4} F(0, x+y),$$

prend la forme

$$(3.5) \quad F(y+z, x) + F(z+x, y) + F(x+y, z) = 0.$$

Cette équation se ramène [2] à l'équation de *Cauchy* $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ laquelle est bien étudiée à plusieurs points de vue par de nombreux mathématiciens [3]. En désignant par $\varphi(x)$ une solution quelconque de l'équation de *Cauchy*, la solution générale de l'équation (3.5) est la fonction

$$(3.6) \quad F(x, y) = \varphi(x-2y) g_1(x+y),$$

où $g_1(x)$ est une fonction quelconque.

En confrontant les relations (3.4) et (3.6), on obtient

$$(3.7) \quad f(x, y) = \varphi(x-y) g(x+y),$$

avec $g_1(x) = 2g(x)$.

Par conséquent, la fonction (3.7) est la solution générale de l'équation (3.2).

Pour que la fonction (3.7) soit continue, il faut et il suffit que $1^0 \varphi(x) = cx$ (c , constante), et $2^0 g(x)$, fonction continue.

Or, la solution générale continue de l'équation (3.2) est donnée par

$$(3.8) \quad f(x, y) = (x-y)g(x+y),$$

où $g(x)$ représente une fonction continue arbitraire.

4. B(4) équations

Dans le cas où $2m=4$ il existe neuf \bar{v} caractéristiques. Les voici

$$1111, 2222, 3333, 1313, 3131, 1223, 3122, 2312, 2231.$$

Parmi ces caractéristiques les sept suivantes sont B caractéristiques:

$$(4.1) \quad 2222, 1313, 3131, 1223, 3122, 2312, 2213.$$

Ces caractéristiques se décomposent en trois cycles. Pour chacun des cycles nous prendrons une caractéristique comme représentant du cycle en question, à savoir

$$(4.2) \quad 2222, 1313, 1223.$$

Le premier de ces trois cycles a pour période 1, le deuxième 2 et le dernier 4.

Tous ces cycles sont auto conjugués.

Il suffit donc d'examiner les trois équations fonctionnelles que voici:

$$(4.3) \quad f(x_1+x_2, x_3+x_4) + f(x_2+x_3, x_4+x_1) \\ + f(x_3+x_4, x_1+x_2) + f(x_4+x_1, x_2+x_3) = 0,$$

$$(4.4) \quad f(x_1, x_2+x_3+x_4) + f(x_2+x_3+x_4, x_1) \\ + f(x_3, x_4+x_1+x_2) + f(x_4+x_1+x_2, x_3) = 0,$$

$$(4.5) \quad f(x_1, x_2+x_3+x_4) + f(x_2+x_3, x_4+x_1) \\ + f(x_3+x_4, x_1+x_2) + f(x_4+x_1+x_2, x_3) = 0.$$

Ces équations correspondent aux cycles (4.2). Les équations (4.3) et (4.4) sont des conséquences de (3.1). Selon le lemme 1, on conclut que les équations (4.3) et (4.4) sont équivalentes à (3.1).

Si l'on met $x_1=0$, $x_2=x$, $x_3=y$, $x_4=z$, l'équation (4.5) prend la forme (3.2). Inversement, l'équation (3.2) implique (4.5). En effet, par application de (3.2), on obtient

$$f(x_1, x_2+x_3+x_4) + f(x_2+x_3, x_4+x_1) \\ + f(x_4, x_1+x_2+x_3) + f(0, x_1+x_2+x_3+x_4) = 0, \\ f(x_1+x_2, x_3+x_4) + f(x_3, x_4+x_1+x_2) \\ + f(x_4, x_1+x_2+x_3) + f(0, x_1+x_2+x_3+x_4) = 0.$$

En retranchant ces deux égalités et en utilisant (3.1), qui est une conséquence de (3.2), on obtient l'équation (4.5). Donc, l'équivalence des équations (3.2) et (4.5) est établie.

5. B(6) équations

Dans le cas où $2m=6$, d'après le théorème 2, les $\bar{\nu}$ caractéristiques sont au nombre de 265. Parmi elles, il en existe seulement 161 qui sont B caractéristiques et celles-ci se répartissent en 31 cycles, à savoir

1.	333333	9.	113344	17.	141525	25.	134514
2.	151515	10.	114255	18.	251235	26.	224235
3.	153153	11.	124245	19.	134244	27.	142353
4.	234234	12.	123345	20.	134253	28.	223335
5.	152244	13.	133353	21.	133344	29.	252252
6.	242424	14.	133524	22.	144144	30.	252234
7.	233334	15.	142524	23.	142344	31.	153144
8.	233424	16.	451512	24.	253152		

Le cycle 1 admet la période 1; les cycles 2 et 6 ont la période 2; les cycles 3, 4, 22 et 29 — la période 3, et les autres cycles — la période 6. Puisqu'il y a 7 paires de cycles conjugués, à savoir: 18 et 25, 19 et 26, 20 et 27, 21 et 28, 22 et 29, 23 et 30, 24 et 31, il suffit d'examiner les équations fonctionnelles correspondant au cycles numérotés à partir de 1 jusqu'à 24.

Les $A(6)$ matrices qui correspondent à ces cycles sont indiquées dans le tableau suivant:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345
9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°
<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345
17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°
<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345	<i>123456</i> 234561 345612 456123 561234 612345

Les éléments qui appartiennent aux premières parties des matrices $A(6)$ sont imprimés plus haut en italique. Les équations fonctionnelles correspondant aux matrices 1°—24° seront numérotées par les mêmes signes. L'équation (3.1) est une conséquence de chacune des équations 1°—24°. Inversement, les équations 1°—5°, comme le montrent les matrices 1°—5°, sont des

conséquences évidentes de l'équation (3.1). Par suite, les équations 1°—5° sont équivalentes à l'équation (3.1) et leur solution générale est la fonction (3.3).

