PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15), p. 111—116.

SUR L'INVOLUTION DE DARBOUX DU TROISIÈME ORDRE

B. Rachajsky

(Reçu le 1. VI 1962)

Les équations aux dérivées partielles d'une fonction à deux variables indépendantes en involution de *Darboux* du troisième ordre admettent d'établir plusieurs propriétés qui sont analogues aux propriétés de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie*. On peut établir pour les équations en involution de *Darboux* du troisième ordre, par exemple, les propriétés suivantes: 1) on peut former le système des équations différentielles jouant le rôle d'un système des caractéristiques, 2) on peut étendre la notion de l'intégrale complète et préciser conditions nécessaires et suffisantes concernant cette intégrale, 3) on peut resoudre deux problèmes de *Jacobi* et d'une manière bien détreminée faire la liaison intime entres l'intégrale générale du système des caractéristiques et l'intégrale complète du système des équations aux dérivées partielles, 4) on peut aussi poser le problème de la formation d'une intégrale de *Cauchy* à l'aide d'une intégrale complète donnée, [1—4].

L'involution de Darboux du troisième ordre. Considérons un équation aux dérivées partielles du second ordre, utilisant les désignations habutuelles, sous la forme suivante

$$r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0. \tag{1}$$

On supposera pour la fonction f que $f \in C^2(G)$, où G est un domaine déterminé des variables x, y, z, p, q, s, t. A l'équation (1) faisons correspondre une autre équation aux dérivées partielles du troisième ordre suivant une loi qui sera déterminée plus tard, et écrivons

$$z_{xyy}+\Phi(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy})=0. \tag{2}$$

On supposera que $\Phi \in C^1(G_1)$, où G_1 est un domaine des variables $x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy}$ et $G \subset G_1$.

Formons les équations dérivées du second orde de l'équation (1) et du premier ordre de l'équation (2) respectivement par rapport aux variables indépendantes x et y:

$$\begin{aligned}
&z_{xxxx}+f_s z_{xxxy}+f_t z_{xxyy}+D_{xx} f=0,\\
&z_{xxxy}+f_s z_{xxyy}+f_t z_{xyyy}+D_{yx} f=0,\\
&z_{xxyy}+f_s z_{xyyy}+f_t z_{yyyy}+D_{yy} f=0,\\
&z_{xxyy}+\Phi_\delta z_{xyyy}+D_x \Phi=0,\\
&z_{xyyy}+\Phi_\delta z_{yyyy}+D_y \Phi=0,
\end{aligned} \tag{3}$$

δ, $\Phi_\delta, f_s, f_t, z_{xxxx}, \ldots$ désignant respectivement les dérivées partielles

$\partial^3 z/\partial y^3$, $\partial\Phi/\partial\delta$, $\partial f/\partial s$, $\partial f/\partial t$, $\partial^4 z/\partial x^4, \ldots$; quant à D_x, D_y, D_{xx}, D_{xy}, D_{yy},

elles désignent les dérivées partielles totales prises par rapport à x et y. En vertu de la définition de l'involution de *Darboux* du troisième ordre, les équations (3) ne doivent point être résolubles par rapport aux dérivées du quatrième ordre. Il en résulte les deux conditions de l'involution sous les formes suivantes

$$\Phi_\delta^2 - f_s\,\Phi_\delta + f_t = 0, \tag{4}$$

$$D_x\Phi + \frac{f_s}{\Phi_\delta}\, D_y\Phi - D_{yy} f = 0. \tag{5}$$

Système des équations différentielles ordinaires des caractéristiques. Grâce aux équations (3) on peut former les équations suivantes

$$\tag{3'}\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{f_t}{\Phi_\delta} m + D_{xx} f = 0,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\beta}{\partial y} - m + D_{yx} f = 0,\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\gamma}{\partial y} + D_x\Phi = 0,\\
&\frac{\partial\delta}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\delta}{\partial y} + D_y\Phi = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a posé: $\alpha \equiv z_{xxx}$, $\beta \equiv z_{xxy}$, $\gamma \equiv z_{xyy}$, $m \equiv (f_t/\Phi_\delta)\, D_x\Phi - D_{yx} f$. Complètons ces dernières équations par les égalités évidentes

