PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15), p. 15—23.

LA CORRELATION DU PRINCIPE DE PFAFF—BILIMOVIĆ[1] AVEC LES AUTRES PRINCIPES DE MECANIQUE

V. A. Vujičić

(Reçu le 4. XII 1961)

1. La déduction des équations dynamiques, de formes, canonique et autres, et des lois ou théorèmes, partant des équations de *Pfaff* et l'énoncé du principe mentionné en mécanique, ont été effectués, ainsi que le montre les publications par *A. Bilimović* dans son article ,,Le principe général de la mécanique de *Pfaff*" [6]. Comme le montre le titre de l'article, *A. Bilimović* a donné à ce principe le nom de *Pfaff*. Ajoutons que dans cet article le mot de principe est employé pour la première fois dans le sens qui lui est alors donné, et pour preuve de son existence une corrélation avec le principe de *D'Alembert* et d'*Hamilton* est montrée.

Plus tard, *Đ. Mušicki* après avoir prouvé la généralité du principe de *Pfaff*, et montré sa validité en physique [16], lui a donné le nom de principe de *Pfaff—Bilimović*. La parution du livre ,,Sur un principe général phénoménologique différentiel" [7], ainsi que les autres travaux cités dans la bibliographie, donnent plus complétement l'historique de ce principe [19]. Il faut, cependant mentionner la contribution de *T. Anđelić* et *Đ. Mušicki*, c'est-à-dire les travaux [1-5] et [16] qui ont contribué, à faire observer que ce principe à une généralité plus grande que les autres. Notre but dans cette publication, n'est pas de faire l'historique de ce principe, mais de démontrer plus précisement la corrélation entre le principe de *Pfaff—Bilimović* et les autres principes de mécanique, tenant compte, par ailleurs, du sens naturel ou physique du problème, ce qui exige une nouvelle formulation du principe.

2. Dans son travail [6] l'auteur dans le chapitre ,,La corrélation du principe de *Pfaff* avec les autres principes généraux de mécanique", donne une démonstration approximative de l'équivalence du nouveau principe nommé alors le principe de *Pfaff*, avec le principe différentiel de *D'Alembert* dans la forme de *Lagrange* et avec le principe intégral de *Hamilton*. Dans cette démonstration un terme différentiel à été omis sans explication suffisante. Ce terme correspondait au fait que la première variation de la forme de *Pfaff*

$$\delta \sum_{i=1}^{n} Q_i \, dq^i$$

[1] A. Bilimović cite toute la bibliographie se rapportant à ce principe dans son travail ,,*Sur un principe général phénoménologique différentiel*".

Nous ne mentionnons que les oeuvres publiées par des savants belgradois. Le numéro entre parenthèses est celui de l'article cité.

est égale à zero. La preuve qui concerne la corrélation du principe traité est exacte dans son résultat, mais on peut l'obtenir sans aucune approximation, c'est-à-dire avec plus de précision et de généralite. Calculons d'abord la variation de la forme différentielle de *Pfaff*.

$$
\begin{aligned}
F = Q_1 (q^1, q^2, \ldots, q^n)\, dq^1 + Q_2 (q^1, q^2, \ldots, q^n)\, dq^2 \\
+ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
+ Q_n (q^1, q^2, \ldots, q^n)\, dq^n = Q_\alpha (q)\, dq^\alpha
\end{aligned}
\tag{2. 1}
$$

présentee comme le produit intérieur d'un vecteur covariant Q_α, comme fonction des coordonnées générales q^α, et d'un vecteur contrevariant dq^α $(\alpha = 1, \ldots, n)$.

La première variation de la forme différentielle (2. 1), $\delta F = \delta (Q_\alpha\, dq^\alpha)$ sera

$$\delta F = \partial_\beta\, Q_\alpha\, dq^\alpha\, \delta q^\beta + Q_\alpha\, \delta (dq^\alpha) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

où ∂_β représente l'opérateur pour la dérivée partielle par rapport à la coordonnée q^β. Pour

$$\delta (dq^\alpha) = d (\delta q^\alpha)$$

nous avons

$$\delta F = d (Q_\alpha\, \delta q^\alpha) - dQ_\alpha\, \delta q^\alpha + \partial_\beta\, Q_\alpha\, dq^\alpha\, dq^\beta\ ,$$

parce que

$$Q_\alpha\, d (\delta q^\alpha) = d (Q_\alpha\, \delta q^\alpha) - dQ_\alpha\, \delta q^\alpha\ .$$

