

## ANWENDUNG EINES NEUEN DIFFERENZENVERFAHRENS AUF DIE AUSBREITUNG NICHTLINEARER DRUCKWELLEN

*Robert Sauer*

(Eingegangen am 29. XI 1962)

### EINLEITUNG

In der vorliegenden Abhandlung wird ein neues Differenzenverfahren, nämlich das sogenannte „Nebencharakteristiken—Verfahren“, auf gasdynamische Probleme angewandt. Eine ausführliche Herleitung und Beschreibung des Verfahrens findet sich in einem Artikel der Zeitschrift „Numerische Mathematik“ [1].

In § 1 wird für den Leser, der den Artikel in der „Numerischen Mathematik“ nicht zur Hand hat, das Differenzenverfahren kurz auseinandergesetzt. Die §§ 2 und 3 dienen der Erörterung der gasdynamischen Probleme und zwar behandelt § 2 die Ausbreitung der ebenen und § 3 die Ausbreitung der allgemeinen räumlichen nichtlinearen Druckwellen in vollkommenen Gasen bei vorgegebenem Anfangszustand. In beiden Fällen liegt ein hyperbolisches Anfangswertproblem quasilinearer partieller Differentialgleichungen vor. In § 2 hat man 3 Differentialgleichungen für 3 gesuchte Funktionen von 3 unabhängigen Veränderlichen (Zeit  $t$ , Ortskoordinaten  $x, y$ ), in § 3 sind es 4 Differentialgleichungen für 4 gesuchte Funktionen von 4 unabhängigen Veränderlichen ( $t, x, y, z$ ).

Es wird sich zeigen, dass das neue Differenzenverfahren für die numerische Lösung der gasdynamischen Probleme mit 3 oder 4 unabhängigen Veränderlichen gegenüber dem bisher verwendeten sogenannten „Bicharakteristiken—Verfahren“, [2], [3], [4], [5], erhebliche Vorteile besitzt.

### § 2. KURZE BESCHREIBUNG DES NEBENCHARAKTERISTIKEN—VERFAHRENS

Wir erläutern das Verfahren für  $m=3$  quasilineare partielle Differentialgleichungen für  $m=3$  gesuchte Funktionen  $u, v, w$  der  $n=3$  unabhängigen Veränderlichen  $t, x, y$ . Die Übertragung auf  $m>3$  und  $n>3$  bietet keine Schwierigkeiten.

**1. Differentialgleichungen und Anfangswertaufgabe.** — Vorgegeben sind die 3 quasilinearen Differentialgleichungen ( $\mu' = 1, 2, 3$ )

$$(1) \quad \begin{aligned} & (a_{\mu'1} u_t + b_{11}^{(\mu')} u_x) + (a_{\mu'2} v_t + b_{12}^{(\mu')} v_x) + (a_{\mu'3} w_t + b_{13}^{(\mu')} w_x) \\ & = h_{\mu'} - b_{21}^{(\mu')} u_y - b_{22}^{(\mu')} v_y - b_{23}^{(\mu')} w_y. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a, b, h$  sind Funktionen von  $t, x, y$ . Die Determinante der  $a$  soll nicht verschwinden, die 3 Gln. (1) lassen sich dann also nach  $u_t, v_t, w_t$  auflösen.

In einem abgeschlossenen Bereich der Ebene  $t=0$  sind die Funktionen  $u(0, x, y) = \bar{u}(x, y)$ ,  $v(0, x, y) = \bar{v}(x, y)$ ,  $w(0, x, y) = \bar{w}(x, y)$  vorgegeben. Es soll dann in einem gewissen „Bestimmtheitsbereich“ des Halbraumes  $t > 0$  genau eine Lösung  $u(t, x, y)$ ,  $v(t, x, y)$ ,  $w(t, x, y)$  der Differentialgleichungen (1) geben, welche die Anfangsbedingungen  $u(t, x, y) \rightarrow \bar{u}(x, y)$ ,  $v(t, x, y) \rightarrow \bar{v}(x, y)$ ,  $w(t, x, y) \rightarrow \bar{w}(x, y)$  für  $t \rightarrow +0$  erfüllt.

