PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15) p. 101—107.

# SUR LA LIMITE INFÉRIEURE DES MODULES DES ZÉROS DES POLYNOMES DE DEUX VARIABLES

*D. Markovitch*

(Reçu le 5. III 1962)

**Introduction.** Pour les pôlynômes d'une variable réelle ou complexe, il existe plusieurs méthodes ayant pour le but de limiter tous les zéros, resp. les modules des ces zéros, inférieurement, supérieurement, ou bien de les localiser dans les domaines divers. Les résultats analogues sont connus aussi et dans le cas où la limite ne dépend que d'une suite de coefficients, la limitation concernant alors aux $p<n$ zéros du polynôme de degré $n$.

Pour les polynômes de deux ou plusieurs variables, les méthodes directes de la limitation des zéros sont, comme je sais, peu connus. Il est vrais que le problème préalable pour les polynômes de deux variables peut être réduit à l'étude de deux polynômes d'une seule variable par la méthode de l'élimination, mais je tiens cette voie assez difficile. Car, si l'on considère par exemple le système de deux équations de deux variables, ses degrées étant $m$ resp. $n$, leur résolvente, le déterminant dont les éléments sont les polynômes d'une variable, sera d'ordre $m+n$. Sa transformation dans un autre déterminant, dont les éléments faciliterons de former immédiatement des régions localisant les zéros, exige de multiplier une suite de matrices et de calculer l'inverse d'une matrice[1]. Le travail s'augmente de plus, si nous avons trois ou plusieurs-équations. C'est pourqoi ils me semblent préférables les méthodes directes, même peut-être moins précises.

Nous allons appliquer une méthode directe qui assignera un domaine où il n'y a pas des zéros. Cette *métode de comparaison* par la moyenne arithmétique, comme j'ai la nommé, s'áplique ici de même très simplement et donne la possibilité d'en déduir les types divers et générals des limites, comme l'on a déjà montré semblablement au cas des zéros des polynômes d'une seule variable.

**I. Le cas d'úne équation.** Soit donné une équation $(a_{00}\neq 0)$

$$(1)\qquad P(z,u)=\sum_{\mu,\nu}^{n} a_{\mu\nu} z^{\mu} u^{\nu}=0$$

$$\mu,\nu=0,1,2,\ldots,n \quad \text{et} \quad 0\leqslant \mu+\nu\leqslant n$$

---

[1] Sur les méthodes de la localisation des zéros d'un déterminant dont les éléments sont des polynômes d'une variable, voir un bon livre: M. P a r o d i, *La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications*, Paris, Gauthiér — Villars, 1959.

appartenant au corps des complexes, et l'inégalité

$$|a_{00}| \leqslant \sum_{\mu,\nu}^{n} |a_{\mu\nu}| r^{\mu} \rho^{\nu}, \quad |z| = r, \quad |u| = \rho \tag{2}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \mu + \nu \leqslant n$$

déduite de l'équation (1).

Formons, de l'autre coté, une fonction $G(r, \rho)$ des variables $r$ et $\rho$ définie par une série ($c_{\mu\nu}$ arbitraire et nonnégative)

$$G(r, \rho) = \sum_{\mu,\nu}^{\infty} c_{\mu\nu} r^{\mu} \rho^{\nu} \tag{3}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu + \nu \geqslant 1.$$

Cette fonction, dont les conditions de convergence seront déterminées plus tard, servira comme un élément de comparer l'inégalité (2) à la manière suivante

$$\frac{|a_{00}|}{G(r, \rho)} \leqslant \sum_{\mu,\nu}^{n} |a_{\mu\nu}| r^{\mu} \rho^{\nu} \Big/ \sum_{\mu,\nu}^{\infty} c_{\mu\nu} r^{\mu} \rho^{\nu}. \tag{4}$$

Cependant, l'inégalité (4) permet d'en déduire l'inégalité définitive

$$|a_{00}| \leqslant M \cdot G(r, \rho), \tag{5}$$

où $M$ désigne

$$M = \operatorname{Max} \left\{ \frac{|a_{\mu\nu}|}{c_{\mu\nu}} \right\} \tag{6}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu + \nu \geqslant 1.$$

Donc il suit le résultat:

*si l'on choisit la fonction $G(r, \rho)$ de telle manière, que l'ensemble $D$ des solutions $\zeta$, $\eta$ nonnégatives de l'équation*

$$|a_{00}| - MG(r, \rho) = 0 \tag{7}$$

*soit situé dans le domaine de convergence de $G(r, \rho)$, alors $D$ représentera la limite inférieure des modules des zéros de l'équation* (1).

Le choix des constantes arbitraires $c_{\mu\nu}$, c'est-à-dire le choix de la fonction de comparaison $G(r, \rho)$, détermine les types divers des limites inférieures de l'équation considerée.