En tenant compte que

$$\partial_\beta\, Q_\alpha\, dq^\alpha\, \delta q^\beta = \partial_\alpha\, Q_\beta\, dq^\beta\, \delta q^\alpha\ ,$$

nous aménons l'expression de la variation de la forme différentielle (2. 1) à la forme

$$\delta F = d (Q_\alpha\, \delta q^\alpha) - [dQ_\alpha - \partial_\alpha\, (Q_\beta\, dq^\beta)]\, \delta q^\alpha\ .$$

Il est facile à voir que l'exprersion dans la parenthèse carrée, représente le premier système des équations de *Pfaff* (8)

$$(\partial_\alpha\, Q_\beta - \partial_\beta\, Q_\alpha)\, dq^\beta = 0,$$

écrite sous la forme

$$dQ_\alpha - \partial_\alpha\, F = 0. \tag{2. 2}$$

Dans le sens de ces équations, la variation de la forme (2. 1) se réduit à l'expression

$$\delta F = d (Q_\alpha\, \delta q^\alpha) = d (Q_1\, \delta q^1 + Q_2\, dq^2 + \cdots + Q_n\, dq^n) \tag{2. 3}$$

que nous utiliserons, ainsi que les équations (2. 2) pour établir la corrélation entre les principes de la variation et celui de *Pfaff—Bilimović*.

Posons d'abord le principe de *Pfaff—Bilimović* pour un système dynamique.

3. Pour saisir l'importance physique du principe de *Pfaff—Bilimović* il faut faire attention à deux notions, à savoir: la quantité de mouvent (MLT^{-1}) et l'action (ML^2T^{-1}). L'objet dont nous observons le mouvement possède déjà des caractéristiques dynamique, qui peuvent changer, d'un moment à l'autre. C'est pourquoi le principe comporte d'abord la constatation de l'état dynamique de l'objet dans un moment déterminé t, et le décrit par la forme dynamique, que contient tous les elements dynamiques, intérieurs et extérieurs, caractérisant ce mouvement; ensuite la description de la variation de ces éléments dynamiques pendant le mouvement est étudiée par la loi du changement de mouvement.

L'expression du procédé qu'il faut appliquer pour obtenir la forme dynamique est donnée en détail dans [7], c'est pourquoi nous l'avons nommée [17] la forme dynamique de *Pfaff—Bilimović*. Cependant, pour une compréhension plus claire, dans le présent travail la composition de la forme sera suivie par de brefs commentaires.

Observons le mouvement d'un système dynamique, holonome, schléronome avec r points dynamiques de masse $m_i\,(i=1, 2, \ldots, r)$ dans l'espace configuratif en n-dimension K_n. Déterminons la position du système par n coordonnée généralisées $q^\alpha\,(\alpha=1, 2, \ldots, n)$ (1). Les coordonnées du vecteur de la quantité de mouvement ou d'impulsion généralisée dans K_n, comme nous savons, nous la désignons par n coordonnées covariantes $p_\alpha=a_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta$ où $a_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique de l'espace K_n, et $\dot{q}^\beta\,(\beta=1, 2, \ldots, n)$ sont les coordonnées du vecteur coutrevariant de vitesse.

Ce systeme, comme tous les autres objets dynamiques (point, système, corps) a des propriétés dynamiques, qui peuvent être considérées dans un moment du temps déterminé, comme héritées ou acquises pendant le mouvement. Deux éléments: cinétique-*masse* et cinématique-*vitesse* sont fusionnés dans une notion dynamique, *la quantité de mouvement*, et repsésentent l'état dynamique de l'objet sur l'élément de déplacement dq^α. Sous la forme

$$a_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta\,dq^\alpha \tag{3. 1}$$

cette notion dynamique donne le premier terme de la forme dynamique Φ.