**2. Umformung auf charakteristische Flächenelemente.** — Wir setzen voraus, dass das Problem hyperbolisch ist. Das heisst: In jedem Punkt  $S$  des Bestimmtheitsbereichs im  $x, y, t$ -Raum gibt es eine einparametrische Menge von Flächenelementen („charakteristische Flächenelemente“) derart, dass die Differentialgleichungen (1) eine lineare Beziehung zwischen den inneren Ableitungen der  $u, v, w$  in je 2 Richtungen dieser Flächenelemente liefern. Die Richtungen durch  $S$  in den charakteristischen Flächenelementen heissen „charakteristische Richtungen“. Diejenigen Richtungen, in denen die Flächenelemente das Hüllgebilde („charakteristischer Kegel“) berühren, sollen als „bicharakteristische“, die übrigen charakteristischen Richtungen als „nebencharakteristische Richtungen“ bezeichnet werden.

Die zur  $y$ -Achse parallelen charakteristischen Flächenelemente und die in ihnen verlaufenden charakteristischen Richtungen lassen sich folgendermassen ermitteln:

Durch die Linearkombination der Gln. (1) ergibt sich

$$(2) \quad (A_1 u_t + B_1 u_x) + (A_2 v_t + B_2 v_x) + (A_3 w_t + B_3 w_x) = H$$

mit

$$(3) \quad A_k = \sum_{\mu'=1}^3 \sigma_{\mu'} a_{\mu'k}, \quad B_k = \sum_{\mu'=1}^3 \sigma_{\mu'} b_{1k}^{(\mu')},$$

$$(4) \quad H = \sum_{\mu'=1}^3 (h_{\mu'} - b_{21}^{(\mu')} u_y - b_{22}^{(\mu')} v_y - b_{23}^{(\mu')} w_y) \sigma_{\mu'}.$$

Auf der linken Seite der Gl. (2) werden  $u, v, w$  nach Richtungen parallel zur  $x, t$ -Ebene abgeleitet. Damit sich in allen 3 Fällen dieselbe Richtung ergibt, müssen die  $B_k$  den  $A_k$  proportional sein, also

$$B_1 = \tau A_1, \quad B_2 = \tau A_2, \quad B_3 = \tau A_3 \quad (\text{vorausgesetzt } A_k \neq 0),$$

woraus nach Einsetzen der Ausdrücke  $A_k, B_k$  aus den Gln. (3) die Bedingungen

$$(5) \quad \sum_{\mu'=1}^3 \sigma_{\mu'} (b_{1k}^{(\mu')} - \tau a_{\mu'k}) = 0 \quad \text{mit } k = 1, 2, 3$$

folgen. Sie liefern für den Proportionalitätsfaktor  $\tau$  die Bestimmungsgleichung

$$(6) \quad \det (b_{1k}^{(\mu')} - \tau a_{\mu'k}) = 0 \quad \text{mit } k = 1, 2, 3 \text{ und } \mu' = 1, 2, 3.$$

Gl. (6) ist eine Gleichung dritten Grades für  $\tau$ . Wir setzen voraus, dass sie nur reelle (2 oder 3) Wurzeln  $\tau_\rho$  hat ( $\rho = 1, 2$  oder  $= 1, 2, 3$ ) und dass

man mit diesen 2 bzw. 3 Werten  $\tau_\rho$  drei linear unabhängige Gleichungen (3) erhält. Mit

$$(7) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_\rho \frac{\partial}{\partial x}$$

kann man diese Gleichungen dann in der Form

$$(8) \quad A_1^{(\mu)} \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho u + A_2^{(\mu)} \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho v + A_3^{(\mu)} \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho w = H_\mu$$

mit  $\mu = 1, 2, 3$  und  $\rho = \rho(\mu)$  schreiben. Die Ableitungen  $\left(\frac{d}{dt}\right)_\rho$  sind nach den Richtungen

$$(9) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_\rho = \tau_\rho, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_\rho = 0$$

genommen.

