PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15), p. 67—73.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

D. S. Mitrinović et *D. Ž. Đoković*

(Reçu le 5. I 1962)

1. *S. Kurepa* [1] a démontré que la solution générale dérivable de l'équation fonctionnelle

(1. 1) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_1, x_2)-f(x_2, x_3)=0$$

est $f(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)$, où $F(x)$ désigne une fonction dérivable quelconque.

J. Erdös [2] a démontré que la solution générale symétrique de l'équation (1. 1) est

(1. 2) $$f(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y),$$

où $F(x)$ est une fonction arbitraire.

2. L'équation (1. 1), en y échangeant les arguments u et v de $f(u, v)$, fournit les équations suivantes:

(2. 1) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_1, x_2)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 2) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_1, x_2)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 3) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_2, x_1)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 4) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_1, x_2)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 5) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_1, x_2)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 6) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_2, x_1)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 7) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_1, x_2)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 8) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_2, x_1)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 9) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_1, x_2)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 10) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_2, x_1)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 11) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_2, x_1)-f(x_2, x_3)=0,$$

(2. 12) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_1, x_2)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 13) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_2, x_1)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 14) $$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_2, x_1)-f(x_3, x_2)=0,$$

(2. 15) $$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_2, x_1)-f(x_3, x_2)=0.$$

Définition. — *Deux équations fonctionnelles sont équivalentes si chaque solution de l'une est solution de l'autre et inversement.*

Théorème 1. — *Les équations* (1. 1) *et* (2. 15) *sont équivalentes.*

Il suffit de remarquer qu'à partir de l'une de ces équations on obtient l'autre en permutant les variables x_1 et x_3.

Théorème 2. — *Les équations fonctionnelles* (2. 1)—(2. 5), (2. 10)—(2. 14) *sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que chaque solution d'une équation quelconque indiquée dans l'énoncé du théorème est symétrique.

Dans les cas (2. 1), (2. 2), (2. 13), (2. 14), en posant $x_1=x_3=x$, $x_2=y$, on trouve $f(x, y)=f(y, x)$.

Dans les cas (2. 3), (2. 4), (2. 11), (2. 12), en posant $x_1=x_3=x$, $x_2=y-x$, il vient $f(x, y)=f(y, x)$.

Dans les cas (2. 5), (2. 10), en posant $x_1=x$, $x_2=0$, $x_3=y$, on trouve $f(x, 0)=f(0, y)=f(0, 0)$. Alors, si l'on pose $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=0$, il vient $f(x, y)=f(y, x)$.

La démonstration est ainsi achevée.

Théorème 3. — *La solution générale de chacune des équations fonctionnelles* (2. 1)—(2. 5), (2. 10)—(2. 14) *est donnée par* (1. 2).

D'après le théorème 2, il suffit de considérer l'équation (2. 1).

Chaque solution de l'équation (2. 1) est symétrique et satisfait aussi à l'équation (1. 1). D'après le résultat de *J. Erdös* [2], elle a la forme (1. 2). Inversement, on vérifie aisément par calcul direct que toute fonction de la forme (1. 2) satisfait à l'équation (2. 1).

Le théorème 3 est ainsi prouvé.

Théorème 4. — *Les solutions générales des équations fonctionnelles* (2. 7) *et* (2. 8) *sont respectivement*

$$f(x, y)=F(x+y)-F(y)+G(x), \tag{2. 16}$$

$$f(x, y)=F(x+y)-F(x)+G(y), \tag{2. 17}$$

où $F(x)$ *et* $G(x)$ *sont deux fonctions arbitraires.*

Il suffit de considérer l'équation (2. 7) car, en posant dans (2. 8) $f(x, y)=g(y, x)$, on trouve que $g(x, y)$ satisfait à (2. 7).

Si l'on pose $x_2=0$, l'équation (2. 7) fournit la relation

$$f(x_1, x_3)-f(x_1, 0)=f(x_3, x_1)-f(x_3, 0).$$

Donc, la fonction

$$\varphi(x, y)=f(x, y)-f(x, 0) \tag{2. 18}$$

est symétrique.