Sur le changement de la quantité de mouvement $a_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta$ du système dans l'intervalle du temps $(t, t+dt)$, toutes les formes actives influent respectivement sur dq^α, que nous désignerons dans K_n par les coordonnées généralisées Q_α du vecteur covariant de la force. Donc l'action, produite par les force Q_α sur la trajectoire réelle entre deux positions dans le temps dt, est égale à

$$\Big(\int_1^2 Q_\alpha\,dq^\alpha\Big)\,dt. \tag{3. 2}$$

Pendant ce mouvement, le système a son action provenant de l'énergie cinétique, c'est-à-dire

$$T\,dt. \tag{3. 3}$$

Le système s'oppose au changement de mouvement par sa propre action d'inertie.

$$-a_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta\,dq^\alpha = -p_\alpha\,\dot{q}^\alpha\,dt. \tag{3. 4}$$

L'état de l'objet décrit par (3. 1) et la somme des actions (3. 2), (3. 3) et (3. 4), qui apparaissent dans le changement de cet état, constituent la forme dynamique de *Pfaff—Bilimović*

$$\Phi=a_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta\,dq^\alpha-\Big(a_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^\beta-T-\int_1^2 Q_\alpha\,dq^\alpha\Big)\,dt. \tag{3. 5}$$

On voit tout de suite que cette forme est l'invariante par rapport aux différents systèmes de coordonnées, de sorte que pour sa composition des transformations préliminaires ne sont pas nécessaires. Ceci nous permet d'arriver plus facilement par l'étape suivante, par la loi du changement de mouvement aux éguations dynamiques du mouvement dans le systeme arbitraire des coordonnées.

Nous formulerons la loi du changement de mouvement comme suit:

Le changement de l'état de mouvement sur l'élément de déplacement correspond au changement de l'action dynamique sous laquelle s'effecture le mouvement le long de ces déplacements.

Le priucipe, ou la loi de changement de mouvement peut-être aussi exprimé par des notions mécaniques habituelles aux definitions bien connues. Par exemple sous la forme suivante:

Le changement de l'impulsion (ou de la quantité de mouvement) du système dynamique (ou de l'objet dynamique en général) sur l'élément de déplacement est égal au changement de l'action totale sous laquelle s'effectue le mouvement le long du déplacement.

La forme dynamique ayant les dimensions de l'action (ML^2T^{-1}), nous pouvons exprimer mathématiquement la loi précédente par la formule:

$$d(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) = \partial_\alpha \Phi \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{3. 6}$$

Dans le cas consideré de la forme (3. 5) la loi (3. 6) donne:

$$d(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) = \left(\frac{1}{2}\partial_\alpha a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma + Q_\alpha\right) dt \tag{3. 7}$$

où $a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma = 2T$. Après quelques transformations nous obtenons

$$a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + \frac{1}{2}(\partial_\gamma a_{\alpha\beta} + \partial_\beta a_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha a_{\beta\gamma})\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma = Q_\alpha \tag{3. 8}$$

parce que

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) = Q_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + \partial_\gamma a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma = a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + \frac{1}{2}(\partial_\gamma a_{\alpha\beta} + \partial_\beta a_{\gamma\alpha})\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma .$$

En introduisant les symboles de *Christoffel* de 1ère espèce

$$\Gamma_{\gamma\beta,\,\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_\gamma a_{\beta\alpha} + \partial_\beta a_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha a_{\beta\gamma})$$

et de 2ène espèce $\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} = a^{\alpha\lambda}\Gamma_{\gamma\beta,\,\alpha}$, $(\lambda = 1, \ldots, n)$ nous obtenons en partant de (3. 8) les équations de mouvement du système

$$a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + \Gamma_{\gamma\beta,\,\alpha}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma = Q_\alpha = \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt} \tag{3. 9}$$

sous la forme covariante. Ou en partant de (3. 5) on obtient par la descente de l'index

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) = \ddot{q}_\alpha - \partial_\gamma a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma$$

[3] Cette loi est nommée, souvent, la loi de gradient. Nous sommes d'avis que l'expression „*La loi du changement de mouvement*" est plus appropriée. Dans [7] *A. Bilimović* désigne ce terme par „*La forme de l'état*".

d'où

$$\ddot{q}_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma = Q_\alpha = \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt} \tag{3. 10}$$

Après la composition (3. 9) avec $a^{\alpha\lambda}$ nous arriverons à l'équation de mouvement du système

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma = Q^\lambda \tag{3. 11}$$

sous la forme contrevariante dans l'espace configuratif K.