Die Gln. (8) sind lineare Beziehungen zwischen den inneren Ableitungen  $\left(\frac{d}{dt}\right)_\rho$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  der gesuchten Funktionen  $u, v, w$  in den Ebenen  $(x-x_S) - \tau_\rho(t-t_S) = 0$  durch den Punkt  $S(x_S, y_S, t_S)$ . Infolgedessen sind diese Ebenen für den Punkt  $S$  charakteristische Ebenen und die durch Gl. (9) festgelegten Richtungen charakteristische (bi- bzw. nebencharakteristische) Richtungen in den betreffenden Ebenen. Die in diesen Richtungen verlaufenden Geraden durch  $S$  nennen wir Charakteristiken.

Die übrigen Charakteristiken derselben Ebenen ergeben sich dadurch, dass man in den Gln. (9) eine beliebige  $y$ -Komponente hinzufügt. Anstelle der Gln. (9), (7), (8) und (4) treten dann die allgemeineren Gleichungen ( $\lambda_\rho =$  beliebige Parameter)

$$(9^*) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_\rho^* = \tau_\rho, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_\rho^* = \lambda_\rho,$$

$$(7^*) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho^* = \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho + \lambda_\rho \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_\rho^* \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\rho^* \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(8^*) \quad A_1^{(\mu)} \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho^* u + A_2^{(\mu)} \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho^* v + A_3^{(\mu)} \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho^* w = H_\mu^*,$$

$$(4^*) \quad H_\mu^* = H_\mu + \lambda_\rho (A_1^{(\mu)} u_y + A_2^{(\mu)} v_y + A_3^{(\mu)} w_y).$$

Die Gln. (9) bzw. (9\*) nennt man „Richtungsbedingungen“, die Gln. (8) bzw. (8\*) „Verträglichkeitsbedingungen“.

In den vorangehenden Betrachtungen wurde die  $x$ -Achse ausgezeichnet. Dabei ergaben sich die zur  $x, t$ -Ebene senkrechten charakteristischen Ebenen. Bei analoger Auszeichnung der  $y$ -Achse erhält man die zur  $y, t$ -Ebene senkrechten charakteristischen Ebenen.

**3. Numerik.** — Ersetzt man in den Gl. (7), (8), (9) bzw. (7\*), (8\*), (9\*) die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten, so liefern sie ein Differenzenverfahren zur angenäherten numerischen Bestimmung der  $u, v, w$  nacheinander in den Ebenen  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$  usw. Sind die Werte  $u, v, w$  in einer Ebene  $t$  bereits ermittelt, so erhält man für die  $u, v, w$  in der Ebene  $t + \Delta t$  aus den Gln. (8) bzw. (8\*) jeweils 3 Gleichungen. Ebenso wie bei den übrigen

Differenzenverfahren sind dies lineare Gleichungen, wenn man die Koeffizienten aus den bereits bekannten Werten  $u, v, w$  in der Ebene  $t$  bildet; verwendet man dagegen Mittelwerte aus den Werten in den Ebenen  $t$  und  $t + \Delta t$ , dann sind die Gleichungen i. a. nicht linear und können etwa iterativ aufgelöst werden.

Zweckmässig berechnet man die  $u, v, w$  in senkrecht übereinander liegenden Rechtecksgittern der Ebenen  $t = \text{const.}$

Verwendet man neben den Gln. (7) bis (9) bzw. (7\*) bis (9\*) auch die analogen Gleichungen für die zur  $t, y$ -Ebene senkrechten charakteristischen Ebenen, so bekommt man für  $u, v, w$  jeweils ein überbestimmtes System mit  $2 \times 3 = 6$  Gleichungen. Die Auflösung dieser überbestimmten Systeme mit den Methoden der Ausgleichsrechnung wird i. a. bessere Näherungswerte liefern. Die hierbei benützten charakteristischen Ebenen schliessen den charakteristischen Kegel ein und die  $\lambda_\rho$  werden am besten so gewählt, dass die durch die Gln. (7\*) bestimmten Charakteristiken (—i. a. werden es Nebencharakteristiken sein—) annähernd in der Mitte der Seitenflächen der den charakteristischen Kegel einschliessenden, von den charakteristischen Ebenen erzeugten Pyramide liegen.