Exemples. — 1°. Soit

$$G(r, \rho) = e^{r+\rho} - 1 = \sum_{\mu,\nu}^{\infty} \frac{r^{\mu} \rho^{\nu}}{\mu! \, \nu!}.$$

Alors il est

$$|a_{00}| \leqslant M \cdot (e^{r+\rho} - 1), \quad M = \operatorname{Max} \{\mu! \, \nu! \, |a_{\mu\nu}|\},$$

d'où

$$r + \rho > l_n \left( 1 + \frac{|a_{00}|}{M} \right).$$

2°. Les fonctions (les paramètres $t$, $\tau > 0$)

$$G(r, \rho) = \frac{r + \rho}{t - (r + \rho)} = \sum_{\mu,\nu}^{\infty} \binom{\mu + \nu}{\nu} \frac{r^{\mu} \rho^{\nu}}{t^{\mu+\nu}},$$

avec

$$M = \operatorname{Max}\left\{\frac{|a_{\mu\nu}|\, t^{\mu+\nu}}{\binom{\mu+\nu}{\nu}}\right\} = M(t);$$

$$G(r, \rho) = \frac{\dfrac{r}{t} + \dfrac{\rho}{\tau}}{1 - \left(\dfrac{r}{t} + \dfrac{\rho}{\tau}\right)} = \sum_{\mu, \nu}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{r^{\mu} \rho^{\nu}}{t^{\mu} \tau^{\nu}},$$

avec

$$M = \operatorname{Max}\left\{\frac{|a_{\mu\nu}|\, t^{\mu} \tau^{\nu}}{\binom{\mu+\nu}{\nu}}\right\} = M(t, \tau);$$

enfin

$$G(r, \rho) = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{r}{t}\right)\left(1 - \dfrac{\rho}{\tau}\right)} - 1 = \sum_{\mu, \nu}^{\infty} \frac{r^{\mu} \rho^{\nu}}{t^{\mu} \tau^{\nu}},$$

avec

$$M = \operatorname{Max}\left\{t^{\mu} \tau^{\nu} |a_{\mu\nu}|\right\} = M(t, \tau),$$

peuvent déterminer les autres types des limites inferieures. Les paramètres introduits servent d'élargir le domaine de convergence des fonctions $G(r, \rho)$.

L'équation (7) a été obtenue en comparant l'inégalité (2) immédiatement. Cependant, l'inégalité (2) peut être d'abord transformée par une autre inégalité, et après celà comparée à la manière déjà montrée en haut.

Ecrivons pour celà l'inégalité (2) identiquement

$$|a_{00}| \leqslant \sum_{\mu, \nu}^{n} \left|\frac{a_{\mu\nu}}{c_{\mu\nu}}\right| \cdot c_{\mu\nu} r^{\mu} \rho^{\nu} \tag{8}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \mu + \nu \leqslant n,$$

où $c_{\mu\nu}$ désignent, comme auparavant, des paramètres arbitraires nonnégatifis, et la transformons par l'inégalité de Hölder. Il y aura

$$|a_{00}| \leqslant \left\{\sum_{\mu, \nu}^{n} \left|\frac{a_{\mu\nu}}{c_{\mu\nu}}\right|^{m}\right\}^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{\sum_{\mu, \nu}^{n} (c_{\mu\nu} r^{\mu} \rho^{\nu})^{m'}\right\}^{\frac{1}{m'}}, \tag{9}$$

$$m > 0, \ m' > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1,$$

et, à fortiori

$$|a_{00}|^{m'} \leqslant \left\{\sum_{\mu, \nu}^{n} \left|\frac{a_{\mu\nu}}{c_{\mu\nu}}\right|^{m}\right\}^{\frac{m'}{m}} \cdot \left\{\sum_{\mu, \nu}^{\infty} c_{\mu\nu}^{m'} r^{\mu m'} \rho^{\nu m'}\right\}, \tag{10}$$

en supposant $c_{\mu\nu}$ convenablement choisis que la convergence de la fonction

$$L(r, \rho) = \sum_{\mu, \nu}^{\infty} c_{\mu\nu}^{m'} r^{\mu m'} \rho^{\nu m'} \tag{11}$$

soit remplie. En définitive, la limite inférieure sera donnée par l'équation

(12)
$$|a_{00}|^{m'} - S_n^{\frac{m'}{m}} \cdot L(r, \rho) = 0,$$

où l'on a désigné

$$S_n = \sum_{\mu, \nu}^{n} \left| \frac{a_{\mu\nu}}{c_{\mu\nu}} \right|^m .$$

Ainsi par exemple, pour

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{t^{\mu} \tau^{\nu}}, \quad L(r, \rho) = \frac{\left(\frac{r}{t}\right)^{m'} + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^{m'}}{1 - \left(\left(\frac{r}{t}\right)^{m'} + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^{m'}\right)},$$

$$S_n(t, \tau) = \sum_{\mu, \nu}^{n} |a_{\mu\nu}|^m t^{\mu m} \tau^{\nu m}, \quad t, \tau > 0,$$

l'équation (12) donne comme la limite inférieure

(13)
$$\left(\frac{r}{t}\right)^{m'} + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^{m'} = \frac{|a_{00}|^{m'}}{|a_{00}|^{m'} + S_n^{\frac{m'}{m}}} .$$