Nous avons donc demontré qu'en partant da la forme dynamique (3. 5) en appliquant la loi du changement de mouvement (3. 6), nous arrivons aisément aux équations de mouvement du système dynamique. Nous nous sommes bornés à un système holonome schléronome pour établir plus simplement la corrélations avec le principe de *Pfaff — Bilimović* est valable pour le mouvement d'un objet quelconque dynamique [7].

4. Le principe de *D'Alembert* dans la forme de *Lagrange* pour un système dynamique holonome schéloronome avec des liaisons retenantes est valable lorsque toutes les variations possibles δq^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ est satisfaite la condition [17]:

$$\left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt}\right)\delta q^\alpha = 0. \tag{4. 1}$$

Puisqu'on observe ici le déplacement sur des variations possibles, il est naturel de chercher la variation de l'action pendant le déplacement, puisque, on cherche la corrélation entre le principe de *Pfaff — Bilimović* et celui de *D'Alembert — Lagrange.*

En étendant la variation aussi au temps t, d'après (2. 5), il est évident que pour la forme dynamique (3. 5.) la variation sera:

$$\delta\Phi = d\left[a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\,\delta q^\alpha - \left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha\,\delta q^\alpha\right)\delta t\right] \tag{4. 2}$$

car par l'analogie entre (2. 1) et (3. 5) on voit que Q_α dans la forme (2. 1) correspond à $a_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\beta$ dans la forme (3. 5) pour $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$, et

$$\left(a_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha\, \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha\, \delta q^\alpha\right)$$

dans la forme (3. 5) correspondra aux $n+1^{\text{ème}}$ coordonnées Q_{n+1} de la forme (2. 1) devant le différentiel dt, c'est-à-dire $dq^{n+1} = dt$.

Il faut démontrer maintenant la validité de l'expression (4. 2) par la variation directe da la forme (3. 5).

En variant (3. 5) nous obtenons

$$\delta\Phi = \delta\left(T + \int_1^2 Q_\alpha\, dq^\alpha\right) dt - \left(a_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha\, \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha\, dq^\alpha\right)\delta(dt). \tag{4. 3}$$

car les variations des deux premières sommes dans la forme (3. 5) disparaissent par l'addition. La variation $\delta (T+\int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha)\, dt$ que nous désignerons par $\delta\Phi_1$ est égale à

$$\delta\Phi_1 = \left(\frac{1}{2}\partial_\alpha a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \delta q^\alpha + a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta \delta\dot{q}^\gamma + Q_\alpha \delta q^\alpha\right) dt$$

$$= \left(a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta \frac{d}{dt}(\delta q^\gamma) + \frac{1}{2}\partial_\alpha a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \delta q^\alpha + Q_\alpha \delta q^\alpha\right) dt.$$

La première somme entre parenthèses nous pouvons l'exprimer ainsi:

$$\frac{d}{dt}(a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta \delta q^\gamma) - \partial_\alpha a_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta \dot{q}^\alpha \delta q^\gamma - a_{\beta\gamma}\ddot{q}^\beta \delta q^\gamma,$$

et remplacer dans l'expression précédente. Après un échange convenablement choisi des indices de sommation α et γ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n = \gamma)$ nous arrivons par le même procédé que dans les expressions (3. 7), (3. 8), et (3. 9) ou (3. 10) à la formule

$$\delta\Phi_1 = d(a_{\beta\alpha}\dot{q}^\beta \delta q^\alpha) + \left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt}\right)\delta q^\alpha \, dt, \tag{4. 4}$$

où nous avons tenir compte de l'égalité

$$\partial_\gamma a_{\beta\alpha}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \delta q^\alpha = \frac{1}{2}(\partial_\gamma a_{\beta\alpha} + \partial_\beta a_{\alpha\gamma})\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \delta q^\alpha .$$

La deuxième expression (4. 3) pour $\delta(dt) \neq 0$ nous la désignerons par $\delta\Phi_2$ et l'exprimons tout de suite sous la forme

$$\delta\Phi_2 = d\left[\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha\right)\delta t\right] - d\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha\right)\delta t,$$

ou, après des opérations simples sous la forme

$$\delta\Phi_2 = d\left[\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha\right)\delta t\right] - \left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt}\right) dg^\alpha \, \delta t.$$

On obtient ainsi par la variation directe de la forme (3, 5) finalement la formule

$$\begin{aligned}\delta\Phi = d\left[a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta \delta q^\alpha - \left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha\right)\delta t\right] \\ + \left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}^\alpha}{Dt}\right)\delta q_\alpha \, dt + \left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt}\right) dq^\alpha \, \delta t,\end{aligned} \tag{4. 5}$$

qui doit être égale à (4. 2).