Der wesentliche Vorteil dieses „Nebencharakteristiken—Verfahrens“ gegenüber dem „Bicharakteristiken—Verfahren“ besteht darin, dass man den charakteristischen Kegel nicht zu bestimmen braucht. Zur ausführlicheren Orientierung über das Nebencharakteristiken—Verfahren sei auf die Originalarbeit [1] verwiesen.

### § 3. AUSBREITUNG NICHTLINEARER EBENER DRUCKWELLEN

Wir wenden jetzt das Nebencharakteristiken—Verfahren auf ein gasdynamisches Problem an, nämlich auf die Untersuchung nichtlinearer ebener Druckwellen in einem inhomogenen gasförmigen Medium in beliebigem Bewegungszustand.

**1. Aufstellung der Differentialgleichungen; Anfangswertaufgabe.** — Es wird vorausgesetzt, dass es sich um ein vollkommenes Gas mit konstanten spezifischen Wärmen  $c_p$  und  $c_v$  bei konstantem Druck bzw. Volumen handelt ( $\gamma = c_p/c_v > 1$ ) und dass die Entropie örtlich und zeitlich konstant ist. Dann bestehen zwischen dem Druck  $p$ , der Dichte  $\rho$  und der Schallgeschwindigkeit  $a$  ( $p, \rho, a = \text{Funktionen von } t \text{ und } x, y$ ) die Beziehungen

$$p \rho^\gamma = \text{const}, \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho},$$

also

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \right) = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Durch Einsetzen in die beiden Komponentengleichungen des Erhaltungssatzes des Impulses (Bewegungsgleichungen) und den Erhaltungssatz der Masse (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{du}{dt} = u_t + uu_x + vu_y = -p_x/\rho,$$

$$\frac{dv}{dt} = v_t + uv_x + vv_y = -p_y/\rho,$$

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0$$

( $u, v =$  Komponenten der Gasgeschwindigkeit) erhält man dann schliesslich

$$(10) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \frac{2}{\gamma-1} aa_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{2}{\gamma-1} aa_y &= 0, \\ \frac{2}{\gamma-1} (a_t + ua_x + va_y) + a(u_x + v_y) &= 0. \end{aligned}$$

Dies sind 3 quasilineare Differentialgleichungen für die 3 gesuchten Funktionen  $u, v, a$  der 3 unabhängigen Veränderlichen  $t, x, y$ . Entsprechend § 2 stellen wir die Anfangswertaufgabe: Der Zustand des Gases, gekennzeichnet durch  $u, v$  und  $a$ , ist für  $t=0$  gegeben und soll für  $t>0$  ermittelt werden.

**2. Anwendung des Nebencharakteristiken-Verfahrens.** — Multipliziert man die 3 Differentialgleichungen (10) mit  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , so ergibt sich nach den Gln. (5)

$$\sigma_1(u-\tau) + \sigma_3 a = 0, \quad \sigma_2(u-\tau) = 0, \quad \sigma_1 a + \sigma_3(u-\tau) = 0$$

und nach Gl. (6)

$$0 = \begin{vmatrix} u-\tau & 0 & a \\ 0 & u-\tau & 0 \\ a & 0 & u-\tau \end{vmatrix} = (u-\tau) [(u-\tau)^2 - a^2],$$

also

$$\tau_{1,2} = u \pm a, \quad \tau_3 = u.$$

Hieraus folgen die 3 Linearkombinationen

$$\sigma_1^{(\mu)}, \sigma_2^{(\mu)}, \sigma_3^{(\mu)} = \begin{cases} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \end{cases}$$

mit den Richtungsbedingungen

$$(11) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_\mu^* = \begin{cases} u+a \\ u-a \\ u \end{cases}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_\mu^* = \lambda_\mu \text{ mit } \mu = \rho = 1, 2, 3.$$

