PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), p. 141—144.

SUR UN THÉORÈME DE G. PÓLYA

Ivan Raitchinov

(Reçu le 13. III 1963)

Désignons par S l'ensemble des polynômes $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ dont les coefficients ainsi que la variable z appartiennent au plan complexe G. Soit $L(f)$ l'opérateur défini dans l'ensemble S de telle manière que $L(f)\in S$.

Nous dirons [2] que l'opérateur $L(f)$ laisse invariable la région $K\subset G$, si

$$f(z)\neq 0, \quad \forall z \notin K \Rightarrow L(f)\neq 0, \quad \forall z\notin K.$$

G. Pólya [1] a énoncé le théorème suivant:

Théorème . *Si l'opérateur*

$$L(f)=\sum_{n=0}^{\infty} l_n f^{(n)}(z)\left(f\in S,\ f^{(n)}=\frac{d^n f}{dz^n}, \quad l_n=\text{const.} \in G\right) \tag{1}$$

laisse invariable un domaine borné et convexe $K\subset G$, il a alors la forme suivante

$$L(f)=cf^{(s)}(z), \tag{2}$$

où c désigne une constante complexe et $s\geqslant 0$ est un nombre entier.

N. Obrechkoff [2] démontre le théorème 1 et donne les conditions suffisantes et nécessaires pour que l'opérateur (1) laisse invariable un domaine donné K, qui est illimité et convexe.

Récemment *T. Gentchev* et *Bl. Sendov* [3] ont donné une autre condition intéressante, dans laquelle un opérateur $L(f)$ admet la représentation (2).

Dans ce travail nous donnons encore une condition suffisante pour que l'opérateur $L(f)$ admette la représentation (2).

Soit M un ensemble des opérateurs linéaires $L(f)$, définis dans S de telle manière que $L(f)\in S$ et qui jouissent la propriété:

A) $\quad L(f)=g(z) \wedge f_1=f(z+a) \Rightarrow L(f_1)=g(z+a)$

(a étant une constante arbitraire de G).

Nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 2. *Si l'opérateur $L(f)$ appartient à M et s'il laisse invariable une région borné K, alors $L(f)$ a la forme* (2).

Démonstration. L'opérateur $L(f)\equiv 0$ a évidemment la forme (2). Supposons que $L(f)$ soit un opérateur non nul qui satisfait aux conditions du théorème. Nous supposerons que K contienne le nombre zéro, ce qui ne restreint pas, grâce à la propriété A), la généralité de la démonstration.

Nous démontrerons tout d'abord l'égalité

$$L(z^n) = c_n z^{k_n}, \tag{3}$$

où c_n et le nombre entier $k_n \geqq 0$ ne dépendent pas de z.

Il est évident que si l'on pose

$$L(z^n) = g_n(z), \tag{4}$$

l'égalité (3) sera demontrée, dès qu'on démontre que tous les zéros de $g_n(z)$ sont égaux au zéro.

Donc, supposons vrai le contraire: $g_n(\xi) = 0$ pour un nombre $\xi \neq 0$. Nous choisirons le nombre $a \in K$ de telle manière que $a + \xi \notin K$.

C'est tout à fait possible parce que $\xi \neq 0$ et K est un domaine borné.

À partir de (4) et de la propriété A) il s'ensuit que

$$L[(z-a)^n] = g_n(z-a),$$

mais $L(f)$ laisse invariable le domaine K et $(z-a)^n \neq 0$, lorsque $z \notin K$ $(a \in K)$.

Alors pour $z = a + \xi \notin K$ nous aurons

$$g_n(z-a) \neq 0 \text{ c'est-à-dire } g_n(a+\xi-a) = g_n(\xi) \neq 0.$$

Mais cela est en contradiction avec notre hypothèse, ce qui prouve que l'égalité (3) est valable.

Maintenant nous démontrerons que $L(z^n)$ n'est pas toujours une constante, c'est-à-dire l'opérateur $L(f)$ ne dégénère pas en fonctionnelle.

Supposons vrai le contraire:

$$L(z^n) = c_n = \text{const pour chaque } n. \tag{6}$$

Alors d'après A) et la linéarité de l'opérateur $L(f)$ nous aurons, a étant un nombre complexe quelconque, les égalités suivantes:

$$L[(z+a)^n] = c_n \tag{7}$$

$$L[(z+a)^n] = L\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k z^{n-k}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k L(z^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k} a^k. \tag{8}$$

En remplaçant (8) en (7) et en faisant la réduction possible, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k} a^k = 0. \tag{9}$$

L'égalité (9), obtenue pour a quelconque, montre que son premier membre, comme polynôme de a est identiquement nulle. En ce cas, pour chaque n, on admet

$$c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_0 = 0.$$

Par conséquent, pour chaque n on a

$$L(z^n) \equiv 0$$

ce qui grâce à la linéarité de l'opérateur est équivalent à

$$L(f) \equiv 0. \tag{10}$$

Cependant (10) contredit à la condition que $L(f) \not\equiv 0$.

Soit maintenant s ($\geqslant 0$) le plus petit nombre entier pour lequel $L(z^{s+1})$ n'est pas une constante.

