PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 39—42.

SUR UNE MÉTHODE DE N. SALTYKOW DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

B. Rachajsky

(Reçu le 19. X 1962)

N. Saltykow avait communiqué à une des séances de l'Institut mathématique en 1959 une méthode très intéressante pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. (Jusqu'à présent cette méthode n'a pas été publiée). Notre but est maintenant de démontrer que la méthode exposée a des liaisons avec certaines notions et certains résultats de la théorie des équations aux dérivées partielles qui sont en involution de *Darboux* du troisième ordre, [1].

1. La méthode de N. Saltykow. Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y

(1) $$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad f_r f_t \neq 0,$$

où l'on a posé $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$, $r = \partial^2 z/\partial x^2$, $s = \partial^2 z/\partial x\, \partial y$, $t = \partial^2 r/\partial y^2$, $f_r = \partial f/\partial r$, $f_s = \partial f/\partial s$. On supposera que $f \in C^2(G)$, où G est un domaine déterminé des variables x, y, z, p, q, r, s, t.

Formons les équations dérivées de l'équation (1) respectivement par rapport à x et y, à savoir

(2) $$\begin{aligned} f_r a + f_s b + f_t c + D_x f = 0, \\ f_r b + f_s c + f_t d + D_y f = 0, \end{aligned}$$

en posant

$$a = \partial^3 z/\partial x^3, \quad b = \partial^3 z/\partial x^2\, \partial y, \quad c = \partial^3 z/\partial x\, \partial y^2, \quad d = \partial^3 z/\partial y^3, \quad f_s = \partial f/\partial s,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} + a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{\partial}{\partial s} + c\frac{\partial}{\partial t},$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q} + b\frac{\partial}{\partial r} + c\frac{\partial}{\partial s} + d\frac{\partial}{\partial t},$$

et ajoutons y une équation auxiliaire

(3) $$b - m(x, y, z, p, q, r, s, t)\, c = 0.$$

La fonction m doit satisfaire aux conditions qui seront précisées plus tard.

Grâce à l'équation (3), on peut mettre les équations dérivées (2) sous la forme suivante

$$(2') \qquad \begin{aligned} &a+(mf_s+f_t)\ /\ mf_r b+D_x f\ /\ f_r=0,\\ &c+f_t\ /\ (mf_r+f_s)\, d+D_y f\ /\ (mf_r+f_s)=0. \end{aligned}$$

Supposons que les coefficients de b et d des équations ci-dessus satisfont aux conditions

$$(mf_s+f_t)\ /\ mf_r=-m, \quad f_t\ /\ (mf_r+f_s)=-m;$$

on aura alors une seule condition pour la fonction m:

$$(4) \qquad f_r m^2+f_s m+f_t=0.$$

Par conséquent les équations (2′) et (3) peuvent être écrites sous la forme

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x}-m\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{l}{f_r}D_x f=0,\\ &\frac{\partial s}{\partial x}-m\frac{\partial s}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial t}{\partial x}-m\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{m}{f_t}D_y f=0. \end{aligned}$$

Les équations obtenues (5) et les identités évidentes de la forme suivante

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x}-m\frac{\partial z}{\partial y}=p-mq,\\ &\frac{\partial p}{\partial x}-m\frac{\partial p}{\partial y}=r-ms,\\ &\frac{\partial q}{\partial x}-m\frac{\partial q}{\partial y}=s-mt \end{aligned}$$

représentent un système de la forme de *Charpit* à six fonctions inconnues: z, p, q, r, s, t de deux variables indépendantes x et y, [2]. (Dans le livre de *Hilbert et Courant*, [3], pour le système de cette espèce on emploie la dénomination „système des équations qui ont *la même partie principale*").

Le système correspondant d'équations différentielles ordinaires *„caractéristiques"* devient

$$(7) \qquad dx=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{p-mq}=\frac{dp}{r-ms}=\frac{dq}{s-mt}=-\frac{dr}{D_x f/f_r}=\frac{ds}{0}=\frac{dt}{mD_y f/f_t}.$$

Il ne reste qu'à poser la question de l'intégration de l'équation donnée (1) à l'aide de l'intégration du système (7).

2. L'involution de Darboux du troisième ordre. Posons maintenant le problème suivant: associons à l'équation (1) une autre équation de la forme (3) de telle manière que ces deux équations soient en involution de *Darboux* du troisième ordre.

Pour établir les conditions de la dite involution nous utiliserons, par exemple, un procédé antérieurement cité, [1].

Pour cela formons les équations dérivées des équations (1) et (3)

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&f_r z_{xxxx}+f_s z_{xxxy}+f_t z_{xxyy}+D_{xx}f=0,\\
&f_r z_{xxxy}+f_s z_{xxyy}+f_t z_{xyyy}+D_{xy}f=0,\\
&f_r z_{xxyy}+f_s z_{xyyy}+f_t z_{yyyy}+D_{yy}f=0,\\
&z_{xxxy}-m\, z_{xxyy}-cD_x m=0,\\
&z_{xxyy}-m\, z_{xyyy}-cD_y m=0.
\end{aligned}
$$

D_x, D_y, D_{xx}, D_{xy}, D_{yy} désignant respectivement les dérivées partielles totales des fonctions m et f prises une ou deux fois par rapport à x et y; quant à z_{xxxx}, z_{xxxy}, etc., elles désignent les dérivées partielles du quatrième ordre de la fonction z: $\partial^4 z/\partial x^4$, $\partial^4 z/\partial x^3\partial y$, etc.