Mit den Ableitungen

$$(12) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_\mu^* = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_\mu \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial y}$$

erhält man dann als Verträglichkeitsbedingungen

$$(13) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_1^* \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right) &= -v \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y - av_y + \lambda_1 \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)_2^* \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right) &= -v \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y + av_y + \lambda_2 \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)_3^* v &= -vv_y - \frac{2}{\gamma-1} aa_y + \lambda_3 v_y. \end{aligned}$$

**3. Vergleich mit dem Bicharakteristiken—Verfahren.** — Beim Bicharakteristiken—Verfahren muss man zunächst die charakteristischen Kegel ermitteln. Im vorliegenden Fall sind dies Kegel dritter Klasse. Sie zerfallen jeweils in einen i. a. schiefen Kreiskegel und ein Ebenenbüschel. Liegt der Kegelscheitel  $S$  in der Ebene  $t + \Delta t$ , so ist die Basiskurve des Kreiskegels in der Ebene  $t$  ein Kreis mit dem Radius  $a \Delta t$ .  $M$  sei der Mittelpunkt des Basiskreises,  $\hat{S}$  der Grundriss von  $S$  in der Ebene  $t$  (vgl. Fig. 1 und

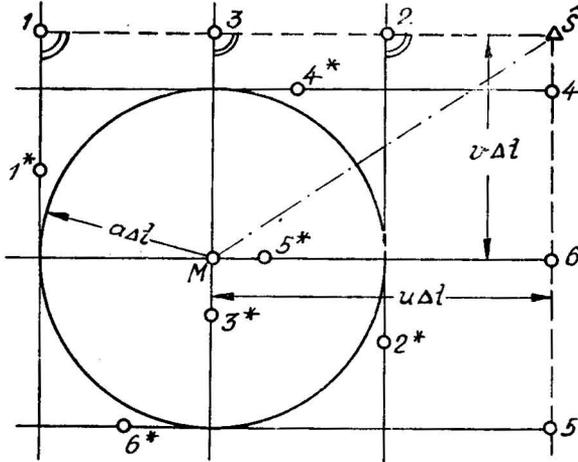


Fig. 1 — Nebencharakt.—Verfahren

2). Der Vektor  $\overrightarrow{MS}$  hat die Komponenten  $u \Delta t$ ,  $v \Delta t$ , ist also der mit  $\Delta t$  multiplizierte Vektor der Gasgeschwindigkeit. Die Achse des vorher genannten Ebenenbüschels ist die Gerade  $MS$ .

Beim Nebencharakteristiken—Verfahren sind 1, 2, 3 die Basispunkte der sich bei  $\lambda_\mu = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) ergebenden Charakteristiken; für  $\lambda_\mu \neq 0$  treten dafür irgend welche anderen Punkte  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$  auf den 3 in Fig. 1 eingezeichneten  $y$ -Paralleln. Die  $x$ -Parallelen mit den Punkten 4, 5, 6 und  $4^*$ ,  $5^*$ ,  $6^*$  haben die entsprechende Bedeutung, wenn man anstelle der  $x$ -Achse die  $y$ -Achse auszeichnet (vgl. § 2, Ziff. 2, Schlussabsatz). Falls die Punkte  $1^*$  bis  $6^*$  in die Berührungspunkte des Kreises mit dem unbeschriebenen Quadrat bzw. in den Kreismittelpunkt  $M$  fallen, sind die betreffenden Charakteristiken Bicharakteristiken, andernfalls sind es Nebencharakteristiken.

Beim Bicharakteristiken—Verfahren, wie es in [3], [4] und [5] verwendet wird, benutzt man die Bicharakteristiken  $\overline{1S}$ ,  $\overline{2S}$ ,  $\overline{3S}$  (vgl. Fig. 2), die sich in der Grundrissebene  $t$  in Richtung der Gasgeschwindigkeit projizieren.

