PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 115—119.

SUR UN PROBLÈME DE A. MAKOWSKI CONCERNANT LES NOMBRES TÉTRAÉDRAUX

W. Sierpiński

(Reçu le 5. II 1963)

M. *A. Makowski* a posé récemment le problème suivant:

Existe-t-il pour tout nombre naturel k une infinité de solutions en nombres naturels x, y, z de l'équation

$$T_x + T_y = k\, T_z, \tag{1}$$

où T_n désigne le n-ième nombre tétraédral,

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3-(n+1)}{6}.$$

Ce problème me semble être difficile à résoudre, de même que le problème comment on pourrait décider si, pour un nombre naturel k donné quelconque, l'équation (1) a un nombre fini non nul de solutions, ou bien si elle a une infinité de solutions en nombres naturels x, y, z.

Je démontrerai ici qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels l'équation (1) a une infinité de solutions en nombres naturels x, y, z et que tels sont, en particulier, tous les nombres naturels $k \leqslant 7$.

Désignons par E l'ensemble de tous les nombres naturels k, pour lesquels l'équation (1) a une infinité de solutions en nombres naturels x, y, z. Je démontrerai donc que l'ensemble E est infini et qu'il contient tout nombre naturel $\leqslant 7$.

Je démontrerai d'abord un lemme qui est lui-même intéressant.

Lemme. *Soient a et b des nombres naturels, c un entier* $\neq 0$. *Pour que l'équation*

$$ax^2 - by^2 + c = 0 \tag{2}$$

ait une infinité de solutions en nombres naturels x et y, il faut et il suffit que l'équation (2) *ait une solution en nombres naturels x et y et que le nombre ab ne soit pas un carré d'un nombre naturel*[1].

---

[1] Cf. le lemme à la p. 21 du travail de A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur les sommes de quatres cubes*, Acta Arithmetica IV (1958).

Démonstration du lemme. Comme on sait, si le nombre (naturel) ab n'est pas un carré d'un nombre naturel, l'équation (de *Pell*)

$$t^2 - abu^2 = 1 \tag{3}$$

a une infinité de solutions en nombres naturels t et u. Or, vu l'identité

$$a(tx+buy)^2 - b(aux+ty)^2 + c = (ax^2-by^2)(t^2-abu^2) + c,$$

on conclut que si les nombres naturels x et y satisfont à l'équation (2) et si les nombres naturels t et u satisfont à l'équation (3), alors les nombres

$$x_1 = tx+buy > x \quad \text{et} \quad y_1 = aux+ty > y$$

satisfont à l'équation $ax_1^2 - by_1^2 + c = 0$. On en conclut que l'équation (2) a une infinité de solutions en nombres naturels x et y. La condition de notre lemme est donc suffisante.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, il suffira évidemment de démontrer que si $ab=d^2$, où d est un nombre naturel, l'équation (2) a un nombre fini (ou nul) de solutions en nombres naturels x et y.

Si $ab=d^2$, l'équation (2) est équivalente à l'équation

$$(ax)^2 - (dy)^2 = -ac. \tag{4}$$

Or, l'entier non nul $-ac$ n'admettant, comme on le sait, qu'un nombre fini $\geqslant 0$ de décompositions en une différence de deux nombres naturels, l'équation (4), donc aussi l'équation (2), n'a qu'un nombre fini $\geqslant 0$ de solutions en nombres naturels x et y. La condition de notre lemme est donc nécessaire. Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Soit maintenant k un nombre naturel donné, t et l des nombres naturels tels que $2t^3 < kl^3 < 8t^3$ et que le nombre $6t(kl^3-2t^3)$ n'est pas un carré d'un nombre naturel, et supposons qu'il existe des nombres naturels r et s tels que

$$6tr^2 - (kl^3-2t^3)s^2 - 2t + kl = 0. \tag{5}$$

D'après notre lemme l'équation (5) a donc une infinité de solutions en nombres naturels r et s. D'après (5) on a, vu que $kl^3 < 8t^3$:

$$\lim_{r=\infty} \frac{r^2}{s^2} = \frac{kl^3-2t^3}{6t} < t^2, \tag{6}$$

donc, pour r et s suffisamment grands, $r<st$ et le nombre $w=st-r$ sera positif. S'il était, pour une infinité de r, $st-r=1$, on aurait $\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{r}{s} \geqslant t$, contrairement à (6). On a donc, pour r et s suffisamment grands, $w=st-r>1$.