En substituant dans (2. 7) $f(x, y)$ par $\varphi(x, y)+f(x, 0)$, on obtient

$$\varphi(x_3, x_1+x_2)-\varphi(x_1, x_2+x_3)+\varphi(x_1, x_2)-\varphi(x_3, x_2)=0.$$

Puisque la fonction $\varphi(x, y)$ est symétrique, elle satisfait à l'équation (1. 1). On en conclut que $\varphi(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)$. D'après (2. 18) on obtient l'égalité (2. 16) avec $G(x)=f(x, 0)-F(x)$.

Nous avons démontré que chaque solution de l'équation (2. 7) a la forme (2. 16). On vérifie sans difficulté, que l'assertion inverse est également vraie.

Les équations (2. 6) et (2. 9) ont également pour solution (1. 2). Dans une note qui paraîtra ailleurs il sera question du caractère de cette solution.

3. Les équations (2. 1)—(2. 5), (2. 10)—(2. 14) sont liées à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=\varphi(x, y), \tag{3. 1}$$

où la fonction inconnue est désignée par $f(x)$.

G. Galbura [3] a trouvé les conditions que $\varphi(x, y)$ doit satisfaire pour qu'il existe des solutions deux fois dérivables et il a donné aussi une méthode simple pour les obtenir.

T. Angheluța [4] et *M. Ghermanescu* [5] se sont occupés d'une part des conditions nécessaires et d'autre part des conditions suffisantes auxquelles la fonction $\varphi(x, y)$ doit satisfaire pour que l'équation (3. 1) ait des solutions.

Le problème d'existence des solutions est complètement résolu par le théorème suivant:

Théorème 5. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (3. 1) *possède des solutions est*

$$\varphi(x_3, x_1+x_2)-\varphi(x_1, x_2+x_3)+\varphi(x_1, x_2)-\varphi(x_2, x_3)=0. \tag{3. 2}$$

En effet, si la condition (3. 2) est satisfaite, la fonction $\varphi(x, y)$ est une solution de l'équation (2. 1) et d'après le théorème 3 elle a la forme $\varphi(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)$, ce qui veut dire que l'équation (3. 1) a des solutions.

Inversement, si l'équation (3. 1) a des solutions on peut écrire

$$\varphi(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)$$

et on vérifie aisément que cette fonction satisfait à (3. 2).

Remarquons que la condition (3. 2) exprime le fait que la fonction $\varphi(x, y)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (2. 1). D'après le théorème 2 on conclut que cette condition peut être remplacée par l'une des neuf conditions équivalentes.

M. Ghermanescu [5] est parvenu, par une autre méthode, à l'équation (2. 4) et il a obtenu des résultats intéressants.

4. Dans ce qui suit nous allons considérer trois équations fonctionnelles liées aux équations du § 2 de cet article.

Première équation. — Considérons l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} &f(x_1+\cdots+x_n, x_{n+1})-f(x_2+\cdots+x_{n+1}, x_1)\\ &+f(x_1+\cdots+x_{n-1}, x_n)-f(x_2+\cdots+x_n, x_{n+1})\\ &+\cdots\\ &+f(x_1+x_2, x_3)-f(x_2+x_3, x_4)\\ &+f(x_1, x_2)-f(x_2, x_3)=0. \end{aligned} \tag{4. 1}$$

Théorème 6. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (4. 1) *est donnée par*

$$f(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y). \tag{4. 2}$$

Démonstration. — En posant $x_1=0$, l'équation (4. 1) se réduit à $f(0, x_2)=f(x_2+\cdots+x_{n+1}, 0)$, d'où l'on conclut

$$f(0, x)=f(x, 0)=f(0, 0)=\text{const.} \tag{4. 3}$$

En posant $x_4=x_5=\ldots=x_{n+1}=0$, l'équation (4. 1), d'après (4. 3), prend la forme (2. 2). Il suffit d'appliquer le théorème 3.

Par calcul direct on vérifie que la fonction (4. 2) satisfait à l'équation (4. 1).

Le théorème 6 est ainsi démontré.

