PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15), p. 117—121.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES HYPERSPHÈRES INSCRITES AU SIMPLEXE n-DIMENSIONNEL

D. Lopandić et *B. Alimpić*

(Reçu le 1. VI 1962)

Nous allons faire la généralisation de quelques théorèmes connus pour les simplexes de l'espace 3-dimensionnel — triangle et tetraèdre, — pour le simplexe de l'espace n-dimensionnel. Désignons par $\Pi_{n+1}^{n}(A)$ le simplexe n-dimensionnel avec les sommets $A_k\,(k=1, \ldots, n+1)$ où l'index d'en haut désigne le nombre de dimensions, et celui d'en bas le nombre de sommets de ce simplexe. Désignons par $\Pi_{k/n}^{n-1}(A)$ les faces du simplexe où k détermine la face opposée au sommet A_k.

Théorème 1. Soient $h_k\,(k=1, \ldots, n+1)$ les hauteurs qui correspondent aux faces $\Pi_{k/n}^{n-1}(A)$ d'un simplexe $\Pi_{n+1}^{n}(A)$, r_0 le rayon de l'hypersphère S_0 inscrite au simplexe et r_k les rayons des hypersphères S_k dont chacune touche une face $\Pi_{k/n}^{n-1}(A)$ de ce simplexe et les prolongements des autres, on a alors:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{r_k^2}=\frac{n-3}{r_0^2}+4\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{h_k^2}. \tag{1}$$

Faisons la preuve analitiquement. Introduisons à l'espace n-dimensionnel euclidien R_n le système des coordonnées rectangulaires dont l'origine est un point quelconque dans le simplexe. Désignons par $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$ les coordonnées du sommet A_k de ce simplexe. Comme, d'après l'hypothèse, les points A_k n'appartiennent pas à la même hypersphère, on aura

$$D=\begin{vmatrix} x_{11}\cdots\cdots x_{n1} & 1\\ x_{12}\cdots\cdots x_{n2} & 1\\ \cdots\cdots\cdots & \cdot\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x_{1n+1}\ \cdots x_{nn+1} & 1\end{vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

On peut toujours numéroter les points A_k de manière que $D>0$. L'équation de l'hyperplan déterminé par la face $\Pi_{k/n}^{n-1}(A)$ sera

$$\pi_k\equiv\begin{vmatrix} x_{11}\cdots\cdots x_{n1} & 1\\ \cdots\cdots\cdots & \cdot\\ x_{1k-1}\cdots x_{nk-1} & 1\\ x_1\cdots\cdots\cdots x_n & 1\\ x_{1k+1}\cdots x_{nk+1} & 1\\ \cdots\cdots\cdots & \cdot\\ x_{1n}\cdots\cdots x_{nn+1} & 1\end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

où $x_i\,(i=1, \ldots, n)$ sont les coordonnées des poiuts de cet hyperplan.

Si nous développons ce déterminant dar les éléments de $k^{\text{ème}}$ ligne, nous aurons

$$\pi_k \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_i + A_{n+1}, \quad k=0\,(k=1,\,2,\,\ldots\,,\,n+1)$$

où A_{sr} est le complément algébrique de l'élément a_{sr} du déterminant (2), ou sous la forme normale

$$(4) \qquad \pi_k \equiv \frac{1}{P_k}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_i + A_{n+1,\,k}\right)=0$$

où

$$(5) \qquad P_k=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ik}}, \quad k=1,\,\ldots\,,\,n+1.$$

Il en résulte

$$(6) \qquad h_k=\frac{1}{P_k}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_{ik} + A_{n+1,\,k}\right)=\frac{D}{P_k}, \quad k=1,\,\ldots\,,\,n+1,$$

car la valeur en parenthèse est égale au déterminant (2) developpé par les éléments de $k^{\text{ème}}$ ligne.

Soit $O_0(x_{10},\, x_{20},\,\ldots\,,\,x_{n0})$ le centre de l'hypersphère inscrite au simplexe, alors

$$r_0=\frac{1}{P_k}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_{i0} + A_{n+1,\,k}\right), \quad k=1,\,\ldots\,,\,n+1.$$

En multipliant ces égalités respectivement par $P_k\,(k=1,\,\ldots\,,\,n+1)$ et en additionnant les égalités obtenues, on obtient

$$r_0 \sum_{k=1}^{n+1} P_k = x_{10} \sum_{k=1}^{n+1} A_{ik} + \cdots + x_{n0} \sum_{k=1}^{n+1} A_{nk} + \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1,\,k}.$$

Les expressions $\sum\limits_{k=0}^{n+1} A_{ik}$ $(i=1,\,\ldots\,,\,n)$ dans l'équation ci-dessus sont éqales à zéro et sa dernière somme au déterminant (2) developpé par la dernière colonne, et par conséquent, on aura

$$(7) \qquad r_0=\frac{D}{\sigma_n},$$

où $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n+1} P_k$.