Nous démontrerons l'égalité

$$L(z^n) = c\,\frac{d^s(z^n)}{dz^s} = \begin{cases} 0 & (n < s), \\ cs!\binom{n}{s} z^{n-s} & (n \geqslant s), \end{cases} \tag{11}$$

où c est une constante convenablement choisie.

A cet effet nous ramenons (comme en (8)) l'égalité

$$L[(z+a)^{s+1}] = c_{s+1}(z+a)^{k_{s+1}}$$

à la forme suivante:

$$\sum_{k=0}^{s+1} \binom{s+1}{k} a^k L(z^{s+1-k}) = c_{s+1} \sum_{k=0}^{k_{s+1}} \binom{k_{s+1}}{k} a^k z^{k_{s+1}-k}. \tag{12}$$

Grâce au choix du nombre s, pour chaque $n \leqslant s$, on a

$$L(z^n) = c_n = \text{const.} \tag{13}$$

A partir de (13) et (12) nous obtenons

$$\binom{s+1}{1} ac_s + \binom{s+1}{2} a^2 c_{s-1} + \cdots + \binom{s+1}{s+1} a^{s+1} c_o = \tag{14}$$

$$= \binom{k_{s+1}}{1} ac_{s+1} z^{k_{s+1}-1} + \cdots + \binom{k_{s+1}}{k_{s+1}} a^{k_{s+1}} c_{s+1}.$$

Ayant en vue que l'égalité (14) représente une identité par rapport à z, nous trouvons: $k_{s+1} = 1$ et

$$\binom{s+1}{1} ac_s + \binom{s+1}{2} a^2 c_{s-1} + \cdots + \binom{s+1}{s+1} a^{s+1} c_o = ac_{s+1}. \tag{14'}$$

Après l'identification des coefficients des membres respectifs dans l'identité (par rapport à a) (14'), on reçoit

$$c_{s+1} = (s+1)\,c_s,\ \ c_s \neq 0,\ \ c_{s-1} = c_{s-2} = \cdots = c_o = 0,\ \ (k_{s+1} = 1). \tag{15}$$

Si l'on pose $c = \frac{c_s}{s!}$, il est évident que les égalités (3) et (15) démontrent (11) pour $n = 0, 1, 2, \ldots, s, s+1$. Donc, pour achever la démonstration de (11) en employant l'induction complète, nous supposons que l'égalité (11) est vrai pour $1, 2, \ldots, n \geqslant s+1$ et nous démontrerons qu'elle sera vraie aussi pour $n+1$.

À partir de (3) et de la propriété A), on trouve l'égalité

$$L[(z+a)^{n+1}] = c_{n+1}(z+a)^{k_{n+1}},$$

qui, selon notre hypothèse, se reduit à

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k L(z^{n+1-k})=c_{n+1}\sum_{k=0}^{k_{n+1}}\binom{k_{n+1}}{k}a^k c_{n+1}z^{k_{n+1}-k}$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n+1-s}\binom{n+1}{k}a^k cs!\binom{n+1-k}{s}z^{n+1-k-s}=\sum_{k=1}^{k_{n+1}}\binom{k_{n+1}}{k}a^k c_{n+1}z^{k_{n+1}-k}. \tag{16}$$

En répetant l'identification effectuée pour (14), nous trouvons, à partir de (16),

$$k_{n+1}=n+1-s,\quad \binom{n+1-s}{1}c_{n+1}=\binom{n+1}{1}cs!\binom{n}{s}$$

ou

$$c_{n+1}=cs!\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-s+2)\,(n-s+1)}{s!\,(n+1-s)}=cs!\binom{n+1}{s}.$$

D'après (3) on reçoit alors

$$L(z^{n+1})=cs!\binom{n+1}{s}z^{n+1-s}$$

qui représente (11) pour $n+1$.

Cela étant fait, l'égalité (11) se trouve démontrée pour chaque nombre entier $n\geqslant 0$.

Mais l'égalité (2) est un corollaire direct de (11). En effet, si $f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$ est un polynôme quelconque de S, d'après la linéarité de l'opérateur $L(f)$ et l'égalité (11) nous aurons

$$L(f)=\sum_{k=0}^{n}a_k L(z^k)=\sum_{k=0}^{n}a_k c\frac{d^s(z^k)}{dz^s}=c\frac{d^s}{dz^s}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k z^k\right)=cf^{(s)}(z).$$

Le théorème 2 est ainsi démontré.

Remarque. — Comme chaque opérateur de la forme (1) appartient à l'ensemble M, le théorème (1) ne représente qu'un corollaire direct du théorème (2). Mais, pour éclaircir complètement la liaison entre ces théorèmes, il est nécessaire de répondre à la question suivante qui nous paraît bien interessante:

Est-il possible de représenter chaque opérateur de M par la forme (1)?

RÉFÉRENCES

[1] G. Pólya: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires échangeables avec la dérivation et sur les zéros des polynômes.* Comptes rendus de l' Académie des sciences de Paris, t. 183 (1926), p. 413.

[2] Н. Обрешков: *Върху корените на алгебричните уравнения*, Год. на Соф. университет, XXIII т., кн. 1, 1926/27, стр. 190.

[3] Т. Генчев и Бл. Сендов: *Една бележка върху теоремата на Гаус за разпределението на нулите на полиномите в комплексната равнина*, Физ. математическо сп. т. 1 (34), кн. 3—4, София 1958, стр. 169.