PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15), p. 75—80.

SUR UN OPÉRATEUR SE RATTACHANT À UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

D. S. Mitrinović et *D. Ž. Đoković*

(Reçu le 5. I 1962)

1. Préliminaires

Soit $f=f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ une fonction réelle des variables réelles $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$.

Définition. — L'opérateur $S=S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ est déterminé par l'égalité suivante:

$$
\begin{aligned}
(1.\ 1)\qquad & S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\
&= (-1)^{n-1} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - f(t_2, t_3, \ldots, t_n) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} f(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k + t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_n).
\end{aligned}
$$

Donc, l'opérateur S, appliqué à f, donne une fonction réelle des n variables réelles $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Cette fonction sera nommée: *transformée de f par* S.

Nous avons déjà utilisé l'opérateur S en liaison avec certaines équations fonctionnelles {*voir* [1]}.

Un opérateur, semblable à S, intervient dans la théorie des groupes {*voir* [2], p. 318}.

Dans cet article, nous allons indiquer plusieurs propriétés de l'opérateur S et donner quelques applications de ces propriétés.

2. Propriétés de l'opérateur S

2. 1. — L'opérateur $S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ est linéaire, à savoir

$$
\begin{aligned}
(2.\ 1)\qquad & S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n} \{a f_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) + b f_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\} \\
&= a S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\
&\quad + b S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n} f_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),
\end{aligned}
$$

où a et b sont des constantes réelles.

2. 2. — L'opérateur en question satisfait à l'égalité

$$
(2.\ 2)\qquad S_n^{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}}\, S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_n} = 0 \qquad (0,\ \text{zéro-opérateur}).
$$

Cette propriété importante est démontrée dans notre article [1].

2. 3. — Soit $n=p+q$ (p, q entiers non négatifs) et

$$f(t_1, \ldots, t_n)=f_1(t_1, \ldots, t_p)\cdot f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}).$$

D'après (1. 1) on obtient

$$\begin{aligned}
&S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}}\{f_1(t_1, \ldots, t_p) f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\}\\
&=(-1)^{p+q} f_1(t_1, \ldots, t_p) f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\\
&\quad -f_1(t_2, \ldots, t_{p+1}) f_2(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1})\\
&\quad +\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} f_1(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k+t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_{p+1})\\
&\quad \times f_2(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1})+\sum_{k=p+1}^{p+q}[(-1)^{k+1} f_1(t_1, \ldots, t_p)\\
&\quad \times f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{k-1}, t_k+t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_{p+q+1})]\\
&=\Big\{(-1)^p f_1(t_1, \ldots, t_p)-f_1(t_2, \ldots, t_{p+1})\\
&\quad +\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} f_1(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k+t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_{p+1})\Big\}\\
&\quad \times f_2(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1})+(-1)^p f_1(t_1, \ldots, t_p)\\
&\quad \times\Big\{(-1)^q f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})-f_2(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1})\\
&\quad +\sum_{k=p+1}^{p+q}(-1)^{k+1-p} f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{k-1}, t_k+t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_{p+q+1})\Big\}.
\end{aligned}$$

Donc, on a la formule suivante

$$\begin{aligned}
(2.\ 3)\qquad &S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}}\{f_1(t_1, \ldots, t_p) f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\}\\
&=\{S_p^{t_1, \ldots, t_{p+1}} f_1(t_1, \ldots, t_p)\} f_2(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1})\\
&\quad +(-1)^p f_1(t_1, \ldots, t_p)\{S_q^{t_{p+1}, \ldots, t_{p+q+1}} f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\}.
\end{aligned}$$

Par induction complète, on démontre la formule généralisée qui donne la transformée du produit de plusieurs fonctions. Par exemple, pour le produit de trois fonctions on a

$$\begin{aligned}
(2.\ 4)\qquad &S_{p+q+r}^{t_1, \ldots, t_{p+q+r+1}}\{f_1(t_1, \ldots, t_p) f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) f_3(t_{p+q+1}, \ldots, t_{p+q+r})\}\\
&=\{S_p^{t_1, \ldots, t_{p+1}} f_1(t_1, \ldots, t_p)\} f_2(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1}) f_3(t_{p+q+2}, \ldots, t_{p+q+r+1})\\
&\quad +(-1)^p f_1(t_1, \ldots, t_p)\{S_q^{t_{p+1}, \ldots, t_{p+q+1}} f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\}\\
&\quad \times f_3(t_{p+q+2}, \ldots, t_{p+q+r+1})+(-1)^{p+q} f_1(t_1, \ldots, t_p) f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\\
&\quad \times\{S_r^{t_{p+q+1}, \ldots, t_{p+q+r+1}} f_3(t_{p+q+1}, \ldots, t_{p+q+r})\}.
\end{aligned}$$

2. 4. Dans ce qui suit, nous allons prouver que le produit des transformées par S de deux fonctions $f_1(t_1, \ldots, t_{p-1})$ et $f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q-1})$ est également une transformée.