Si nous désignons par $x'_{1k},\,\ldots\,,\,x'_{nk}$ $(k=1,\,\ldots\,,\,n+1)$ les coordonnées des centres des hypersphères S_k, nous trouverons d'une manière analogue les relations

$$r_k P_\nu = \sum_{i=1}^{n} A_{i\nu}\, x'_{ik} + A_{n+1,\,l}, \qquad (l=1,\,\ldots\,,\,k-1,\;k+1,\,\ldots\,,\,n+1;$$

$$k=1,\,\ldots\,,\,n+1)$$

$$-r_k P_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x'_{ik} + A_{n+1,\,k}.$$

En additionnant ces égalités nous obtiendrons

$$r_k\left(\sum_{\nu=1}^{n+1} P_\nu - 2P_k\right)=\sum_{\nu=1}^{n+1} A_{n+1,\,\nu}$$

d'où, d'après les notations déjá introduites, il suit

$$(8) \qquad r_k = \frac{D}{\sigma_n - 2P_k}.$$

On aura enfin

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{r_k^2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\sigma_n - 2P_k)^2}{D^2} = (n-3)\left(\frac{\sigma_n}{D}\right)^2 + 4\sum_{k=1}^{n+1} \frac{P_k^2}{D^2},$$

d'où, utilisant (6) et (7), l'on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{r_k^2} = (n-3)\frac{1}{r_0^2} + 4\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{h_k^2},$$

ce qu'il a fallu démontrer.

Le théorème 1 est la généralisation des théorèmes connus dans la géométrie de l'espace 3-dimensionnel sur le simplexe n-dimensionnel.

Dans ces considérations nous n'avons observé que ces hypersphères touchant une des faces $(n-1)$-dimensionnelles et les prolongements des autres. On n'a pas par cela épuisé toutes les hypersphères qui touchent tous les hyperplans déterminés par les faces d'un simplexe. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 2. Soit $\Pi_{n+1}^n(A)$ un simplexe quelconque de l'espace R^n, dans le cas général il existe 2^n hypersphères tangentes tous ces $n+1$ hyperplans déterminés par des faces $(n-1)$-dimensionnelles de ce simplexe.

Pour démontrer ce théorème il faut d'abord déterminer l'ensemble des centres de toutes les hypersphères qui touchent n hyperplans R_μ^{n+1} $(\mu = 1, \ldots, n)$ déterminés par les faces $\Pi_{\mu/n}^{n-1}(A)$ du simplexe donné, c'est-à-dire n hyperplans qui se coupent au sommet A_{n+1}.

Désignons par $Q_{\mu\nu}^{n-1}$ et $Q'^{n-1}_{\mu\nu}$ les hyperplans dont les points les centres sont des hypersphères qui touchent R_μ^{n-1} et R_ν^{n-1} $(\mu \neq \nu)$. Q_{12}^{n-1} et Q'^{n-1}_{12} coupent Q_{23}^{n-1} et Q'^{n-1}_{23} à quatre $(n-2)$-dimensionnels plans, dont chacun contient le point A_{n+1}, ces quatre plans coupent Q_{34}^{n-1} et Q'^{n-1}_{34} à huit plans $(n-3)$-dimensionnels dont chacun contient le point A_{n+1} etc. Enfin, 2^{n-2} plans 2-dimensionnels coupent $Q_{(n-1)\mu}^{n-1}$ et $Q'^{n-1}_{(n-1)\mu}$ à 2^{n-1} droites, dont chacune contient le points A_{n+1}.

Pour déterminer les centres des hypersphères qui, outre les hyperplans $R_1^{n-1}, R_2^{n-1}, \ldots, R_n^{n-1}$, touchent aussi l'hyperplan R_{n+1}^{n-1} de face $\Pi_{n+1/\mu}^{n-1}(A)$, désignons par $Q_{1(n-1)}^{n-1}$ et $Q'^{(n-1)}_{1(n+1)}$ les hyperplans dont les points sont les centres des hypersphères qui touchent R_1^{n-1} et R_{n-1}^{n-1}. Ces droites mentionnées coupent $Q_{1(n+1)}^{n-1}$ et $Q'^{n-1}_{1(n+1)}$ à 2^n points, ou quelques unes d'elles sont parallèles à ces hyperplans. Les points d'intersection sont les centres des hypersphères qui touchent les hyperplans $R_1^{n-1} \ldots, R_n^{n-1}$. D'où il en résulte que, dans le cas général, il existe 2^n hypersphères qui touchent tous les $n+1$ hyperplans déterminés par les faces $(n-1)$-dimensionnelles du simplexe $\Pi_{n+1}^n(A)$.

Par les théorèmes suivants nous donnerons quelques relations métriques qui existent entre les rayons des hypersphères considerées. Pour déduire ces théorémes nous allons grouper ces hypersphères d'après la position de leurs centres par rapport aux hyperplans déterminés par les faces $(n-1)$-dimensionnelles de ce simplexe.

