PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 109—113.

SUR L'EXISTENCE DES VALEURS LIMITES DE LA RÉSULTANTE D'UNE FONCTION MINIMALE DE CLASSE H_δ $(\delta>0)$ ET D'UNE FONCTION DE CLASSE H_{δ_1} $(\delta_1>1)$

V. Dajović

(Reçu le 21. I 1963)

On présente ici deux théorèmes concernant l'existence des valeurs limites de la résultante d'une fonction minimale de classe H_δ $(0<\delta\leqslant 1$, resp. $\delta>1)$ et d'une fonction appartenant à la classe H_{δ_1} $(\delta_1>1)$ dans presque tous les points du contour du cercle-unité.

D é f i n i t i o n. — Etant donnés n points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ à l'intérieur du cercle-unité et n nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$, on appelle $f(z)$ fonction minimale de classe H_δ si $f(z)$ prend dans les points γ_k respectivement les valeurs c_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ et possède une norme

$$\|f(z)\|_\delta=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\varphi})|^\delta\, d\varphi\right\}^{\frac{1}{\delta}}$$

plus petite que la norme de toute autre fonction d'interpolation de même classe.

Dans le cas $\delta\geqslant 1$, comme il est connu, la condition nécessaire et suffisante que, pour γ_k et c_k donnés, la fonction $f(z)$ soit minimale est qu'on la peut écrire sous forme

$$f(z)=A\cdot{\prod}'\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(1-\overline{\alpha}_k z)^{\frac{2}{\delta}}\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\gamma}_k z)^{-\frac{2}{\delta}}, \tag{1}$$

où A et α_k $(k=1, 2, \ldots, n-1, |\alpha_k|\leqslant 1)$ sont des constantes, et le symbole Π' se rapporte à α_k satisfaisant à la relation $|\alpha_k|<1$ [1—6].

Toute fonction minimale de classe H_δ, $0<\delta<1$, peut s'écrire sous la forme (1); cependant, toute fonction de forme (1) n'est pas nécessairement une fonction minimale [7].

Si pour les γ_k et c_k donnés $(k=1, 2, \ldots, n)$ $f(z)$ est une fonction minimale de classe H_δ, $\delta>0$, et $b(z)$ la fonction correspondante de Blaschke (composée pour les zéros de $f(z)$ se trouvant à l'intérieur du cercle-unité), alors, comme on le voit, la fonction

$$g(z)=\left\{\frac{f(z)}{b(z)}\right\}^{\frac{\delta}{\delta'}}\cdot b(z), \qquad \delta'>\delta, \tag{2}$$

appartient à $H_{\delta'}$ et dans les points γ_k elle prend les valeurs correspondantes bien déterminées c_k' $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Lemme. — Si $f(z)$ est une fonction minimale de classe H_δ, $\delta > 0$, prenant dans les points γ_k les valeurs c_k, alors la fonction (2) est l'unique fonction minimale de classe $H_{\delta'}$ $(\delta' > \delta)$ ayant dans les points γ_k les valeurs correspondantes c_k' [7].

Maintenant pouvons nous démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. — *La résultante*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k a_k^{(1)} z^k$$

de la fonction $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} z^k \ (\in H_{\delta_1})$ *et d'une fonction minimale*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\in H_\delta, \ 0 < \delta \leqslant 1)$$

qui prend dans les points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *à l'intérieur du cercle-unité les valeurs* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *possède, si* $\frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta}{\delta'} = 1$, *presque partout sur le contour de ce cercle les valeurs limites bien déterminées.*

Démonstration. — La résultante

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_k^{(1)} z^k \tag{*}$$

des fonctions

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} z^k \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

peut être représentée (à une constante additive près) par une intégrale:

$$\alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k^{(1)} z^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{u_1(r, \varphi) \cdot f(re^{i(\theta-\varphi)})\} \, d\varphi, \tag{3}$$

où

$$f(re^{i(\theta-\varphi)}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik(\theta-\varphi)},$$

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} u_1(r, \varphi) e^{-ik\varphi} \, d\varphi, \qquad a_0^{(1)} = \frac{\alpha_0}{2} + i\beta,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(r, \varphi) \, d\varphi, \quad z = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = r^2, \quad r < 1.$$

La série $\alpha_0 a_k + \sum_1^{\infty} a_k a_k^{(1)} z^k$ est, à une constante additive près, de forme (*).

