PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 1 (15), p. 93—100.

ÜBER DIE ERWEITERUNG EINES M. ZACHARIAS — D. POMPEIU-SCHEN SATZES

Slobodan V. Pavlović

(Eingegangen am 5. III 1962)

1. Wenn man von n Segmenten einen *geschlossenen* Streckenzug konstruieren kann, sagen wir *sie sind* (G).

D. Pompeiu[1] hat mittels einer Identität für komplexe Zahlen den folgenden Satz bewiesen:

Die Verbindungen eines beliebigen Punktes aus der Ebene eines geschlossenen polygonalen Streckenzuges, dessen Seiten sämtlich gleich lang sind, mit den Mitten der Seiten dieses Streckenzuges, sind (G).

M. Zacharias[2] *hat mittels einer Vektorgleichung gezeigt, dass diese Verbindungen auch* (G) *sind wenn die Seiten des erwähnten Streckenzuges nicht gleich lang sind, dessen Zahl aber gerade ist.*

In der folgenden Arbeit möchten wir den folgenden etwas erweiterten Satz beweisen:

Wenn man die Seiten von zwei räumlichen geschlossenen Streckenzügen mit einer geraden Seitenzahl in Verhältnissen

$$m_i : n_i \text{ bzw. } m_i' : n_i' \; (m_i \neq 0, \quad n_i \neq 0, \quad m_i' \neq 0, \quad n_i' \neq 0)$$

teilt so dass

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{m_3}{n_3} = \cdots = \frac{n_{2n}}{m_{2n}}, \qquad \frac{m_1'}{n_1'} = \frac{n_2'}{m_2'} = \frac{m_3'}{n_3'} = \cdots = \frac{n_{2n}'}{m_{2n}'},$$

und die entsprechenden Punkte verbindet, die so erhaltenen Strecken sind (G).

Es wird bewiesen werden, dass *dieser Satz* für die *ungerade Seitenzahl nicht richtig ist.*

Sich auf den erweiterten *Zacharias*[2]-schen und einen vom Verfasser[3] bewiesenen Satz anlehnend, werden wir feststellen, dass der *D. Pompeiu-sche Satz auch für einen geschlossenen räumlichen Streckenzug mit sämtlich gleich langen Seiten, und die Punkte welche diese Seiten im Verhältnisse*

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{m_3}{n_3} = \cdots$$

teilen, gilt (im Falle des Dreiecks nur wenn $m_i = n_i$).

---

[1] D. Pompeiu: *Un théorème de géométrie*, Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, XXIV, S. 223—226 (1943).

[2] M. Zacharias: *Ein Geometrischer Satz*, Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, Tome XXV ème, № 5, 247—248 (1943).

[3] S. V. Pavlović: *Über einige Erweiterungen der Pompeiu — Neubergschen Theoremen, deren Umkehrungen und manche mit diesen in Beziehung stehenden Fragen* (in Vorbereitung).

Es wird ebenso eine Erweiterung des *Ptolomeus — Neuberg*-schen Satzes gegeben werden:

Gegeben seien zwei direkt ähnliche Polygonee $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $A_1' A_2' \ldots A_n'$ ($B_1, B_2, \ldots, B_n$ bzw. $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ sind die entsprechenden Mitten der Seiten); *die Segmenten* $\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{B_1 B_1'}$, $\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{B_2 B_2'}, \ldots, \overline{A_n A_1} \cdot \overline{B_n B_n'}$, *sind* (G).

Auch die entsprechenden Dual—und Umkehrsäze werden betrachtet.

2. Gegeben seien n Punkte A_i im Raume. Man erhält ein *räumliches Vieleck* oder einen *Streckenzug*, wenn man die Punkte A_1 mit A_2, A_2 mit $A_3, \ldots, A_n$ mit A_1 verbindet.

Den Streckenzug $B_1 B_2 \ldots B_n$, dessen Punkte B_i die Seiten $A_i A_{i+1}$ eines anderen räumlichen Streckenzuges A_i im Verhältnisse $m_i : n_i$ $(m_i \neq 0, n_i \neq 0)$ teilen, nennen wir *(m_i, n_i) Streckenzug des Streckenzuges A_i*; das Vieleck A_i *den beschriebenen (m_i, n_i) Streckenzug des Vielecks B_i*.

Unter einer Geraden a_i, versteht man ein beliebiges Element eines gerichteten Parallelstrahlenbüschels.