En faisant, dans toutes les équations 6°—8°, $x_1 = x$, $x_3 = y$, $x_6 = z$, $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, on obtient (3.2). De même, en posant $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_6 = z$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, les équations 9°—24° ont comme conséquence la même équation (3.2).

Inversement, en partant de l'équation (3.2), on peut obtenir chacune des équations 6°—24°. Étant donné que les réductions en question, dans tous ces cas, sont semblables, nous allons indiquer seulement comment on ramène l'équation (3.2) aux équations 19° et 22°.

En mettant, dans l'équation (3.2), $x = x_1$, $y = x_2 + x_3 + x_4$, $z = x_5 + x_6$, on a

$$(5.1) \quad f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1) + f(x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3 + x_4) + \\ + f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6) + f(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0.$$

Si l'on fait $x = x_1 + x_2$, $y = x_3 + x_4$, $z = x_5 + x_6$, l'équation (3.2) devient

$$(5.2) \quad f(x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1 + x_2) + f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2, x_3 + x_4) + \\ + f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6) + f(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0.$$

En retranchant les égalités (5.1) et (5.2), il vient:

$$(5.3) \quad -f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1) - f(x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3 + x_4) + \\ + f(x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1 + x_2) + f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2, x_3 + x_4) = 0.$$

Étant donné que l'équation (3.1) est une conséquence de (3.2), on a

$$f(x_1, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1) = 0, \\ f(x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6 + x_1) + f(x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3 + x_4) = 0, \\ f(x_4 + x_5, x_6 + x_1 + x_2 + x_3) + f(x_6 + x_1 + x_2 + x_3, x_4 + x_5) = 0.$$

Par addition de ces égalités et de (5.3), on trouve

$$f(x_1, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + f(x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6 + x_1) + \\ + f(x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1 + x_2) + f(x_4 + x_5, x_6 + x_1 + x_2 + x_3) + \\ + f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2, x_3 + x_4) + f(x_6 + x_1 + x_2 + x_3, x_4 + x_5) = 0,$$

ce qui est précisément l'équation correspondant à la matrice 19°.

Montrons enfin qu'à partir de (3.2) on peut obtenir l'équation 22°, c'est-à-dire que chaque fonction $f(x, y)$ vérifiant l'équation (3.2), vérifie 22° également.

D'après (3.2) on peut écrire les relations suivantes:

$$f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_6 + x_1) + f(x_6 + x_1 + x_2 + x_3, x_4 + x_5) + \\ + f(x_4 + x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3) + f(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& f(x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1 + x_2) + f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2, x_3 + x_4) \\
& \quad + f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6) + f(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0, \\
& -f(x_4 + x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3) - f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2 + x_3, x_4) \\
& \quad - f(x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6 + x_1) - f(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0, \\
& -f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6) - f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1) \\
& \quad - f(x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3 + x_4) - f(0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0.
\end{aligned}$$

Selon (3.1), qui est une conséquence de (3.2), on trouve

$$\begin{aligned}
& f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2 + x_3, x_4) + f(x_4, x_5 + x_6 + x_1 + x_2 + x_3) = 0, \\
& f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1) + f(x_1, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 0, \\
& f(x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6 + x_1) + f(x_5 + x_6 + x_1, x_2 + x_3 + x_4) = 0.
\end{aligned}$$

Par addition des sept dernières égalités, il vient

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + f(x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_6 + x_1) \\
& \quad + f(x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1 + x_2) + f(x_4, x_5 + x_6 + x_1 + x_2 + x_3) \\
& \quad + f(x_5 + x_6 + x_1 + x_2, x_3 + x_4) + f(x_6 + x_1 + x_2 + x_3, x_4 + x_5) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation correspondant à la matrice 22° .

Puisque toutes les équations $6^\circ-24^\circ$ sont équivalentes à l'équation (3.2), on conclut que la solution de chacune de ces équations est donnée par (3.7).

6. Quelques questions de recherche

En connexion avec des problèmes traités dans cet article on peut faire des généralisations intéressantes dans diverses voies et poser plusieurs questions de recherche. Ainsi, par exemple, on pourrait décomposer la matrice $A(n)$ en plusieurs parties avec des conditions convenablement choisies.

On pourrait aussi essayer de calculer:

- le nombre des différentes B caractéristiques pour $n (= 2m)$ fixe;
- le nombre des différents cycles de l'ensemble B_{2m} ;
- le nombre des différents cycles auto conjugués de l'ensemble B_{2m} ;
- le nombre des différents cycles de B_{2m} , ayant une période fixe, etc.

7. Remarque

Un résumé des résultats indiqués plus haut a été présenté à la séance de l'Académie des sciences de Paris, le 26 novembre 1962 [4].

R É F É R E N C E S

[1] J. J. Sylvester: *Note sur le théorème de Legendre cité dans une Note insérée dans les Comptes rendus*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 96, 1883, p. 463.

Voir aussi:

G. Pólya und G. Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. 2, Berlin 1925, S. 119 (Aufgabe 21), S. 326—327.

[2] D. Ž. Djoković: *Sur quelques équations fonctionnelles se réduisant à l'équation de Cauchy*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, N° 63, 1961, p. 21—28.

[3] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel 1961.

[4] D. S. Mitrinović et D. Ž. Djoković: *Propriétés d'une matrice cyclique et ses applications à une équation fonctionnelle*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 255, 1962, p. 3109—3110.