Posons

$$u = ts+r, \qquad w = ts-r, \qquad v = ls. \tag{7}$$

Nous aurons

$$u^3 + w^3 - kv^3 - u - w + kv = s\,[6tr^2 - (kl^3-2t^3)s^2 - 2t + kl],$$

donc, d'après (5): $u^3+w^3-kv^3-u-w+kv=0$ et, pour r et s suffisamment grands, les nombres (7) sont tous >1. Posons

$$x=u-1, \quad y=w-1, \quad z=v-1;$$

ce seront donc alors des nombres naturels et on aura

$$6\,(T_x+T_y-kT_z)=u^3+w^3-kv^3-u-w+kv=0,$$

d'où l'on déduit que l'équation (1) a une infinité de solutions en nombres naturels x, y et z.

Nous avons donc déduit de notre lemme le corollaire suivant:

Corollaire. *Soit k un nombre naturel donné. S'il existe des nombres naturels t et l tels que $2t^3<kl^3<8t^3$ et que le nombre $6t(kl^3-2t^3)$ n'est pas un carré d'un nombre naturel, et s'il existe des nombres naturels r et s satisfaisant à l'équation* (5), *alors $k\in E$.*

Théorème 1. *L'ensemble E est infini.*

Démonstration. Comme on sait, l'équation

$$g^2-2t^2=-1 \tag{8}$$

a une infinité de solutions en nombres naturels g et t. Soit g, t une telle solution et posons $k=2t^3+t$, $l=1$. Nous aurons $kl^3-2t^3=t$, donc $2t^3<kl^3<$ $<8t^3$ et le nombre $6t\,(kl^3-2t^3)=6t^2$ n'est pas évidemment un carré d'un nombre naturel. L'équation (5), divisé par t, donne l'équation

$$6r^2-s^2+2t^2-1=0,$$

donc, d'après (8)

$$s^2-6r^2=g^2$$

qui a une solution $s=5g$, $r=4g$.

D'après notre corollaire nous concluons donc que $k\in E$.

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'il serait plus facile de démontrer l'existence d'une infinité de nombres naturels k pour lesquels l'équation (1) a au moins une solution en nombres naturels x, y, z.

En effet, soit $n=9m+1$, où m est un nombre naturel quelconque. Le nombre $T_n=\dfrac{(9m+1)\,(9m+2)\,(3m+1)}{2}$ n'est pas divisible par 3, d'où il résulte que $3\mid(T_n+1)\,(T_n+2)$, et le nombre $(T_n+1)\,(T_n+2)$ étant pair, le nombre

$$k=\frac{(T_n+1)\,(T_n+2)}{6}+1$$

est naturel. Or, on vérifie sans peine qu'on a

$$T_n+T_{T_n}=k\,T_n.$$

Corollaire: $3\in E$.

Démonstration. $g=1$, $t=1$ est une solution de l'équation (8). Pour $k=2t^3+t=3$, on a donc $k\in E$, donc $3\in E$. On a, par exemple, $T_2+T_6=3\,T_4$.

Théorème 2. *On a $k \in E$ pour k naturels $\leqslant 7$.*

Démonstration. **1.** Soit $k=1$, $t=3$, $l=4$. On aura $2t^3 < kl^3 < 8t^3$ et le nombre $6t(kt^3-2t^3)=180$ n'est pas un carré. Or, l'équation (5) divisé par 2 devient

$$9r^2-5s^2-1=0$$

et a une solution pour $r=3$, $s=4$. D'après le corollaire de notre lemme nous concluons donc que $1 \in E$.

J'ai démontré cela d'une façon directe et élémentaire dans ma note *Sur une propriété de nombres tétraédraux* qui a paru en 1962 dans le journal Elemente der Mathematik, XVII/2, p. 29—30.

On a, par exemple $T_8+T_{14}=T_{15}$.

Récemment, M. *M. Wunderlich* a donné 88 solutions de l'équation $T_x+T_y=T_z$ en nombres naturels, dont les 10 premiers sont:

3, 3, 4; 8, 14, 15; 20, 54, 55; 30, 55, 58; 39, 70, 74;

61, 102, 109; 84, 90, 110; 34, 118, 119; 48, 138, 140; 119, 154, 175.

(Voir M. Wunderlich: *Certain properties of pyramidal and figurate numbers*, Mathematics of Computation, vol. 16, № 80, p. 484).

Le même auteur écrit que la démonstration du fait que $1 \in E$ due a M. *S. Chowla* paraîtra dans le journal Norske Vid. Selsk. Trondheim, dans le travail *The Diophantine equation* $x^3+y^3+z^3=x+y+z$.