Eine Gerade b_i, welche den Winkel $a_i a_{i+1}$ im Verhältnisse $m_i : n_i$ $(m_i \neq 0, n_i \neq 0)$ teilt, nennt man eine *(m_i, n_i) Gerade des Winkels $a_i a_{i+1}$*.

Das Vielseit $b_1 b_2 \ldots b_n$ deren Seiten b_i die (m_i, n_i) Geraden eines anderen Vielseits a_i sind, nennt man ein *(m_i, n_i) Vielseit des Vielseits a_i*; das Vielseit a_i *das (m_i, n_i) beschriebene Vielseit des Vielseits b_i*.

Weil wir im folgenden nur mit dem Verhältnisse der Form

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_4}{n_4} \cdots$$

zu tun haben, bezeichnen wir es mit (m, n).

3. Schicken wir die folgenden, zu denen von *O. Hofmann — M. Zacharias*[4] analogen Hilfssätze voraus (mit deren dualen). Einige von diesen ohne Beweise.

Hilfssatz Ia. Zu jedem $2n-1$ räumlichen Streckenzug B_i gehört ein und nur ein (m_i, n_i) beschriebenes Vieleck A_i.

Folgerung: $2n-1$ beliebige B_i Punkte im Raume können mit einem und nur einem Punkte B_{2n} zu einem (m_i, n_i) Streckenzug ergänzt werden.

Hilfssatz Ib. Zu jedem $2n-1$ räumlichen Vielseit b_i gehört ein und nur ein (m_i, n_i) beschriebenes Vielseit a_i.

Folgerung: $2n-1$ beliebige Gerade im Raume können mit einer und nur einer Geraden b_{2n} zu einem (m_i, n_i) Vielseit ergänzt werden.

Hilfssatz IIa (IIb). Wenn $\prod_1^{2n} m_i \neq \prod_1^{2n} n_i$, dann gehört zu einem beliebigen $2n$ räumlichen Streckenzug B_i (Vielseit b_i) ein und nur ein (m_i, n_i) beschriebenes Vieleck A_i (Vielseit a_i).

Beweis: Verschiebt man irgendeinen Punkt A_1 im Raume um eine Strecke l, durchläuft der Punkt

$$A_2 \left(\overline{A_1 B_1} : \overline{B_1 A_2} = \frac{m_1}{n_1} \right)$$

Beweis: Dreht man irgendeine Gerade a_1 im Raume um einen Winkel α, die Gerade

$$a_2 \left(a_1 b_1 : b_1 a_2 = \frac{m_1}{n_1} \right)$$

[4] O. Hofmann—Max Zacharias: *Mittenvieleck und Mittenvielseit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 51 (1942), 2. Abtl. S. 57—62.

eine *parallele* und *entgegengesetzt* gerichtete Strecke

$$\overline{A_2 A_2'} = \frac{n_1}{m_1} l, \ldots,$$

der Punkt A_{2n+1} eine *parallele* und *gleichgerichtete* Strecke

$$\overline{A_{2n+1} A_2'{}_{n+1}} = \frac{\prod_1^{2n} n_i}{\prod_1^{2n} m_i} l.$$

Nimmt man als Ausgangspunkt den Punkt A_1' so dass

$$\overline{A_1 A_1'} = l = \frac{\prod_1^{2n} m_i}{\prod_1^{2n} m_i - \prod_1^{2n} n_i} \overline{A_1 A_{2n+1}}$$

so schliesst sich der Streckenzug in dem neuen Ausgangspunkt. Man kann zeigen dass ein und nur ein Punkt A_1' existiert.

dreht sich in einer *parallelen* und *entgegengesetztgerichteten* Richtung um einen Winkel

$$a_2 a_2' = \frac{n_1}{m_1} \alpha, \ \ldots,$$

die Gerade a_{2n+1} um einen *parallelen* und *gleichgerichteten* Winkel

$$a_{2n+1} a_2'{}_{n+1} = \frac{\prod_1^{2n} n_i}{\prod_1^{2n} m_i} \alpha.$$

Wählt man als Ausgangsgerade die Gerade a_1' aus, so dass

$$a_1 a_1' = \alpha = \frac{\prod_1^{2n} m_i}{\prod_1^{2n} m_i - \prod_1^{2n} n_i} \beta \ (a_1 a_{2n+1} = \beta)$$

so schliesst sich das Vielseit in der neuen Ausgangsgerade. Man kann zeigen dass eine und nur eine Gerade a_1' existiert.