Die Grundgleichungen des Bicharakteristiken—Verfahren lassen sich aus unseren allgemeineren Gln. (11) bis (13) auf sehr einfache Weise durch folgende Spezialisierung gewinnen:

Man dreht das Koordinatensystem um die  $t$ -Achse so, dass die positive  $x$ -Achse in die Richtung  $\overline{1\hat{S}}$ , also in die Richtung der momentanen Gasgeschwindigkeit des betreffenden Punktes im Strömungsfeld fällt. Dann ist in diesem lokalen Koordinatensystem

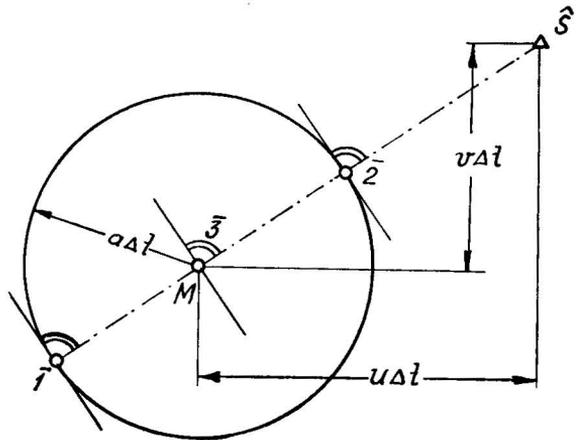


Fig. 2 — Bicharakt.—Verfahren

$$u = V, \quad v = 0, \quad v_y = V \frac{d\vartheta}{dn} \quad [V, \vartheta = \text{Polarkoordinaten des Vektors } (u, v)]$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{ds} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{dn} \end{array} \right\} = \text{Ableitung} \left\{ \begin{array}{l} \text{in Richtung der Gasgeschwindigkeit,} \\ \text{senkrecht zur Gasgeschwindigkeit.} \end{array} \right.$$

Ausserdem setzen wir  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

Die Gln. (12) und (13) gehen dann über in

$$(12) \quad \left( \frac{\bar{d}}{dt} \right)_\mu = \frac{\partial}{\partial t} + \begin{cases} (V+a) \frac{d}{ds} \\ (V-a) \frac{d}{ds} \\ V \frac{d}{ds} \end{cases}$$

und

$$(13) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\bar{d}}{dt} \right)_1 \left( V + \frac{2}{\gamma-1} a \right) &= -aV \frac{d\vartheta}{dn}, \\ \left( \frac{\bar{d}}{dt} \right)_2 \left( V - \frac{2}{\gamma-1} a \right) &= +aV \frac{d\vartheta}{dn}, \\ V \left( \frac{\bar{d}}{dt} \right)_3 \vartheta &= -\frac{2}{\gamma-1} a \frac{da}{dn}. \end{aligned}$$

Ein auf diese Gleichungen der Bicharakteristiken—Methode aufgebautes Differenzenverfahren hat gegenüber dem vorher beschriebenen Nebencharakteristiken—Verfahren folgende Nachteile:

a) Während in den Gln. (12) und (13) des Nebencharakteristiken—Verfahrens in den  $t$ -Ebenen immer nur in den Richtungen  $\frac{\partial}{\partial y}$  (—bei Auszeichnung der  $x$ -Achse—) bzw.  $\frac{\partial}{\partial x}$  (—bei Auszeichnung der  $y$ -Achse—) Ableitungen numerisch approximiert werden müssen, sind die Ableitungsrichtungen  $\frac{d}{ds}$  und  $\frac{d}{dn}$  in den Gln. (12) und (13) von Punkt zu Punkt verschieden und i. a. nicht parallel zu den  $x$ - und  $y$ -Achsen. Der numerische Arbeitsaufwand, insbesondere die Interpolationsarbeit, ist daher erheblich grösser.

b) Das Nebencharakteristiken—Verfahren führt, wenn man einmal die  $x$ -Achse und ein anderes Mal die  $y$ -Achse auszeichnet (vgl. § 2, Ziff. 2,

Schlussabsatz), zu einem überbestimmten Gleichungssystem, auf das man die Methoden der Ausgleichsrechnung anwenden kann. Bei den Gln. (13) ist diese für die Erhöhung der Genauigkeit nützliche Möglichkeit nicht gegeben.