Donc, il faut démontrer que pour tous f_1 et f_2 il existe une fonction f telle que

$$(2.5)\qquad \{S_{p-1}^{t_1,\ldots,t_p} f_1(t_1,\ldots,t_{p-1})\}\{S_{q-1}^{t_{p+1},\ldots,t_{p+q}} f_2(t_{p+1},\ldots,t_{p+q-1})\} = S_{p+q-1}^{t_1,\ldots,t_{p+q}} f(t_1,\ldots,t_{p+q-1}).$$

En effet, si l'on pose

$$(2.6)\qquad f(t_1,\ldots,t_{p+q-1}) = f_1(t_1,\ldots,t_{p-1})\{S_{q-1}^{t_{p+1},\ldots\, t_{p+q-1}} f_2(t_p,\ldots,t_{p+q-2})\}$$

et si l'on applique l'une après l'autre les formules (2. 3) et (2. 2), on obtient

$$\begin{aligned} S_{p+q-1}^{t_1,\ldots,t_{p+q}} & f(t_1,\ldots,t_{p+q-1}) \\ &= \{S_{p-1}^{t_1,\ldots,t_p} f_1(t_1,\ldots,t_{p-1})\}\{S_{q-1}^{t_{p+1},\ldots,t_{p+q}} f_2(t_{p+1},\ldots,t_{p+q-1})\} \\ &\quad + (-1)^{p-1} f_1(t_1,\ldots,t_{p-1})\{S_q^{t_p,\ldots,t_{p+q}}\, S_{q-1}^{t_p,\ldots,t_{p+q-1}} f_2(t_p,\ldots,t_{p+q-2})\} \\ &= \{S_{p-1}^{t_1,\ldots,t_p} f_1(t_1,\ldots,t_{p-1})\}\{S_{q-1}^{t_{p+1},\ldots,t_{p+q}} f_2(t_{p+1},\ldots,t_{p+q-1})\}. \end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve qu'on peut prendre aussi

$$f(t_1,\ldots,t_{p+q-1}) = (-1)^p\{S_{p-1}^{t_1,\ldots,t_p} f_1(t_1,\ldots,t_{p-1})\} f_2(t_{p+1},\ldots,t_{p+q-1})$$

pour satisfaire à l'égalité (2. 5).

Donc, f_1 et f_2 étant donnés, la fonction f qui satisfait à (2. 5) n'est pas unique. La différence des deux fonctions f vérifiant (2. 5) est solution de l'équation fonctionnelle

$$(2.7)\qquad S_{p+q-1}^{t_1,\ldots,t_{p+q}} F(t_1,\ldots,t_{p+q-1}) = 0.$$

Par induction, on démontre que le produit des transformées par S (dans le sens indiqué) des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$ est aussi une transformée.

2. 5. Supposons à présent que la fonction f à laquelle on applique l'opérateur $S_{p+q}^{t_1,\ldots,t_{p+q+1}}$, ne dépend que des variables $t_1,\ldots,t_p$.

Dans ce cas on aura, d'après (1. 1),

$$\begin{aligned} S_{p+q}^{t_1,\ldots,t_{p+q+1}} & f(t_1,\ldots,t_p) \\ &= (-1)^{p+q} f(t_1,\ldots,t_p) - f(t_2,\ldots,t_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k f(t_1,\ldots,t_{k-1},t_k+t_{k+1},t_{k+2},\ldots,t_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{k=p+1}^{p+q} (-1)^k f(t_1,\ldots,t_p) \\ &= (-1)^p f(t_1,\ldots,t_p) - f(t_2,\ldots,t_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k f(t_1,\ldots,t_{k-1},t_k+t_{k+1},t_{k+2},\ldots,t_{p+1}) \\ &\quad + \left\{(-1)^{p+q} - (-1)^p - \frac{(-1)^{p+q}-(-1)^p}{2}\right\} f(t_1,\ldots,t_p) \end{aligned}$$

ou bien

$$S_{p+q}^{t_1, \ldots\, t_{p+q+1}} f(t_1, \ldots, t_p) \tag{2.8}$$

$$= \{S_p^{t_1, \ldots\, t_{p+1}} f(t_1, \ldots, t_p)\} + (-1)^p \frac{(-1)^q - 1}{2} f(t_1, \ldots, t_p).$$

Pour q pair, on a

$$S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}} f(t_1, \ldots, t_p) = S_p^{t_1, \ldots, t_{p+1}} f(t_1, \ldots, t_p). \tag{2.9}$$

Supposons maintenant que la fonction f, à laquelle on applique l'opérateur $S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}}$, ne dépend que des variables $t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}$.