$$\tag{6}\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial z}{\partial y} - p - \Phi_\delta\, q = 0,\\
&\frac{\partial p}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial p}{\partial y} - r - \Phi_\delta\, s = 0,\\
&\frac{\partial q}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial q}{\partial y} - s - \Phi_\delta\, t = 0,
\end{aligned}$$

$$\tag{6'}\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial r}{\partial y} - \alpha - \Phi_\delta\, \beta = 0,\\
&\frac{\partial s}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial s}{\partial y} - \beta - \Phi_\delta\, \gamma = 0,\\
&\frac{\partial t}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial t}{\partial y} - \gamma - \Phi_\delta\, \delta = 0.
\end{aligned}$$

L'ensemble d'équations (3'), (6), (6') réprésent un systéme de la forme de *Charpit*, [1], à dix fonctions inconnues: z, p, q, r, s, t, α, β, γ, δ des variables indépendantes x et y. Par conséquent, l'intégration du systéme (3'), (6), (6′) revient à l'intégration du systéme d'équations différentielles ordinaires des caractéristiques

$$(7)\qquad \begin{aligned} dx=\frac{dy}{\Phi_\delta}=\frac{dz}{p+\Phi_\delta q}=\frac{dp}{r+\Phi_\delta s}=\frac{dq}{s+\Phi_\delta t}=\frac{dr}{\alpha+\Phi_\delta\beta}=\frac{ds}{\beta+\Phi_\delta\gamma}=\frac{dt}{\gamma+\Phi_\delta\delta}=\\ =-\frac{d\alpha}{D_{xx}f+mf_t/\Phi_\delta}=-\frac{d\beta}{D_{yx}f-m}=-\frac{d\gamma}{D_x\Phi}=-\frac{d\delta}{D_y\Phi}.\end{aligned}$$

Pour nos équations (1) et (2) on peut être utilisé aussi le système des caractéristiques de la forme

$$(8)\qquad dx=\frac{dy}{\Phi_\delta}=\frac{dz}{p+\Phi_\delta q}=\frac{dp}{r+\Phi_\delta s}=\frac{dq}{s+\Phi_\delta t}=\frac{ds}{\beta+\Phi_\delta\gamma}=\frac{dt}{\gamma+\Phi_\delta\delta}=-\frac{d\delta}{D_y\Phi},$$

où r, γ, β doivent être exprimés par les autres vàriables figurant aux équations (1) et (2).

L'intégrale complète. Nous partons de l'équation

$$(9)\qquad z=V(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),$$

où C_i sont les paramètres distincts et indépendantes des variables x et y. Supposons que $V\in C^4(D')$, D' désignant un domaine de $x, y, C_1 \dots , C_6$. Formons les équations dérivées

$$(10)\qquad p=V_x(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),\quad q=V_y(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),$$

$$(11)\qquad r=V_{xx}(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),$$

$$(12)\qquad s=V_{xy}(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),\quad t=V_{yy}(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),$$

$$(13)\qquad \gamma=V_{xyy}(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),$$

$$(14)\qquad \delta=V_{yyy}(x,y,C_1,\ \dots\ ,C_6),$$

sous la condition suivante dans le domaine D'

$$(15)\qquad \Delta\equiv D\left(\frac{V,V_x,V_y,V_{xy},V_{yy},V_{yyy}}{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6}\right)\neq 0.$$

Si le résultat de l'élimination des paramètres C_i des équations (11), (13) et, (9) (10), (12), (14) ne donne que les équations (1) et (2), nous dirons dans ce cas que l'intégrale complète du système (1)—(2) est définie par l'équation (9).

On va maintenant démontrer que grâce aux conditions (4)—(5) la fonction V doit satisfaire aux conditions complémentaires.