#### § 4. AUSBREITUNG NICHTLINEARER RÄUMLICHER DRUCKWELLEN

**1. Differentialgleichungen und Anfangswertaufgabe.** — Bei einer räumlichen nichtstationären Gasströmung hat der Vektor der Gasgeschwindigkeit 3 Komponenten  $u, v, w$ . Es sind jetzt die 4 Funktionen  $u, v, w$  und  $a$  zu bestimmen in Abhängigkeit von den 4 unabhängigen Veränderlichen  $t$  und  $x, y, z$ .

Anstelle des dreigliedrigen Differentialgleichungssystems (10) tritt das viergliedrige System.

$$(14) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{2}{\gamma-1} aa_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{2}{\gamma-1} aa_y &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{2}{\gamma-1} aa_z &= 0, \\ \frac{2}{\gamma-1} (a_t + ua_x + va_y + wa_z) + a(u_x + v_y + w_z) &= 0. \end{aligned}$$

Die zu lösende Anfangswertaufgabe lautet: Der Zustand des Gases ( $u, v, w, a$ ) ist zur Zeit  $t=0$  gegeben und soll für  $t>0$  ermittelt werden.

**2. Anwendung des Nebencharakteristiken—Verfahrens.** — Wie in § 3, Ziff. 2, erhält man

$$\sigma_1(u-\tau) + \sigma_4 a = 0, \quad \sigma_2(u-\tau) = 0, \quad \sigma_3(u-\tau) = 0 \quad \sigma_1 a + \sigma_4(u-\tau) = 0$$

und hierauf

$$0 = \begin{vmatrix} u-\tau & 0 & 0 & a \\ 0 & u-\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-\tau & 0 \\ a & 0 & 0 & u-\tau \end{vmatrix} = (u-\tau)^2 [(u-\tau)^2 - a^2],$$

also

$$\tau_{1,2} = u \pm a, \quad \tau_3 = \tau_4 = u.$$

Hieraus folgen die 4 Linearkombinationen

$$\sigma_1^{(\mu)}, \sigma_2^{(\mu)}, \sigma_3^{(\mu)}, \sigma_4^{(\mu)} = \begin{cases} 1, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{cases}$$

mit den Richtungsbedingungen

$$(15) \quad \left( \frac{dx}{dt} \right)_\rho^* = \begin{cases} u+a \\ u-a \\ u \end{cases}, \quad \left( \frac{dy}{dt} \right)_\rho^* = \lambda_\rho, \quad \left( \frac{dz}{dt} \right)_\rho^* = v_\rho \quad (\rho=3 \text{ für } \mu=3 \text{ und } \mu=4).$$

Hier treten also neben den beliebigen Parametern  $\lambda_\rho$  noch die weiteren beliebigen Parameter  $\nu_\rho$  auf.

Mit den Ableitungen

$$(16) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_\rho^* = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_\rho \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_\rho \frac{\partial}{\partial y} + \nu_\rho \frac{\partial}{\partial z} \quad (\rho = 1, 2, 3)$$

ergeben sich die Verträglichkeitsbedingungen

$$(17) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_1^* \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right) &= -v \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y - w \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right)_z - a (v_y + w_z) \\ &\quad + \lambda_1 \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y + \nu_1 \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a\right)_z, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)_2^* \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right) &= -v \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y - w \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right)_z + a (v_y + w_z) \\ &\quad + \lambda_2 \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right)_y + \nu_2 \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a\right)_z, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)_3^* v &= -v v_y - w v_z - \frac{2}{\gamma-1} a a_y \\ &\quad + \lambda_3 v_y + \nu_3 v_z, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)_3^* w &= -v w_y - w w_z - \frac{2}{\gamma-1} a a_z \\ &\quad + \lambda_3 w_y + \nu_3 w_z. \end{aligned}$$