Pour obtenir la formule correspondante, nous emploierons une autre méthode, quoique la méthode utilisée précédemment s'applique aussi avec succès.

En posant $f(t_1, \ldots, t_{n-1}) = 1$ dans (1. 1), on obtient

$$S_{n-1}^{t_1, \ldots, t_n} 1 = (-1)^{n-1} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1},$$

c'est-à-dire

$$S_{n-1}^{t_1, \ldots, t_n} 1 = -\frac{1}{2} \{1 + (-1)^n\}. \tag{2.10}$$

Par application des formules (2. 3) et (2. 10) on trouve

$$\begin{aligned} S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}} & f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) \\ &= S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}} \{1 \cdot f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\} \\ &= \{S_p^{t_1, \ldots, t_{p+1}} 1\} f(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1}) \\ &\quad + (-1)^p \{S_q^{t_{p+1}, \ldots, t_{p+q+1}} f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\} \\ &= (-1)^p \{S_q^{t_{p+1}, \ldots, t_{p+q+1}} f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{(-1)^p - 1\} f(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour p pair, on a

$$\begin{aligned} S_{p+q}^{t_1, \ldots, t_{p+q+1}} & f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) \\ &= (-1)^p S_q^{t_{p+1}, \ldots, t_{p+q+1}} f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nous allons généraliser les résultats (2. 8) et (2. 11). Dans ce but, supposons que la fonction f, à laquelle on applique l'opérateur $S_{p+q+r}^{t_1, \ldots, t_{p+q+r+1}}$, ne dépend que des variables $t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}$.

D'après la formule (2. 4), on trouve

$$\begin{aligned} S_{p+q+r}^{t_1, \ldots, t_{p+q+r+1}} & f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) \\ &= S_{p+q+r}^{t_1, \ldots, t_{p+q+r+1}} \{1 \cdot f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) \cdot 1\} \\ &= \{S_p^{t_1, \ldots, t_{p+1}} 1\} f(t_{p+2}, \ldots, t_{p+q+1}) \cdot 1 \\ &\quad + (-1)^p 1 \cdot \{S_q^{t_{p+1}, \ldots, t_{p+q+1}} f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})\} \cdot 1 \\ &\quad + (-1)^{p+q} 1 \cdot f(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) \cdot \{S_r^{t_{p+q+1}, \ldots, t_{p+q+r+1}} 1\}. \end{aligned}$$

En utilisant (2. 10), on obtient

$$(1.\ 13)\qquad \begin{aligned} S_{p+q+r}^{t_1,\ldots,t_{p+q+r+1}} f(t_{p+1},\ldots,t_{p+q}) &= (-1)^p S_q^{t_{p+1},\ldots,t_{p+q+1}} f(t_{p+1},\ldots,t_{p+q}) \\ &+(-1)^{p+q}\frac{1}{2}\{(-1)^r-1\}f(t_{p+1},\ldots,t_{p+q}) \\ &+\frac{1}{2}\{(-1)^p-1\}f(t_{p+2},\ldots,t_{p+q+1}). \end{aligned}$$

Pour p et r pairs, on a

$$(2.\ 14)\qquad S_{p+q+r}^{t_1,\ldots,t_{p+q+r+1}} f(t_{p+1},\ldots,t_{p+q}) =(-1)^p S_q^{t_{p+1},\ldots,t_{p+q+1}} f(t_{p+1},\ldots,t_{p+q}).$$

On voit que les formules (2. 8) et (2. 11) sont des cas particuliers de la formule (2. 13) correspondant à $p=0$ et $r=0$ respectivement.

2. 6. — Tous les résultats obtenus plus haut restent valables dans des hypothèses suffisamment affaiblies.