Mais l'équation (2. 2) avec t variable dans la forme (3. 5), c'est-à-dire l'équation

$$d\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - T - \int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

done justement que l'expression devant δt est égale à:

$$\left(\dot{Q}_\alpha - \frac{Dq_\alpha}{Dt}\right) dq^\alpha = 0.$$

Pour que (4. 5) soit égale à (4. 2) il faut encore que

$$\left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt}\right) \delta q^\alpha \, dt = 0$$

ou

$$\left(Q_\alpha - \frac{D\dot{q}_\alpha}{Dt}\right) \delta q^\alpha = 0 \tag{4. 6}$$

parce que $dt \neq 0$. On obtient donc le principe de *D'Alembert—Lagrange* (4. 1).

Si nous observont le mouvement synchronisé sur les éléments de déplacement définit par

$$\delta (dt) = 0,$$

on voit d'après la formule (4. 2) que la variation de la forme dynamique (3. 5) doit être:

$$\delta \Phi = d \, (a_{\alpha\beta} \, \dot{q}^\beta \, \delta \, q^\alpha) \, . \tag{4. 7}$$

Mais (4. 3) nous montre que la variation de la forme dynamique (3. 5) pour $\delta (dt) = 0$ en effet est égale à (4. 4) c'est-à-dire.

Pour que cette expression soit égale à (4. 7) il faut que (4. 6) existe; ce que l'on voulait démontrer; à savoir: du principe de *Pfaff — Bilimović* résulte le principe de *D'Alembert — Lagrange*, et vice-versa, car, si (4. 1) est vrai, (4. 2) l'est aussi, ainsi que (4. 7) et (3. 10) est égale à (3. 6).

Nous avons considéré le mouvement synchronisé $\delta (dt) = 0$ comme un cas particulier, d'où l'on peut déduire que le principe de *Pfaff — Bilimović* est plus général que ceux de *D'Alembert — Lagrange*, et de *Hamilton*, celui-ci étant valable à condition que le mouvement sur les trajectoires détournées soit synchronisé avec le mouvement sur la trajectoire réelle.

5. Pour établir la corrélation entre le principe de *Pfaff — Bilimović* et les principes intégraux de mécanique, il suffit d'appliquer simplement l'opérateur de l'intégration à la forme dynamique, et ensuite faire la restriction d'après les conditions du principe pour lequel nous désirons établir la corrélation.

A. Bilimović a montré la corrélation simple entre le principe traité ici et celui de *Hamilton* dans son travail [6], c'est pourquoi nous ne la repetérons pas. Nous faisons seulement une remarque sur l'interprétation physique de ces deux principes pour faire ressortir une grande différence entre eux. En effet avec les restrictions, c'est-à-dire avec les conditions du principe de *Hamilton* on peut arriver au principe de *Pfaff — Bilimović* seulement si ces conditions existent. Mais le principe de *Pfaff — Bilimović* ne contient aucine restriction dans le cas général [7], et par le passage du principe de *Pfaff — Bilimović* à celui de *Hamilton* il faut introduire les conditions de *Hamilton*.

6. Montrons ici la corrélation simple entre le principe de *Pfaff — Bilimović* et celui de *Maupertuis — Lagrange* de la moindre action, qui tient compte aussi de l'action dynamique, mais la plus petite dans l'intervale $t_1 - t_0$.