En effet, on peut démontrer aisément qu'il y a lieu les égalités suivantes

$$(16)\qquad (f_s)=-\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad (f_t)=-\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad (\Phi_\delta)=-\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

où les parenthèses signifient le résultat de la substitution de z, p, q, s, t, δ respectivement par leurs valeurs V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{yyy} et $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les déterminants fonctionnels suivants

$$(17)\qquad \begin{gathered}\Delta_1\equiv D\left(\frac{V,V_x,V_y,V_{xx},V_{yy},V_{yyy}}{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6}\right),\quad \Delta_2\equiv D\left(\frac{V,V_x,V_y,V_{xy},V_{xx},V_{yyy}}{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6}\right),\\ \Delta_3\equiv D\left(\frac{V,V_x,V_y,V_{xy},V_{yy},V_{xyy}}{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6}\right).\end{gathered}$$

La condition (4) nous donne

$$(4') \qquad (\Phi_\delta)^2-(f_s)(\Phi_\delta)+(f_t)=0$$

où les parenthèses ont les significations antérieurement établies. Grâce aux égalités (16) la condition (4′) devient

$$\left(\frac{\Delta_3}{\Delta}\right)^2-\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\Delta_3}{\Delta}-\frac{\Delta_2}{\Delta}=0,$$

ou

$$(18) \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \qquad \Delta_3^{\bullet}\neq 0.$$

On peut mettre la condition (18) sous une forme plus symétrique. En effet, en vertu des identités évidentes

$$V_{xx}+f(x\ y, V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yyy})=0,$$

$$V_{xxy}+(D_y f)=0$$

et (16) on peut établir une rélation nouvelle

$$(18') \qquad \Delta'=-(f_s)\,\Delta_3-(f_t)\,\Delta,$$

ou

$$(18'') \qquad \frac{\Delta'}{\Delta_3}=\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta_3},$$

désignant par Δ' le déterminant fonc.ionnel

$$(19) \qquad \Delta'\equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{xxy}}{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6}\right).$$

Grâce à la rélation obtenue (18″), on peu. mettre la condition (18) sous la forme convenable, plus symé.rique

$$(20) \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\Delta'}{\Delta_3}, \qquad \Delta_3\neq 0.$$

La rélation (5) ou la réla.ion suivan.e

$$(5') \qquad (D_x\Phi)+(D_y\Phi)(f_t/\Phi_\delta)-(D_{yy}f)=0$$

est verifiée indentiquement, grâce à la condition (18), à savoir

$$\left(\frac{\Delta_3}{\Delta}-\frac{\Delta_2}{\Delta_3}-\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)V_{xyyy}=0.$$

Donc, la rela.ion (5) n'impose. pas des conditions nouvelles à la fonction V.

Il est aisé à démontrer qu'il doit avoir lieu la condition nouvelle

$$(21) \qquad \delta_1=0$$

δ_1 désignant le dé.erminant fonc.ionnel

$$(22) \qquad \delta_1\equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}}{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6}\right),$$

car l'équation (1) ne dépand pas de la dérivée $\delta=z_{yyy}$.

On peut démontrer que les conditions (18) ou (20) et (21) sont aussi suffisantes.

Donc, l'équation (9) definit une intégrale complète du système (1)—(2) en involution de *Darboux* du troisième ordre si la fonction admet les conditions nécesaires et suffisantes

(23) $$\Delta \neq 0, \quad \delta_1 = 0, \quad \Delta_3/\Delta = \Delta'/\Delta_3,$$

Δ, Δ_3, Δ' et δ_1 désignant les déterminants fonctionnels (15), (17), (19) et (22).

L'intégrale générale des caractéristiques. Il est aisé à démontrer que les formules

(24) $$z = V, \quad p = V_x, \quad q = V_y, \quad s = V_{xy}, \quad t = V_{yy}, \quad \delta = V_{yyy}$$

définissent les six premières intégrales distinctes du système

(8′) $$dx = \frac{dz}{p + \Phi_\delta\, q} = \frac{dp}{r + \Phi_\delta\, s} = \frac{dq}{s + \Phi_\delta\, t} = \frac{ds}{\beta + \Phi_\delta\, \gamma} = \frac{dt}{\gamma + \Phi_\delta\, \delta} = -\frac{d\delta}{D_y \Phi}.$$