Le cas $m' = m$ réduit léquation (13) á

(14)
$$\left(\frac{r}{t}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2 = \frac{|a_{00}|^2}{|a_{00}|^2 + S_n(t, \tau)}$$

où $S_n(t, \tau)$ est ici

$$S_n(t, \tau) = \sum_{\mu, \nu}^{n} |a_{\mu\nu}|^2 t^{2\mu} \tau^{2\nu} .$$

*Remarque.*—Les formes des limites (13) et (14) sont tout à fait analogues aux formes correspondantes des limites pour les polynômes d'une variable.
En posant $\rho = 0$, $\tau = 1$, la limite (13) devient

$$r = \frac{|a_0| t}{\sqrt[m']{|a_0|^{m'} + \left(\sum_{n-1}^{n} |a_\mu|^m t^{m\mu}\right)^{\frac{m'}{m}}}},$$

obtenue par l'auteur[1)], et dans le cas où $m' = m$, la limite (14) devient

$$r = \frac{|a_0| t}{\sqrt{\sum_{\mu=0}^{n} |a_\mu|^2 t^{2\mu}}},$$

celle de *M. Petrovitch*[2]. La forme semblable à (13) pour la limite supérieure des modules des polynômes d'une variable a été obtenue par *P. Montel*[3], et par l'auteur[4].

---

[1] D. Markovitch, *Sur la lim. inf. des modules des zéros d'ún polynôme*, Publications de l'Institut math. tome II, Beograd, 1948.

[2] M. Petrovitch, *Remarque sur les zérns des séries de Taylor*, Bull. de la Soc. math. de France, tome XXIX, 1901.

[3] P. Montel, *Sur la limite sup. des modules des zéros des polynomes*, C. R. de la Soc. des lëttres et des sciences de Varsovie, 24, 1931, Cl. III.

[4] D. Markovitch, *Sur la lim. sup. des modules des racines d'une équ. algébrique*, Bull. de l'Académie des sciences math. et naturelles A, N⁰ 6 Beograd, 1939.

Il faut encore remarquer que l'équation (12) se réduit à l'équation (7) si $m \to \infty (m'=1)$. De même, sous les conditions $m \to \infty (m'=1)$ la limite (13) se traduit à la limite

(15) $$\nu\tau + \rho t = \frac{|a_{00}|\, t\tau}{|a_{00}| + M(t, \tau)}, \quad M(t, \tau) = \operatorname{Max}\{t^\mu \tau^\nu \,|\, a_{\mu\nu}|\},$$

tandis que celle-ci se réduit pour $\rho = 0$, $\tau = 1$ à la forme de la lim. inf. obtenue par *E. Landau*[1] et *J. Karamata*[2] pour les modules des zéros des fonctions analytiques d'une variable.

**II. Le cas de deux équations.** L'étude de la lim. inf. des modules des zéros d'une équation de deux variables montre que la méthode de la résolution de cette question consiste dans la réduction de l'inégalité (2) à l'inégalité plus simple à l'étudier. Ainsi, comme on voit, la question se réduit à l'étude des fonctions de deux variables $r$, $\rho$, plus simple que celle de (2). Les exemples cités et les cas étudiés jusqu'ici montrent que ces fonctions sont la somme $r + \rho$, où plus généralement, la fonction linéaire $\frac{r}{t} + \frac{\rho}{\tau}$. Puis la fonction $\left(1 - \frac{r}{t}\right)\left(1 - \frac{\rho}{\tau}\right)$, ou $\left(\frac{r}{t}\right)^{m'} + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^{m'}$ ou bien plus simple $\left(\frac{r}{t}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2$. On peut les choisir comme l'on veut.