Deuxième équation. — Considérons maintenant l'équation

$$\begin{aligned}&f(x_1+x_2, x_3+x_4)+f(x_2+x_3, x_4+x_1)+f(x_3+x_4, x_1+x_2)\\&+f(x_4+x_1, x_2+x_3)-f(x_1, x_2+x_3+x_4)-f(x_2, x_3+x_4+x_1)\\&-f(x_3, x_4+x_1+x_2)-f(x_4, x_1+x_2+x_3)-f(x_1+x_2, x_3)\\&-f(x_2+x_3, x_4)-f(x_3+x_4, x_1)-f(x_4+x_1, x_2)+f(x_1, x_4)\\&+f(x_2, x_1)+f x_3, x_2)+f(x_4, x_3)=0.\end{aligned} \tag{4. 4}$$

Si l'on y pose $x_1=x$, $x_2=x_3=x_4=0$, on trouve

$$f(0, x)=f(0, 0)=\text{const.} \tag{4. 5}$$

En faisant $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=x_4=0$, l'équation (4. 4) reçoit la forme suivante

$$\{f(x, y)-f(x, 0)\}-\{f(y, x)-f(y, 0)\}=0. \tag{4. 6}$$

La fonction

$$g(x, y)=f(x, y)-f(x, 0) \tag{4. 7}$$

vérifie les relations

$$g(x, y)=g(y, x), \qquad g(x, 0)=g(0, x)=0. \tag{4. 8}$$

On voit sans difficulté que la fonction $g(x, y)$ satisfait aussi à l'équation (4. 4):

$$\begin{aligned}&g(x_1+x_2, x_3+x_4)+g(x_2+x_3, x_4+x_1)+g(x_3+x_4, x_1+x_2)+g(x_4+x_1, x_2+x_3)\\&-g(x_1, x_2+x_3+x_4)-g(x_2, x_3+x_4+x_1)-g(x_3, x_4+x_1+x_2)-g(x_4, x_1+x_2+x_3)\\&-g(x_1+x_2, x_3)-g(x_2+x_3, x_4)-g(x_3+x_4, x_1)-g(x_4+x_1, x_2)\\&+g(x_1, x_4)+g(x_2, x_1)+g(x_3, x_2)+g(x_4, x_3)=0.\end{aligned}$$

Si l'on y pose $x_4=0$, il vient

$$g(x_2+x_3, x_1)-g(x_2, x_3+x_1)+g(x_3, x_2)-g(x_3, x_1)=0.$$

Donc, $g(x, y)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (2. 3). Par conséquent, la fonction $g(x, y)$ a la forme (1. 2), à savoir:

$$g(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y). \tag{4. 9}$$

D'après (4. 7) on a $f(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)+f(x, 0)$.

Donc, $f(x, y)$ est de la forme

$$f(x, y)=F(x+y)-F(y)+G(x). \tag{4. 10}$$

Inversement, chaque fonction de la forme (4. 10) vérifie l'équation (4. 4). En fait nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 7. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (4. 4) *est donnée par* (4. 10), *où* $F(x)$ *et* $G(x)$ *sont des fonctions arbitraires.*

Troisième équation. — C'est l'équation suivante:

$$
\begin{aligned}
(4.\,11)\quad & f(x_1+x_2+x_3+x_4,\, x_5)+f(x_1+x_2+x_3,\, x_4+x_5)-f(x_1+x_2,\, x_3+x_4+x_5) \\
& -f(x_1,\, x_2+x_3+x_4+x_5)+f(x_2+x_3+x_4+x_5,\, x_1)+f(x_2+x_3+x_4,\, x_5+x_1) \\
& -f(x_2+x_3,\, x_4+x_5+x_1)-f(x_2,\, x_3+x_4+x_5+x_1)+f(x_3+x_4+x_5+x_1,\, x_2) \\
& +f(x_3+x_4+x_5,\, x_1+x_2)-f(x_3+x_4,\, x_5+x_1+x_2)-f(x_3,\, x_4+x_5+x_1+x_2) \\
& +f(x_4+x_5+x_1+x_2,\, x_3)+f(x_4+x_5+x_1,\, x_2+x_3)-f(x_4+x_5,\, x_1+x_2+x_3) \\
& -f(x_4,\, x_5+x_1+x_2+x_3)+f(x_5+x_1+x_2+x_3,\, x_4)+f(x_5+x_1+x_2,\, x_3+x_4) \\
& -f(x_5+x_1,\, x_2+x_3+x_4)-f(x_5,\, x_1+x_2+x_3+x_4)+f(x_1,\, x_2+x_3+x_4) \\
& -f(x_1+x_2,\, x_3+x_4)+f(x_1+x_2,\, x_3)-f(x_1,\, x_2)+f(x_2,\, x_3+x_4+x_5) \\
& -f(x_2+x_3,\, x_4+x_5)+f(x_2+x_3,\, x_4)-f(x_2,\, x_3)+f(x_3,\, x_4+x_5+x_1) \\
& -f(x_3+x_4,\, x_5+x_1)+f(x_3+x_4,\, x_5)-f(x_3,\, x_4)+f(x_4,\, x_5+x_1+x_2) \\
& -f(x_4+x_5,\, x_1+x_2)+f(x_4+x_5,\, x_1)-f(x_4,\, x_5)+f(x_5,\, x_1+x_2+x_3) \\
& -f(x_5+x_1,\, x_2+x_3)+f(x_5+x_1,\, x_2)-f(x_5,\, x_1)=0.
\end{aligned}
$$

En y posant $x_1=x,\ x_2=x_3=x_4=x_5=0$, on trouve

$$(4.\,12)\qquad 4f(x,0)-3f(0,x)=k=f(0,0).$$

En faisant dans (4. 11) $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=x_5=0$, il vient

$$
\begin{aligned}
& 3f(x+y+z,\,0)-2f(0,\,x+y+z)-f(0,0)+f(x+y,\,z)-f(z,\,x+y) \\
& \qquad +f(y+z,\,x)-f(x,\,y+z)+f(z+x,\,y)-f(y,\,z+x)=0,
\end{aligned}
$$

ou bien, d'après (4. 12),

$$
\begin{aligned}
(4.\,13)\qquad f(x+y+z,\,0)-f(0,\,x+y+z)&=f(x+y,\,z)-f(z,\,x+y) \\
&\quad +f(y+z,\,x)-f(x,\,y+z) \\
&\quad +f(z+x,\,y)-f(y,\,z+x).
\end{aligned}
$$

En mettant, dans (4. 11), $x_1=x,\ x_2=y,\ x_4=z,\ x_3=x_5=0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& 2f(x+y+z,\,0)-2f(0,\,x+y+z)+f\,x+y,\,z)-2f(z,\,x+y) \\
& \qquad +2f(y+z,\,x)-f(x,\,y+z)+2f(z+x,\,y)-2f(y,\,z+x) \\
& \qquad +f(y,\,z)-f(x,\,y)+f(x+y,\,0)+f(0,\,x+y)+f(0,\,z+x) \\
& \qquad -f(y,\,0)-f(0,\,z)-f(0,\,x)=0.
\end{aligned}
$$

Par application de (4. 13), on trouve

$$
\begin{aligned}
& 4f(x+y+z,\,0)-4f(0,\,x+y+z)+f(x,\,y+z)-f(x+y,\,z) \\
& \quad +f(y,\,z)-f(x,\,y)+f(x+y,\,0)+f(0,\,x+y)+f(0,\,z+x) \\
& \quad -f(y,\,0)-f(0,\,z)-f(0,\,x)=0,
\end{aligned}
$$

ou bien, d'après (4. 12),

$$f(x+y,z)-f(x,y+z)+f(x,y)-f(y,z)=k-f(0,x+y+z)$$
$$+f(x+y,0)+f(0,x+y)+f(0,x+z)-f(y,0)-f(0,x)\quad f(0,z). \tag{4. 14}$$

En effectuant la permutation cyclique des variables x, y, z, la relation (4. 14) fournit les deux égalités suivantes:

$$f(y+z,x)-f(y,z+x)+f(y,z)-f(z,x)=k-f(0,x+y+z)$$
$$+f(y+z,0)+f(0,y+z)+f(0,x+y)-f(z,0)-f(0,y)-f(0,x), \tag{4. 15}$$

$$f(z+x,y)-f(z,y+x)+f(z,x)-f(x,y)=k-f(0,x+y+z)$$
$$+f(z+x,0)+f(0,z+x)+f(0,y+z)-f(x,0)-f(0,z)-f(0,y). \tag{4. 16}$$