En effet, on a les équations dérivées

(25) $$\begin{gathered} \frac{dz}{dx} = V_x + V_y \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = V_{xx} + V_{xy} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} = V_{xy} + V_{yy} \frac{dy}{dx}, \\ \frac{ds}{dx} V_{xxy} + V_{xyy} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dt}{dx} = V_{xyy} + V_{yyy} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\delta}{dx} = V_{xyyy} + V_{yyyy} \frac{dy}{dx} \end{gathered}$$

et en vertu des relations

$$(\Phi_\delta) = -\frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (D_y\, \Phi) = -V_{xyyy} + \frac{\Delta_3}{\Delta} V_{yyyy},$$

$$V_{xx} + f(x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}) = 0,$$

$$V_{xyy} + \Phi(x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{yyy}) = 0,$$

et de l'équation premiére du système (8)

(26) $$\frac{dy}{dx} = (\Phi_\delta),$$

où les parenthèses ont les significations antérieurement établie, le résultat de l'élimination des constantes C_i, définies par les équations (24), entre les équations (25) ne donnet que les équations (8′).

Cherchons, encore, l'intégrale de l'équation (26) ou d'une des équations équivalentes

(27) $$\Delta_3\, dx + \Delta\, dy = 0,$$

(28) $$\Delta'\, dx + \Delta_3\, dy = 0.$$

Introduisons le symbole suivant

(29) $$(i, j, k, l, m) \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}}{C_i, C_j, C_k, C_l, C_m}\right),$$

i, j, k, l, m désignant les nombres entiers de 1 à 6. On peut former les identités suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right]=a_1\Delta'+a_2\Delta_3,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right]=b_1\Delta'+b_2\Delta_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right]=a_1\Delta_3+a_2\Delta,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right]=b_1\Delta_3+b_2\Delta,$$

a_i et b_i désignant les fonctions des variables $x, y, C_1, \ldots, C_6$ bien determinées. Grâce à la condition (20) il en résulte

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m}\right]}{\Delta_3}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right]}{\Delta}\tag{30}$$

et aussi

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right]}{\Delta'}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right]}{\Delta_3}.\tag{31}$$

Donc, les équations (27) ou (28) ont les intégrales suivantes

$$I_1\equiv\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}=\text{const.},\qquad I_2\equiv\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}=\text{const.}$$

$$(I_\sigma)_x\neq 0,\quad (I_\sigma)_y\neq 0,\quad (\sigma=1,2).$$

Ces intégrales ne sont pas indépendantes par rapport aux variables x et y. En effet, en vertu des relations (30) et (31), on a

$$D\left(\frac{I_1, I_2}{x, y}\right)=0.$$

On peut formuler le théorème suivant — théorème de *Jacobi*:

L'intégrale générale du système des équations différentielles des caractéristiques (8) est definie, en vertu de l'intégrale complète (9) et (23), par les formules suivantes

$$z=V,\ p=V_x,\ q=V_y,\ s=V_{xy},\ t=V_{yy},\ \delta=V_{yyy},$$

$$I_1\equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}}{C_i, C_k, C_l, C_m, C_n}\right):D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}}{C_i, C_j, C_k, C_l, C_m}\right)=C_7,$$

$$(I_1)_x\neq 0,\quad (I_1)_y\neq 0.$$

Quant aux autres propriétés citées au debut de cet article, on peut les établir par les méthodes analogues utilisées antérieurement [2—4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Saltykow: *Fonctions caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Bul. Cl. des Sc. math. et nat de l' Ac. Serbe des Sc. t. X, № 2, 1956.

[2] B. Rašajski: *Sistemi parcijalnih jednačina II reda*, Vesnik društva matematičara i fizičara, VII, 1955.

[3] B. Rachajsky: *Théorème de Jacobi pour le système d'équations en involution de Darboux-Lie*, Bulletin de la Société des mathématiciences et physiciens de la R. P. de Serbie, IX, 1957.

[4] B. Rachajsky: *Note sur le problème de Cauchy du système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de Darboux-Lie*, Bulletin de la Société des mathematiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, X, 1958.