Maintenant nous allons étudier la même question pour le systéme de deux équations algébriques de deux variables. Soient dans ce but données deux équations

(16) $$\begin{aligned} P(z, u) &= \sum_{\alpha, \beta}^{m} a_{\alpha\beta}\, z^\alpha u^\beta = 0, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, m \text{ et } 0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant m \\ Q(z, u) &= \sum_{\mu, \nu}^{n} b_{\mu\nu}\, z^\mu u^\nu = 0, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ et } 0 \leqslant \mu + \nu \leqslant n. \end{aligned}$$

En déduisant les inégalités corespondantes ($a_{00} \neq 0$, $b_{00} \neq 0$)

(17) $$\begin{aligned} |a_{00}| &\leqslant \sum_{\alpha, \beta}^{m} |a_{\alpha\beta}|\, r^\alpha \rho^\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, m \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant m \\ |b_{00}| &\leqslant \sum_{\mu, \nu}^{n} |b_{\mu\nu}|\, r^\mu \rho^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, , \ldots, n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \mu + \nu \leqslant n, \end{aligned}$$

et en les comparant, comme dans la cas (I), la première avec

(18a) $$G(r, \rho) = \sum_{\alpha, \beta}^{\infty} g_{\alpha\beta}\, r^\alpha \rho^\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \geqslant 1,$$

et la seconde avec

(18b) $$H(r, \rho) = \sum_{\mu, \nu}^{\infty} h_{\mu\nu}\, r^\alpha \rho^\beta, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{et} \quad \mu + \nu \geqslant 1,$$

---

[1] E. Landau, *Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie*, The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 3, 4 June 1914.

[2] J. Karamata, *Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonctions analytiques*, Glas S. K. Akademije CXXVII, Beograd.

($g_{\alpha\beta}$ et $h_{\mu\nu}$ les paramètres arbitraires nonnégatifs), on obtiendra

$$|a_{00}| \leqslant M_a \cdot G(r, \rho) \quad \text{et} \quad |b_{00}| \leqslant M_b \cdot H(r, \rho), \tag{19}$$

$$M_a = \operatorname{Max}\left\{\left|\frac{a_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}}\right|\right\}, \qquad M_b = \operatorname{Max}\left\{\left|\frac{b_{\mu\nu}}{h_{\mu\nu}}\right|\right\}. \tag{20}$$

La résolution du problème posé se réduit à résoudre des inégalités (19), c'est-à-dire de déterminer les solutions $r$, $\rho$ satisfaisant simultanément les inégalités mentionnées. Mais la question de la validité de l'ensemble des solutions communes des (19) à l'égard de la convergence des fonctions (18a) et (18b), doit être aussi expliquée. En effet, soient désignées avec $D_g$ et $D_h$ les ensembles des solutions satisfaisant la première, respectivement la seconde des inégalités (19). L'ensemble $D$ des solutions qui satisfont toutes les deux sera représenté par

$$D = D_g \cap D_h.$$

De même, si $\Delta_G$ et $\Delta_H$ désignent les domaines de convergence de la fonction $G(r, \rho)$, respectivement de $H(r, \rho)$, le domaine commun de convergence $\Delta$ sera

$$\Delta = \Delta_G \cap \Delta_H.$$

La condition de convergence, s'est-à-dire l'ensemble des solutions communes qu'il faut avoir égard, sera par conséquent

$$D \subset \Delta.$$

Enfin, le domaine dans lequel les équations (16) n'ont pas des zéros, sera le complément de $D$

$$\Delta \setminus D.$$

Par le choix des fonctions $G(r, \rho)$ et $H(r, \rho)$ peuvent être obtenus les divers types de la limitation.

Exemple. — 1°. Soient

$$G(r, \rho) = e^{P_1 r + q_1 \rho} - 1, \quad H(r, \rho) = e^{P_2 r + q_2 \rho} - 1$$

$$P_i, \; q_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Les inégalités (19) sont maintenant

$$e^{P_1 r + q_1 \rho} \geqslant 1 + \frac{|a_{00}|}{M_b}, \quad e^{P_2 r + q_2 \rho} \geqslant 1 + \frac{|b_{00}|}{M_b},$$

avec

$$M_a = \operatorname{Max}\left\{\frac{|a_{\alpha\beta}|\,\alpha!\,\beta!}{p_1^{\alpha}\, q_1^{\beta}}\right\}, \quad M_b = \operatorname{Max}\left\{\frac{|b_{\mu\nu}|\,\mu!\,\nu!}{p_2^{\mu}\, q_2^{\nu}}\right\}.$$

Elles peuvent être mises sous la forme explicite comme

$$p_1 r + q_1 \rho \geqslant s_1$$

$$p_2 r + q_2 \rho \geqslant s_2$$

$s_1$, $s_2$ étant

$$s_1 = \ln\left(1 + \frac{|a_{00}|}{M_a}\right), \quad s_2 = \ln\left(1 + \frac{|b_{00}|}{M_b}\right).$$

Ici toutes les deux inégalités soint linéaires. On peut par ex. combiner l'inégalité (14) et une des inégalités linéaires, notament

$$p_1 r + q_1 \rho \geqslant s_1$$

$$\left(\frac{r}{t}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2 \geqslant \frac{|a_{00}|^2}{|a_{00}|^2 + S_n(t,\tau)},$$

dont la discussion déterminera le domaine cherché.

*Remarque.* — La méthode exposée, comme on voit, peut être généraliser à l'étude des systèmes des équations de trois et plusieurs variables.