**3. Übergang zum Bicharakteristiken—Verfahren.** — Wir verzichten darauf, die Charakteristikentheorie in der vierdimensionalen  $t, x, y, z$ —Raumzeitwelt geometrisch zu interpretieren und beschränken uns darauf, ähnlich wie in § 3, Ziff. 3, die Richtungs— und Verträglichkeitsbedingungen auf lokale  $x, y, z$ —Koordinatensysteme zu transformieren, in denen die positive  $x$ -Achse jeweils in die Richtung der momentanen Gasgeschwindigkeit weist. Dann ist in einem solchen lokalen Koordinatensystem

$$u = V, \quad v = w = 0, \quad v_y = V \frac{d\vartheta}{dn}, \quad w_y = V \frac{d\omega}{dn}, \quad v_z = V \frac{d\vartheta}{dm}, \quad w_z = V \frac{d\omega}{dm}$$

( $V, \vartheta, \omega$  = räumliche Polarkoordinaten (Betrag, geographische Länge und Breite) des Vektors  $(u, v, w)$ )

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{ds} &= \text{Ableitung in Richtung der Gasgeschwindigkeit,} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{dn} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dm} \end{aligned} \right\} = \text{Ableitungen senkrecht zur Gasgeschwindigkeit} \left\{ \begin{aligned} // x, y \text{ — Ebene} \\ // x, z \text{ — Ebene} \end{aligned} \right.$$

Mit  $\lambda_p = 0$  und  $\nu_p = 0$  spezialisieren sich dann die Gln. (16) und (17) zu

$$(16) \quad \left(\frac{\bar{d}}{dt}\right)_\rho = \frac{\partial}{\partial t} + \begin{cases} (V+a) \frac{d}{ds}, \\ (V-a) \frac{d}{ds}, \\ V \frac{d}{ds} \end{cases} \quad (\rho = 3 \text{ für } \mu = 3 \text{ und } \mu = 4)$$

und

$$(17) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\bar{d}}{dt}\right)_1 \left(V + \frac{2}{\gamma-1} a\right) &= -aV \left(\frac{d\vartheta}{dn} + \frac{d\omega}{dm}\right), \\ \left(\frac{\bar{d}}{dt}\right)_2 \left(V - \frac{2}{\gamma-1} a\right) &= +aV \left(\frac{d\vartheta}{dn} + \frac{d\omega}{dm}\right), \\ V \left(\frac{\bar{d}}{dt}\right)_3 \vartheta &= -\frac{2}{\gamma-1} a \frac{da}{dn}, \\ V \left(\frac{\bar{d}}{dt}\right)_3 \omega &= -\frac{2}{\gamma-1} a \frac{da}{dm}. \end{aligned}$$

#### SCHLUSSBEMERKUNG

In ähnlicher Weise wie die hier erörterten ebenen und räumlichen nichtstationären Gasströmungen lassen sich auch die räumlichen stationären Gasströmungen, bei denen die Gasgeschwindigkeit grösser ist als die lokale Schallgeschwindigkeit, mit Hilfe des Nebencharakteristiken—Verfahrens einer numerischen Behandlung zugänglich machen.

Bei Verwendung eines mittelgrossen Rechenautomaten bleibt bei allen hier besprochenen Problemen der Arbeitsaufwand in tragbaren Grenzen.

#### LITERATUR

- [1] R. Sauer: *Differenzenverfahren für hyperbolische Anfangswertprobleme bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen mit Hilfe von Nebencharakteristiken*. Num. Math. Bd. 5 (1963), S. 55—67.
- [2] R. Sauer: *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen*. 2. Aufl., S. 156—163, Springer Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.
- [3] G. Bruhn und W. Haack: *Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale instationäre Gasströmungen*. ZAMP IX b (1958), S. 173—192.
- [4] R. Schätz: *Über optimale Charakteristikenverfahren bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen*. Diss. TH München (1961).
- [5] W. Werner: *Instabilität stossfreier, transsonischer Profilstömungen*. ZAMM 41 (1961), S. 448—458.