Par addition des relations (4. 14), (4. 15), (4.16), on trouve

$$\begin{aligned} f(x+y+z,0)-f(0,x+y+z)= {} & 2\{f(0,x+y)+f(0,y+z)+f(0,z+x)\} \\ & +\{f(x+y,0)+f(y+z,0)+f(z+x,0)\} \\ & -2\{f(0,x)+f(0,y)+f(0,z)\} \\ & -\{f(x,0)+f(y,0)+f(z,0)\} \\ & +3k-3f(0,x+y+z). \end{aligned} \tag{4. 17}$$

Il s'ensuit que la fonction

$$\varphi(x)=f(x,0)+2f(0,x)-3k \tag{4. 18}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle de *Fréchet:*

$$\varphi(x+y+z)-\varphi(x+y)-\varphi(y+z)-\varphi(z+x)+\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=0.$$

La solution continue générale de cette équation {*voir* [6]} est

$$\varphi(x)=ax^2+bx \qquad (a, b \text{ constantes}).$$

Ainsi, pour la détermination des fonctions $f(x, 0)$ et $f(0, x)$ nous avons trouvé deux équations:

$$4f(x,0)-3f(0,x)=k,$$
$$f(x,0)+2f(0,x)=ax^2+bx+3k.$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\begin{aligned} f(x,0)&=3\alpha x^2+3\beta x+k \\ f(0,x)&=4\alpha x^2+4\beta x+k \end{aligned} \qquad \left(\alpha=\frac{a}{11},\ \beta=\frac{b}{11}\right).$$

De ce fait la relation (4. 14) devient

$$\begin{aligned} & f(x+y,z)-f(x,y+z)+f(x,y)-f(y,z) \\ & \qquad =3\alpha x^2-4\alpha z^2+6\alpha xy-8\alpha yz+3\beta x-4\beta z. \end{aligned}$$

Avec la notation $g(x,y)=\alpha(3x^2+4y^2)+\beta(3x+4y)$, la dernière équation s'écrit

$$\begin{aligned} & f(x+y,z)-f(x,y+z)+f(x,y)-f(y,z) \\ & \qquad =g(x+y,z)-g(x,y+z)+g(x,y)-g(y,z). \end{aligned}$$

Donc, la fonction $f(x, y) - g(x, y)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (1. 1). Chaque solution continue de l'équation (1. 1) est symétrique {*voir* [2]} et possède la forme (1. 2). Il s'ensuit que

$$f(x, y) = F(x+y) - F(x) - F(y) + \alpha(3x^2 + 4y^2) + \beta(3x + 4y). \tag{4. 19}$$

On vérifie sans difficulté que chaque fonction de la forme (4. 19) satisfait à l'équation fonctionnelle (4. 11).

Nous avons donc démontré le théorème que voici:

Théorème 8. — *La solution continue générale de l'équation fonctionnelle* (4. 11) *est donnée par* (4. 19), *où* $F(x)$ *est une fonction quelconque et* α *et* β *deux constantes arbitraires.*

M. J. Aczél et *M. Hosszú* ont bien voulu lire, dans le manuscript, une partie de cet article.

RÉFÉRENCES

[1] S. Kurepa: *On some functional equations*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski **11** (1956), 3—5.

[2] J. Erdös: *A remark on the paper „On some functional equations" by S. Kurepa*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski **14** (1959), 3—5.

[3] G. Galbura: *Sopra una certa equazione funzionale*, Acta Pont. Acad. Sci. **5** (1941), 7—41.

[4] T. Angheluţa: *Sur une équation fonctionnelle*, Bull. sci. École Polyt. Timişoara **11** (1943—1944), 42—44.

[5] M. Ghermanescu: *Solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles linéaires à plusieurs variables*, Bull. sci. École Polyt. Timişoara **13** (1948), 18—37.

[6] M. Ghermanescu: *Ecuaţii Funcţionale*, Bucureşti 1960, chapitre V.