Nous démontrerons que l'intégrale (3) est bornée.

D'après la supposition, $u_1(r, \varphi)$ est la partie réelle de la fonction $f_1(re^{i\varphi}) \in H_{\delta_1}$ $(\delta_1 > 1)$, et la fonction $f(re^{i(\theta-\varphi)}) \in H_\delta$ $(0 < \delta \leq 1$ est une fonction minimale de cette classe. Il suit de la relation (2) que

$$f(z) = \left\{\frac{g(z)}{b(z)}\right\}^{\frac{\delta'}{\delta}} \cdot b(z), \quad z = re^{i(\theta-\varphi)}. \tag{4}$$

En représentant $u_1(r, \varphi)$ par une intégrale de Poisson:

$$u_1(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\vartheta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta, \tag{5}$$

où la fonction de distribution $P(\vartheta)$ appartient à la classe L^{δ_1}, $\delta_1 > 1$ [8], et en utilisant une inégalité de Hölder, on obtient à la suite de (5):

$$\begin{aligned} |u_1(r, \varphi)|^{\delta_1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^{\delta_1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta \cdot \\ \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta\right)^{\delta_1-1}; \end{aligned} \tag{6}$$

alors, en tenant compte de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta = 1 \tag{7}$$

on obtient

$$|u_1(r, \varphi)|^{\delta_1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^{\delta_1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta.$$

Mais, puisque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u_1(r, \varphi)|^{\delta_1}\,d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(\vartheta)|^{\delta_1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta\right\}d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u_1(r, \varphi)|^{\delta_1}\,d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\varphi\right\}|P(\vartheta)|^{\delta_1}d\vartheta, \tag{8}$$

on a, en vertu de (7), la relation

$$\int_0^{2\pi}|u_1(r, \varphi)|^{\delta_1}\,d\varphi \leq \int_0^{2\pi}|P(\vartheta)|^{\delta_1}\,d\vartheta. \tag{9}$$

Les relations (3), (4) et (9) et une nouvelle appliquation de l'inégalité de Hölder nous donnent:

$$(10)\qquad \left|\int_0^{2\pi}\{u_1(r,\varphi)\cdot f(\underline{z})\}\,d\varphi\right| \leqslant \int_0^{2\pi}|u_1(r,\varphi)|\cdot\left|\frac{g(\underline{z})}{b(\underline{z})}\right|^{\frac{\delta'}{\delta}}\cdot|b(\underline{z})|\,d\varphi$$

$$\leqslant\left\{\int_0^{2\pi}|P(\vartheta)|^{\delta_1}d\vartheta\right\}^{\frac{1}{\delta_1}}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}|g(e^{i(\theta-\varphi)})|^{\frac{\delta'^2}{\delta^2}}d\varphi\right\}^{\frac{\delta}{\delta'}},\quad \frac{1}{\delta_1}+\frac{\delta}{\delta'}=1.$$

L'intégrale $\left\{\int_0^{2\pi}|P(\vartheta)|^{\delta_1}d\vartheta\right\}^{\frac{1}{\delta_1}}$ est bornée parce que la fonction $P(\vartheta)$ appartient à L^{δ_1} $(\delta_1>1)$ [8].

Il nous reste encore de démontrer que l'intégrale

$$(11)\qquad \left\{\int_0^{2\pi}|g(e^{i(\theta-\varphi)})|^{\frac{\delta'^2}{\delta^2}}d\varphi\right\}^{\frac{\delta}{\delta'}}$$

est aussi bornée.

En effet, soit la fonction $g(z)\in H_{\delta'}$, qui pour les α_k et γ_k donnés prend les valeurs c_k', représentée par l'expression (1); alors pour chaque $\delta=\Delta>\delta'$ cette expression est aussi une fonction de classe H_Δ, minimale par rapport aux γ_k et à ses valeurs correspondantes c_k''.

