PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 35–38.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES BEGRIFFS DES DARBOUXSCHEN VEKTORS FÜR DEN RAUM VON RIEMANN

T. P. Angelitch

(Eingegangen am 15. X 1962)

Die Frenetschen Formeln für einen Riemannschen Raum V_N von N Dimensionen und von im Allgemeinen indefiniter Metrik

(1) $$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

können, wie bekannt (W. Blaschke: Frenet's Formeln für den Raum von Riemann — Math. Zeitschrift 6, S. 94—99, 1920), in folgender Gestalt geschrieben werden

(2) $$\frac{\delta\, t^i_{(N)}}{\delta s} = -\varepsilon_{N-1}\, \varepsilon_N\, K_{N-1}\, t^i_{(N-1)}\,.$$

Dabei bezeichnet: $t^i_{(1)}$ den Einheitsvektor der Tangente einer Kurve C

(3) $$x^i = x^i(s)$$

im Raum V_N; $t^i_{(h)}$ $(h = 2, 3, \ldots, N)$ die Einheitsvektoren der $N-1$ Kurvennormalen; $\dfrac{\delta}{\delta s}$ die absolute Ableitung nach Kurvenbogen s; ε_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ die Richtungszeiger der Tangente und der Kurvennormalen (die Werte $+1$ und -1 annehmend); $K_1, K_2, \ldots, K_{N-1}$ die Krümmungen der Kurve C, wobei weiter

(4) $$K_0 = K_N = 0$$

gesetzt wird.

Im regulären Punkt der Kurve C lässt sich ein lokales natürliches N-Bein der pseudo-orthonormierten Vektoren $t^i_{(k)}$ denken, wobei allgemein

(5) $$t_{(k)\,i}\, t^i_{(l)} = \varepsilon_k\, \delta_{kl} = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{für } k = l \\ 0 & \;\;'' \quad k \neq l \end{cases}$$

ist

Unter solchen Bedingungen gilt für die Determinante $|t^i_{(k)}|$

(6) $$|t^i_k| = \pm 1$$

und der Beziehung (5) entsprechende lautet

(7) $$\sum_k t_{(k)i}\, t^j_{(k)} = \varepsilon_i\, \delta^j_i = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{für } i=j \\ 0 & \text{''} \quad i \neq j \end{cases}$$

. Die Ableitung irgendeines von diesen Einheitsvektoren, z.B. von $t_{(h)i}$ in der Richtung eines anderen $t^i_{(l)}$ ist dann durch

(8) $$t_{(h)i,j}\, t^j_{(l)}$$

gegeben. Die Projektion dieser Ableitung auf einen dritten Einheitsvektor $t^i_{(k)}$ des Systems bestimmt folgende skalare Invariante

(9) $$\gamma_{(hkl)} = t_{(h)i,j}\, t^i_{(k)}\, t^j_{(l)}\,,$$

welche *Ricci's Drehungskoeffizient* genannt wird. Die eingeklammerten Indizes beziehen sich vorläufig nur auf die Nummerung. Das System von Ricci's Koeffizienten ist, wie bekannt, in bezug auf zwei erste Indizes schiefsymmetrisch d. h.

(10) $$\begin{cases} \gamma_{(hkl)} = -\gamma_{(khl)} \\ \gamma_{(hhl)} = 0. \end{cases}$$

Für $l = 1$ ergibt die Bestimmungsgleichung (9) der Ricci's Koeffizienten

(11) $$\gamma_{(hk1)} = t^i_{(k),j}\, t_{(k)i}\, t^j_{(1)}$$

und da

(12) $$t^i_{(h),j}\, t^j_{(1)} = \frac{\delta\, t^i_{(h)}}{\delta s}\,,$$

so wird

(13) $$\gamma_{(hk1)} = \frac{\delta\, t^i_{(h)}}{\delta s}\, t_{(k)i}\,.$$

Wenn noch die Bezeichnung

(14) $$\begin{aligned} \gamma_{(hk1)} &= \omega_{hk} \\ \omega_{hk} &= -\omega_{kh} \end{aligned}$$

eingeführt wird, so lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass folgende Eigenschaft besteht

(15) $$\omega_{hk} = \left[K_h\, t^i_{(h+1)} - \varepsilon_{h-1}\, \varepsilon_h\, K_{h-1}\, t^i_{(h-1)} \right] t_{(k)i}\,,$$

woraus dann

(16) $$\omega_{h\,h+1} = \varepsilon_{h+1} K_h\,; \quad \omega_{h\,h-1} = -\varepsilon_h K_{h-1}$$

folgt.