Soit E un ensemble (non vide) muni d'une opération interne binaire $\circ$ qui est associative. On considère les fonctions

$$f(t_1,\ldots,t_{n-1}),\quad \text{avec}\quad \{t_1,\ldots,t_{n-1}\}\subset E,$$

dont les valeurs appartiennent à un groupe additif abélien M. Dans M est définie multiplication qui est associative et distributive par rapport à l'addition,

L' opérateur $S_{n-1}^{t_1,\ldots,t_n}$, où $\{t_1,\ldots,t_n\}\subset E$, est défini par l'égalité suivante:

$$(2.\ 15)\qquad \begin{aligned} S_{n-1}^{t_1,\ldots,t_n} f(t_1,\ldots,t_{n-1}) &=(-1)^{n-1}f(t_1,\ldots,t_{n-1})-f(t_2,\ldots,t_n) \\ &+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}f(t_1,\ldots,t_{k-1},t_k\circ t_{k+1},t_{k+2},\ldots,t_n). \end{aligned}$$

Cet opérateur généralisé jouit des propriétés plus haut établies.

3. Applications

Considérons les équations fonctionnelles, $\{$*voir* [1], [3], [4]$\}$,

$$(3.\ 1)\qquad S_n^{x_1,\ldots,x_{n+1}} f(x_1,\ldots,x_n)=0\quad (n=1,2,\ldots),$$

où $f(x_1,\ldots,x_n)$ est une fonction réelle inconnue de variables réelles $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Pour $n=1$ l'équation (3. 1) est précisément l'équation fonctionnelle de *Cauchy*.

Pour $n=2$ la solution générale continue de l'équation (3. 1) est donnée par $\{$*voir* [4]$\}$

$$(3.\ 2)\qquad f(x,y)=S_1^{x,y}F(x)=F(x+y)-F(x)-F(y),$$

où $F(x)$ est une fonction continue quelconque.

Pour $n=3, 4, \ldots$, la solution générale dérivable de l'équation (3. 1) {*voir* [1]} est

$$f(t_1, \ldots, t_n) = S_{n-1}^{t_1, \ldots, t_n} F(t_1, \ldots, t_{n-1}), \tag{3. 3}$$

où $F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ est une fonction dérivable quelconque.

D'après la formule (2. 3) on obtient le résultat suivant:

Le produit $f_1(t_1, \ldots, t_p) f_2(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})$, où $f_1(t_1, \ldots, t_p)$ et $f_2(t_1, \ldots, t_q)$ désignent des solutions de l'équation (3. 1) pour $n=p$ et $n=q$ respectivement, est une solution de (3. 1) pour $n=p+q$.

Par induction, on peut étendre ce résultat aux produits de plusieurs solutions de l'équation (3. 1).

En particulier, le produit

$$f_1(t_1) f_2(t_2) \cdots f_k(t_k),$$

où $f_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ sont des solutions quelconques de l'équation de *Cauchy*, est la solution de l'équation (3. 1) pour $n=k$.

Dans le cas $k=2$, posons $f_2(t_2)=t_2$; on trouve alors que la fonction $f(x, y)=f_1(x)\, y$, où $f_1(x)$ est une solution discontinue de l'équation de *Cauchy*, satisfait à (3. 1) pour $n=2$. Mais cette fonction n'est pas symétrique, donc elle n'est pas de la forme (3. 2). Cela signifie que (3. 2) n'est pas la solution générale de l'équation (3. 1) pour $n=2$.

Ce résultat est obtenu par *J. Erdös* [4], mais la démonstration indiquée, qui est suggérée par *S. Kurepa*, est plus simple.

Comme conséquence de la formule (2. 14) on obtient le résultat suivant:

Si $g(t_1, t_2, \ldots, t_{q-2m-2p})$ est une solution de l'équation (3. 1) pour $n=q-2m-2p$, la fonction

$$g(t_{2m+1}, t_{2m+2}, \ldots, t_{q-2p}) \qquad (q > 2m+2p) \tag{3. 4}$$

satisfait à l'équation (3. 1) pour $n=q$.

Les combinaisons linéaires des solutions (3. 4), q étant fixe, p et m variables, sont aussi des solutions de l'équation (3. 1) pour $n=q$.

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas abstrait que nous avons signalé dans 2. 6.

S. Kurepa a bien voulu lire, dans le manuscript, le présent article.

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović — D. Đoković: *Sur certaines équations fonctionnelles*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, №. 53, 1961, p. 9—16.

[2] А. Г. Курош: *Теория групп*, Москва 1953.

[3] S. Kurepa: *On some functional equations*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski t. 11, 1956, p. 3—5.

[4] J. Erdös: *A remark on the paper „On some functional equations" by S. Kurepa*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, t. 14, 1959, p. 3—5.