On le conclut immédiatement à la suite du lemme cité ci-dessus et du fait que la transformation (2) (où maintenant la fonction $f(z)$ est remplacée par la fonction minimale $g(z)\in H_{\delta'}$, tandis que $g(z)\in H_{\delta'}$ est remplacée par une fonction de classe $H_\Delta(\Delta>\delta')$ minimale par rapport aux γ_k et à ses valeurs correspondantes c_k''), appliquée à l'expression (1), change dans cette expression seulement le paramètre δ' en $\Delta>\delta'$, ce qui a lieu, bien entendu, dans le cas particulier de $\Delta=\frac{\delta'^2}{\delta^2}$, où $\delta'>\delta$, $0<\delta\leqslant 1$ (comme il est aisé de voir, de $0<\delta\leqslant 1$ et $\delta'>\delta$ on a $\delta'>\delta^2$, d'où $\frac{\delta'^2}{\delta^2}>\delta'$). De cette raison l'intégrale (11) est bornée; par conséquant, l'intégrale dans la relation (3) est aussi bornée.

Donc, la fonction

$$\alpha_0 a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k a_k^{(1)} z^k$$

est bornée à l'intérieur du cercle-unité, et on en conclut de là que la fonction $F(z)$, holomorphe à l'intérieur de ce cercle, est elle aussi bornée, de sorte que, d'après le théorème de P. Fatou, elle a presque dans tous les points du contour de ce cercle les valeurs limites radiales bien déterminées. — Le théorème est démontré.

Remarque. — Si, cependant, $\delta>1$ et $\delta'>\delta^2$, à la suite du précédant il n'est pas difficille de conclure que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}|g|^{\frac{\delta'^2}{\delta^2}}d\varphi$$

est bornée, parce que sous cette condition $\frac{\delta'^2}{\delta^2} > \delta'$. Dans ce cas on a le théorème suivant:

Théorème 2. — *La résultante*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k a_k^{(1)} z^k$$

de la fonction $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} z^k \quad (\in H_{\delta_1})$ *et d'une fonction minimale*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\in H_\delta,\ \delta > 1)$$

qui dans les points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *à l'intérieur du cercle-unité prend les valeurs* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *possède, si* $\frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta}{\delta'} = 1$, *presque partout sur le contour de ce cercle les valeurs limites bien déterminées.*

Corollaire. — Particulièrement, si $f_1(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions minimales de classe $H_{\delta'}$, respectivement H_δ ($\delta' > \delta$), et δ et δ' satisfont à la condition

$$1 + \delta = \delta',$$

alors la résultante des ces deux fonctions possède des valeurs limites radiales presque dans tous les points du contour du cercle-unité.

Remarque. — Dans le cas $\delta > 1$, $\delta_1 > 1$ j'ai auparavant démontré l'existence des valeurs limites de la résultante des fonctions appartenant respectivement à H_δ et H_{δ_1} [9] et par suite l'existence des fonctions minimales des ces classes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. R. Garabedian: *The classes L_p and conformal maping*, Trans. Amer. Math. Soc. 69, Nr. 3 (1950), 392—415.

[2] С. Я. Хавинсон: *Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций*, Успехи мат. наук 4, в. 4. (32) (1949), 156—159.

[3] Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон: *Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного*, Москва 1960, 77—95.

[4] S. Kekeya: *Maximum modulus and some expressions of limited analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), 489—504.

[5] A. I. Macintyre and W. W. Rogosinsky: *Extremum problems in the theory of analytic functions*, Acta Math. 82 (1950), 275—325.

[6] W. W. Rogosinsky and H. S. Shapiro: *On certain extremum problems for analytic functions*, Acta Math. 90 (1953), 287—318.

[7] В. Кабайла: *Некоторые задачи интерполяции в классе H_δ при $\delta < 1$. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного*, Москва 1961, 180—187.

[8] Voir, par ex., A. Zygmund: *Trigonometrical Series*, New York 1952, p. 158.

[9] V. Daïovitch: *Sur l'existence des valeurs limites de la résultante des fonctions appartenant à la classe H_δ*, $\delta > 1$, Bulletin de la Soc. math. phys. de Serbie, vol. VIII, 1—2 (1956).