Demnach sind in diesem System von N^2 Elementen ω_{hk} nur diejenigen Elemente von Null verschieden, deren Indizes sich um Eins unterscheiden. Die entsprechende Matrix sieht wie folgt aus

(17) $$\{\omega_{hk}\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & \varepsilon_2 K_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 K_1 & 0 & \varepsilon_3 K_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3 K_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_N K_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_N K_{N-1} & 0 \end{array} \right\}$$

Die Anzahl von Null und untereinander wesentlich verschiedener Elemente beträgt offenbar höchstens $N-1$. Ausserdem, für ein ungerades $N=2p+1$ ist immer $|\omega_{hk}|=0$, während für ein gerades $N=2p$

$$|\omega_{hk}| = K_1^2 K_3^2 \dots K_{2p-1}^2 \tag{18}$$

ist.

Nun, im dreidimensionalen Euklidischen Raum hat die Matrix (17) folgende Gestalt

$$\{\omega_{hk}\} = \begin{Bmatrix} 0 & K_1 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

und, wenn diese Matrix einen schiefsymmetrischen Tensor bestimmt, lässt sich ihm auf bekannte Weise mit Hilfe des Systems e^{ijk} ein relativer Vektor

$$\begin{cases} \vec{d} = \{d^i\} \\ d^i = \dfrac{1}{2} e^{ijk}\, \omega_{jk} \end{cases} \tag{20}$$

zuordnen. Diese Zuordnung ergibt schliesslich den bekannten Darbouxschen Vektor

$$d^i = K_2\, t^i_{(1)} + K_1\, t^i_{(3)}. \tag{21}$$

Wir nehmen deshalb an, dass auch im allgemeinen Falle ω_{hk} einen doppelt kovarianten schiefsymmetrischen Tensor vom besonderen Typus darstellt. Das ist offenbar eine Verallgemeinerung des Darbouxschen Tensors dritter Ordnung, bzw. des Darbouxschen Vektors. Diesem Tensor lässt sich ausnahmsweise wieder ein Vektor zuordnen.

Nun zur kinematischen Deutung der Elemente ω_{hk} dieses Darbouxschen Tensors. Nämlich, wenn neben dem schon erwähnten natürlichen N-Bein noch ein beliebiger Einheitsvektor ξ^i ins Auge gefasst und längs der Kurve parallel verschoben wird, dann muss die Bedingung

$$\xi^i_{,j}\, t^j_{(1)} = 0 \tag{22}$$

erfüllt werden. Der Kosinus des Winkels $\theta_{(k)}$ zwischen dem Einheitsvektor ξ^i und irgendeinem beliebigen der Einheitsvektoren $t^i_{(k)}$ wird durch die Formel

$$\cos\theta_{(k)} = \xi^i\, t_{(k)i} \tag{23}$$

bestimmt. Die Ableitung dieser Gleichung in der Richtung der Kurve ergibt, mit Rücksicht auf (22),

$$\frac{d(\cos\theta_{(k)})}{ds} = \xi^i\, t_{(k)i,j}\, t^j_{(1)}. \tag{24}$$

Diese Formel bestimmt die Änderung, bezogen auf die Bogenlänge s der Kurve (bzw. die Geschwindigkeit dieser Änderung, wenn $s=t$ gesetzt wird), des Kosinus des Winkels zwischen zwei Richtungen, von denen die eine sich parallel längs der Kurve verschiebt, während die andere sich natürlich als die Richtung einer ihrer Normalen ändert. Nimmt man noch an, dass in der

Anfangslage der Einheitsvektor ξ^i sich mit einem der Einheitsvektoren $t^i_{(h)}$ deckt, dann wird $\theta_{(k)} = \pi/2$ und der Ausdruck (24) reduziert sich auf

$$
(25) \qquad
\begin{aligned}
-\frac{d\theta_{(k)}}{ds} &= t_{(k)i,j}\, t^i_{(H)}\, t^j_{(1)}, \\
\frac{d\theta_{(k)}}{ds} &= -\omega_{kh} = \omega_{hk}.
\end{aligned}
$$

Also, die Elemente des Darbouxschen Tensors lassen sich, genau wie im Falle des dreidimensionalen Euklidischen Raumes, als die Änderungen in bezug auf den Kurvenbogen von Winkeln zwischen $t^i_{(k)}$ und $t^i_{(h)}$, wenn sich der zweite parallel längs der Kurve verschiebt, deuten. Mit anderen Worten, die Elemente ω_{hk} sind die Drehungsgeschwindigkeiten der Vektoren $t^i_{(k)}$ um die Kurve bei Verschiebung längs der Kurve in bezug auf den parallel verschobenen Vektor $t^i_{(h)}$.

(Veröffentlicht in serbokroatischer Sprache, Zbornik radova SAN, 2—1952)