Si nous intégrons la forme (3. 5) et faisons quelques simplifications, nous aurons l'expression:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(T + \int_1^2 Q_\alpha \, dq^\alpha \right) dt$$

ou, pour les conditions du principe de *Maupertuis — Lagrange* l'expression

$$\int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \, dt$$

pour laquelle il n'est pas difficile de montrer que

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \, dt = 0. \tag{6. 1}$$

Si nous désignons par $d\sigma^2 = a_{\alpha\beta} dq^\alpha \, dq^\beta$ l'élément de l'arc de l'espace actionnique configuratif, nous aurons

$$a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \, dt = \frac{d\sigma^2}{dt^2} dt = \frac{d\sigma}{dt} d\sigma = \overset{*}{v} d\sigma$$

où $v = \dfrac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$, et (6. 1) peut-être écrit sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} d\sigma = 0 \tag{6. 2}$$

ce qui amène à des équations de la linge géodesique

$$\frac{d^3 q^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{d\sigma} \frac{dq^\gamma}{d\sigma} = 0, \tag{6. 3}$$

et démontre le principe de *Maupertuis — Lagrange*.

On arrive au même résultat à l'aide de l'équation (3. 11) si l'on prend $Q_\alpha = 0$, et si on considère q comme une fonction du temps t par l'intermédiaire de l'arc σ, c'est-à-dire si l'on suppose que car $v = \text{const.}$ et on a $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right) = 0$. Du fait que les équations (3. 11) qui nous ont servi à obtenir (6. 3) qui donne (6. 1), sont obtenues à partir du principe de *Pfaff — Bilimović* à l'aide des conditions du principe de *Maupertuis*, il résulte clairement la corrélation entre le principe de *Pfaff — Bilimović* et celui de *Maupertuis — Lagrange*, ce que nous voulions démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Anđelić: *Tenzorski račun*, Beograd, 1952.

[2] T. Anđelić: *Primena Praff-ove metode u dinamici čvrstog tela*, Beograd, Glas SAN, CXCI, 1948.

[3] T. Anđelić: *Izvođenje osnovnih jednačina elastičnosti po Pfaff-ovoj metodi*, Beograd, 1950., Glas SAN, CXCVIII.

[4] T. Anđelić: *Equations fondamentales d'élasticité par la méthode de Pfaff*. Publications de l'inst. Math. T. III. 1950.

[5] T. Anđelić: *Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides.* Publications de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sciences. T. II, 1948.

[6] A. Bilimović: *Pfaff-ov opšti princip mehanike*, Glas SAN CLXXXIX, Beograd, 1946.

[7] A. Bilimović: *O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu*, Posebna izdanja SAN, CCCXIV, Beograd 1958.

[8] A. Bilimović: *Racionalna mehanika (mehanika sistema)*, Beograd 1951.

[9] A. Bilimović: *Über die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie.* Astronomische Nachrichten. B. 273. Heft. 4. Berlin, 1943.

[10] A. Bilimović: *Hilbertov integral nezavisnosti i Pfaffove jednačine varijacionog računa* Glas, CLXXXIX. 1946.

[11] A. Bilimović: *Pfaff-ova metoda u geometrijskoj optici.* Glas CXXXXIX. 1946.

[12] A. Bilimović: *Primena Pfaffove metode na teoriju podešenih kanoničnih jednačina.* Glas, CXC. 1948.

[13] A. Bilimović: *Pfaffov izraz i vektorske diferencijalne jednačine planetskih poremećaja.* Glas, CXCI. 1948.

[14] A. Bilimović: *Primena Pfaffove metode i vektorskih elemenata na problem triju tela.* Glas CXCI. 1948.

[15] A. Bilimović: *Sur l'accroissement pur de la forme différentielle et son application.* Publications de l'Ins. Math. Tome I. 1941.

[16] Đ. Mušicki: *Primena Pfaff-ove metode u teorijskoj fizici.* Zbornik radova mat. Inst. SAN, knjiga 5. Beograd, 1956.

[17] R. Stojanović: *Primena tenzorskog računa i diferencijalne geometrije u mehanici* (štampana predavanja), Beograd, 1960.

[18] V. Vujičić: *Kretanje dinamički promenljive tačke u konformnom prostoru.* Vjesnik društva matematičara i fizičara NRS, Beograd, 1960.

[19] V. Vujičić: *Kretanje dinamički promenljivih objekata i njegova stabilnost.* Beograd, 1961.

[20] V. Vujičić: „*O jednom opštem diferencijalnom fenomenološkom principu*“, recenzija na istoimenu knjigu, Referativni žurnal (mehanika) AN SSSR a, br. 6 1960.