Comme l'a remarqué M. *A. Makowski*, si $y=z-1$, l'équation $T_x+T_y=T_z$ donne $T_x=t_z$, où $t_z=\frac{z(z+1)}{2}$ est un nombre triangulaire. Ainsi la table des solutions de l'équation $T_x+T_y=T_z$ donnée par *M. Wunderlich* donne cinq solutions de l'équation $T_x=t_z$ en nombres naturels x et z:

$$T_1=t_1, \quad T_3=t_4, \quad T_8=t_{15}, \quad T_{20}=t_{55}, \quad T_{34}=t_{119}.$$

Or, M^me^ *H. Sulisz-Sendacka* a trouvé qu'il n'existe d'autres solutions de l'équation $T_x=t_z$ en nombres naturels x et z, où $t_z=T_x<10^9$. Le manuscrit de son travail se trouve dans l'archive de la Faculté de Mathématique et Physique de l'Université de Varsovie.

2. Soit $k=2$, $t=8$, $l=9$. On aura $2t^3<kl^3<8t^3$ et le nombre $6t(kl^3-2t^3)=48\cdot 434$ dont le dernier chiffre est 2, n'est pas un carré. Or, l'équation (5) divisée par 2 devient

$$24r^2-217s^2+1=0$$

et a la solution $r=3$, $s=1$. D'après le corollaire de notre lemme nous concluons donc que $2 \in E$. On a, par exemple $T_4+T_{10}=2T_8$. J'ai démontré que $2 \in E$ par une voie directe et élémentaire dans ma note *Trois nombres tétraédraux en progression arithmétique*, Elemente der Mathematik.

3. Pour $k=3$ c'est le corollaire du théorème 1.

4. Soit $k=4$, $t=7$, $l=6$. On aura $2t^3=686<864=kl^3<8t^3$ et le nombre $6t(kl^3-2t^3)=6\cdot 7\cdot 178=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 89$ n'est pas un carré. Or, l'équation (5) divisée par 2 devient

$$21r^2-89s^2+5=0$$

et elle est satisfaite par $r=2$, $s=1$. D'après le corollaire de notre lemme nous concluons donc que $4 \in E$. On a, par exemple $T_4+T_8=4T_5$.

5. Soit $k=5$, $t=l=1$. On aura $2t^3<kl^3<8t^3$ et le nombre $6t(kl^3-2t^3)=18$ n'est pas un carré. Or, l'équation (5) divisée par 3 devient

$$2r^2-s^2+1=0$$

et elle est satisfaite par $r=2$, $s=3$. D'après le corollaire de notre lemme nous concluons donc que $5\in E$. On a, par exemple. $T_4+T_{28}=5\,T_{16}$.

6. Soit $k=6$, $t=5$, $l=4$. On aura $2t^3=250<384=kl^3<8t^3$ et le nombre $6t(kl^3-2t^3)=6^2\cdot 2\cdot 67$ n'est pas un carré. Or, l'équation (5) divisée par 2 devient

$$15r^2-67s^2+7=0$$

et elle est satisfaite par $r=2$, $s=1$. D'après le corollaire de notre lemme nous concluons donc que $6\in E$. On a, par exemple: $T_2+T_6=6\,T_3$.

7. Soit $k=7$, $t=7$, $l=5$. On aura $2t^3=684<7\cdot 125=kl^3<8t^3$ et le nombre $6t(kl^3-2t^3)=2\cdot 3^4\cdot 7^2$ n'est un pas carré. Or, l'équation (5) divisée par 21 devient

$$2r^2-9s^2+1=0$$

et elle est satisfaite par $r=2$, $s=1$. D'après le corollaire de notre lemme nous concluons donc que $7\in E$. On a, par exemple: $T_4+T_8=7\,T_4$.

M. *A. Schinzel* a démontré qu'on a aussi $8\in E$, $9\in E$ et $10\in E$: sa démonstration paraîtra ailleurs.

En ce qui concerne l'équation $t_x+t_y=kt_z$, où $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ est le n-ième nombre triangulaire, on peut démontrer que, quel que soit le nombre naturel k donné, elle a une infinité de solutions en nombres naturels x, y et z.

En effet, comme l'ont observé MM. *A. Makowski* et *A. Schinzel*, si $k\neq 2m^2$, où m est un nombre naturel, même l'équation $2t_x=kt_z$ a une infinité de solutions[1], et si $k=2m^2$, on peut poser

$$x=\frac{p-1}{2}+\frac{k}{2}\,q,\quad y=\frac{p-1}{2}+\frac{k}{2}q\,(p+q),\quad z=\frac{p^2-1}{2}+q\,(p+1),$$

où p, q est une solution quelconque de l'équation de *Pell* $p^2-kq^2=1$.

[1] Cf. A. Schinzel et W. Sierpiński, Bull. Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie XIII (1961), p. 135, Lemme.