Théorème 3. Soit $O_{i_1 \dots i_l}$ $(i_k = 1, 2, \dots, n+1;\ i_\mu \neq i_\nu)$ le centre, et $r_{i_1 \dots i_l}$ le rayon de celle de ces hypersphères dont le centre est par rapport à l hyperplans de ce coté-là duquel ne se trouve pas le centre O_0 du hypersphère inscrite, et par rapport aux autres $n+1-l$ hyperplans du même coté que le point O_0, alors, d'après les notations déjà introduites,

$$r_{i_1 \dots i_l} = \frac{D}{\sigma_n - 2 \sum_{k=1}^{l} P_{i_k}} \quad (l = 1, \dots, n-1). \tag{9}$$

Soient $x_{1, i_1 \dots i_l}, \dots, x_{n, i_1 \dots i_l}$ les coordonnées du centre de l'hypersphère dite, déterminons son rayon:

$$r_{i_1 \dots i_l} = \frac{1}{P_{j_k}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu j_k} x_{\nu i_1 \dots i_l} + A_{n+1, j_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n+1-l$$

$$-r_{i_1 \dots i_l} = \frac{1}{P_{i_k}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu i_k} x_{\nu i_1 \dots i_l} + A_{n+1, i_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, l$$

où $i_k \neq j_k$.

En multipliant ces égalités par P_{j_k}, aussi que par P_{i_k} respectivement, et en additionnant les égalités obtenues, on obtient

$$r_{i_1 \dots i_l} \left(\sum_{k=1}^{n+1-l} P_{j_k} - \sum_{k=1}^{l} P_{i_k} \right) = D$$

ou

$$r_{i_1 \dots i_l} \left(\sigma_n - 2 \sum_{k=1}^{l} P_{i_k} \right) = D$$

d'où il suit (9).

Il est évident que $l \neq n+1$. Au surplus, $l \neq n$, parce que dans le cas contraire le centre de cette hypersphère serait dans cet angle polyèdre n-dimensionnel qui est opposé à celui où se trouve le point O_0.

Il suit immédiatement du théorème 3 que le simplexe, ayant l'hypersphère dont le centre se trouve par rapport à l hyperplans du même coté que O_0, n'a pas le hypersphère dont le centre se trouve par rapport aux autres $n+1-l$ hyperplans du même coté que O_0.

Théorème 4. Soient, pour l fixé, toutes les valeurs $r_{i_1 \dots i_l}$ positives, nous aurons, pour $l = 2, \dots, n-1$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum^{\binom{n+1}{l}} \frac{1}{r_{i_1 \dots i_l}} = \frac{1}{r_0} \, \frac{n+1-2l}{l!} \prod_{\nu=0}^{l-2} (n-\nu), \qquad \text{et pour } l = 1. \\ &\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{r_k} = \frac{1}{r_0} (n-1). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Comme chaque index $i_1 \dots i_l$ est une certaine combinaison de $n+1$ éléments de $l^{\text{ème}}$ classe, il y aura, pour l fixé, au plus $\binom{n+1}{l}$ hypersphères. Il en résulte que

$$\sum^{\binom{n+1}{l}} \frac{1}{r_{i_1 \dots i_l}} = \frac{1}{D} \left[\binom{n+1}{l} \sigma_n - 2 \binom{n}{l-1} \sigma_n \right].$$

Comme l'on a $\varphi(l) \equiv \binom{n+1}{l} - 2\binom{n}{l-1} = \frac{n+1-2l}{l!} \prod_{\nu=0}^{l-2} (n-\nu)$, $\varphi(1) \equiv n-1$ il suit (10).

Spécialemment, si $l = \frac{n+1}{2}$, ce que nous avons dans le cas où n soit impair, il existera au plus $\frac{1}{2}\binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}$ hypersphères car les rayons des autres seront de même grandeur mais de signe contraire.

En faisant une numération convenable on peut supposer que tous les $r_{i_1 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}}$, dont l'index ne contient pas l, soient positifs.

Dans ce cas nous aurons

$$r_{i \ldots i_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{D}{\sigma_n - 2\sum_{k=1}^{n} P_{i_k}},$$

où $i_k \neq 1$.

On obtient, analoguement aux cas précédents,

$$\sum^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{r_{i_1 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}}} = \frac{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sigma_n - 2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}\sigma_n + 2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}P_1}{D}$$

et enfin

$$\sum^{\binom{n}{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{r_{i \ldots i_{\frac{n+1}{2}}}} = \frac{2}{n-1}\binom{n-1}{\frac{n-3}{2}}\left[\frac{n+1}{h_1} - \frac{1}{\rho_0}\right]. \tag{11}$$

En exprimant la somme des valeurs réciproques des rayons des hypersphères du même groupe par la fonction de la somme des valeurs réciproques des rayons des hypersphères du groupe quelconque, nous pourrions élargir le théorème 4.

Remarquons, qu'on obtient du théorème 4 (spécialement pour $l = 1$) le théorème de *V. Devidé* (publié dans Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Serija II, T. 6/№ 4, Zagreb, 1951) ne concernant que ces hypersphères qui ne touchent qu'une des faces et les prolongoments des autres.