D'après les conditions de l'involution de *Darboux* du troisième ordre, les équations (8) sont insolubles par rapport aux dérivées du quatrième ordre: $z_{xxxx}, z_{xxxy}, \ldots, z_{yyyy}$. Il en résulte que tous les déterminants du cinquième ordre de la matrice des coefficients du système (8) sont égaux à zéro. On peut mettre le déterminant Δ du cinquième ordre formé des coefficients des dérivées du quatrième ordre de la fonction z — le déterminant du système (8) — sous la forme suivante

$$\Delta = f_r f_t (f_r m^2 + f_s m + f_t).$$

En égalant ce déterminant à zéro et grâce à la condition $f_r f_t \neq 0$, on a

$$(4)\qquad f_r m^2 + f_s m + f_t = 0.$$

Ce n'est que la condition (4) qui a été obtenue par la méthode de *N. Saltykow*. En utilisant la condition (4) et $f_r f_t \neq 0$, tous les autres déterminants du cinquième ordre seront égaux à zéro sous la condition suivante

$$(9)\qquad cf_t D_y m - m(cf_r D_x m + D_{xy} f) = 0.$$

Donc, si les conditions (4) et (9) sont satisfaites, les équations (1) et (3) seront en involution de *Darboux* du troisième ordre.

Comme il est bien connu, [1], on peut associer aux équations (1) et (3), qui sont en involution de *Darboux* du troisième ordre, un système d'équations différentielles ordinaires, appelé *système des caractéristiques.*

Or, en ce qui concerne la formation du système mentionné d'équations différentielles ordinaires, on peut tirer d'abord du système (8), grâce aux conditions (4) et (9), les équations suivantes

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial x} - m\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{cD_x m - m D_{xx} f}{m f_r} = 0,\\
&\frac{\partial b}{\partial x} - m\frac{\partial b}{\partial y} - cD_x m = 0,\\
&\frac{\partial c}{\partial x} - m\frac{\partial c}{\partial y} - cD_y m = 0,\\
&\frac{\partial d}{\partial x} - m\frac{\partial d}{\partial y} - \frac{m}{f_t}(cf_r D_y m + D_{yy} f) = 0.
\end{aligned}
$$

Enfin y ajoutons les équations évidentes

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}-m\frac{\partial z}{\partial y}=p-mq,\\
&\frac{\partial p}{\partial x}-m\frac{\partial p}{\partial y}=r-ms,\\
&\frac{\partial q}{\partial x}-m\frac{\partial q}{\partial y}=s-mt,\\
&\frac{\partial r}{\partial x}-m\frac{\partial r}{\partial y}=a-mb=-\frac{D_x f}{f_r},\\
&\frac{\partial s}{\partial x}-m\frac{\partial s}{\partial y}=b-mc=0,\\
&\frac{\partial t}{\partial x}-m\frac{\partial t}{\partial y}=c-md=\frac{m}{f_t}D_y f.
\end{aligned}
$$

Le système (10) et (11) est un système de *Charpit* par rapport aux fonctions inconnues: $z, p, q, r, s, t, a, b, c, d$ de deux variables indépendantes x et y. Ce système de *Charpit* est équivalent au système cherché des caractéristiques

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
dx&=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{p-mq}=\frac{dp}{r-ms}=\frac{dq}{s-mt}=\frac{dr}{D_x f/f_r}=\frac{ds}{0}=-\frac{dt}{m D_y f/f_t}=\\
&=\frac{da}{(cD_x m-mD_{xx}f)\,mf_r}=\frac{db}{cD_x m}=\frac{dd}{m(cf_r D_y m+D_{yy}f)f_t}.
\end{aligned}
$$

On peut utiliser les intégrales du système des caractéristiques pour former les solutions cherchées de l'équation donnée (1) (avec (3), (4) et (9)), [4].

3. D'après la théorie exposée ci-haut, on doit — si l'on associe à l'équation (1), avec la condition $f_r f_t \neq 0$, une autre équation (3) avec la condition $m \neq 0$ — compléter la condition (4), obtenue par la méthode de *N. Saltykow* et aussi en égalant le déterminant Δ du système (8) à zéro, avec la condition (9), en s'assurant que tous les déterminants du cinquième ordre de la matrice du système (8) sont égaux à zéro, c'est-à-dire affirment que les équations (1) et (3) sont en involution de *Darboux* du troisième ordre. Dans ce cas, on doit compléter le système des équations différentielles (7) avec les équations nouvelles et utiliser le système des caractéristiques (12).

En ce qui concerne les équations (1) et (3), on peut résoudre deux problèmes de *Jacobi* et faire la liaison entre l'intégrale du système des caractéristiques et l'intégrale complète des équations aux dérivées partielles. On peut aussi poser le problème de la formation d'une intégrale de *Cauchy* à l'aide d'une intégrale complète donnée, [1].

RÉFÉRENCES

[1] B. Rachajsky: *Sur l'involution de Darboux du troisième ordre*, Publications mathématiques, n. s., t. 1 (15), Beograd, 1961.

[2] N. Saltykow: *Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue*, Académie Serbe, t. CLXXIX, Beograde, 1947 (en serbe).

[3] D. Hilbert et R. Courant: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Partial Differential Equations by R. Courant, p. 140, Interscience Publishers, 1962.

[4] B. Rachajsky: *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes réductibles à ceux de Charpit*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la RP de Serbie, IX, 3—4, Beograd 1957.