Hilfssatz IIIa. Ein räumlicher (m, n) Streckenzug $B_1 B_2 B_3 B_4$ ist ein Parallelogramm.

Bemerkung: In der Ebene, kann man ein solches Parallelogramm B_i konstruieren, das aber kein (m, n) Streckenzug sein muss.

Hilfssatz IIIb. Wenn die Geraden b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Aussenwinkel $a_i a_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ eines *ebenen* Vierseits im Verhältnisse (m, n) teilen, dann ist b_i ein Vierseit, in dem die Summe je zwei gegenüberliegender Aussenwinkel

$$\text{gleich } 2\pi \frac{1}{1+k} \text{ ist } \left((m, n) = \frac{1}{k}\right).$$

Hilfssatz IVa. Die Vektorsumme der abwechselnd orientierten Hauptdiagonalen $B_i B_{i+2n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ und $2n+1$ nicht aufeinanderfolgenden Seiten eines räumlichen $2(2n+1)$ Streckenzuges B_i, ist gleich Null, d. h.

$$\text{(1 a)} \qquad \overrightarrow{B_1 B_{1+2n+1}} + \overrightarrow{B_{2n+2} B_{2n+3}} + \overrightarrow{B_{2n+3} B_2} + \cdots + \overrightarrow{B_{2(2n+1)} B_1} = 0.$$

Hilfssatz IVb. Die Summe der abwechselnd orientierten Winkel $b_i b_{i+2n+1}$ der Gegenseitenpaare und $2n+1$ nicht aufeinander folgenden Aussenwinkel eines ebenen $2(2n+1)$ Vielseits b_i, ist kongruent Null (mod 2π).

$$\text{(1 b)} \quad b_1 b_{1+2n+1} + b_{2n+2} b_{2n+3} + b_{2n+3} b_2 + b_2 b_3 + \cdots + b_{2(2n+1)} b_1 = 0 \pmod{2\pi}.$$

Hilfssatz Va. Im (m, n) Streckenzug eines räumlichen Streckenzuges $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$, ist die Vektorsumme von n nicht aufeinander folgenden Seiten Null.

Hilfssatz Vb. Im (m, n) Vielseit des ebenen Vielseits $a_1 a_2 \ldots a_{2n}$, ist die Summe der nicht aufeinander folgenden Aussenwinkel kongruent

$$(n-1)\pi \frac{1-k}{1+k} \pmod{\pi}.$$

Beweis. Betrachten wir die Punkte C_i $(i=1, 2, \ldots, n-2)$, welche die Segmente $A_{2i}A_1$ $(i=2, 3, 4, \ldots, n-1)$ im Verhältnisse $A_{2i}C_i : C_iA_1 = (m, n)$ teilen. Nach dem Hilfssatz III a sind die Streckenzüge

$$B_1B_2B_3C_1, \; C_1B_4B_5C_2, \; \ldots, \; C_{n-2}B_{2n-2}B_{2n-1}B_{2n}.$$

Parallelograme, d. h.

$$\overline{B_2B_3} = \overline{B_1C_1}, \quad \overline{B_4B_5} = \overline{C_1C_2}, \quad \ldots, \quad \overline{B_{2n-2}B_{2n-1}} = \overline{C_{n-2}B_{2n}}$$

so dass

$$\text{(2a)} \qquad \overrightarrow{B_2B_3} + \overrightarrow{B_4B_5} + \overrightarrow{B_6B_7} + \cdots + \overrightarrow{B_{2n-2}B_{2n-1}} + \overrightarrow{B_{2n}B_1}$$

$$= \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \cdots + \overrightarrow{B_{2n}B_1} = 0.$$

Die Gleichung

$$\text{(2b)} \qquad b_1c_1 + c_1c_2 + \cdots + c_{n-2}b_{2n} + b_{2n}b_1 = (n-1)\pi\frac{1-k}{1+k} \pmod{\pi},$$

aus dem Hilfssatz Vb wird auf ähnliche Weise bewiesen.

Hilfssatz VIa. Die Vektorsumme der abwechselnd orientierten Hauptdiagonalen eines (m, n) räumlichen Streckenzuges $B_1B_2 \ldots B_{2(2n+1)}$, ist gleich Null, d. h.

$$\text{(3a)} \qquad \overrightarrow{B_1B_{2n+2}} + \overrightarrow{B_3B_{2n+5}} + \cdots + \overrightarrow{B_{2n+1}B_{2(2n+1)}} = 0.$$

Hilfssatz. VIb. Die Summe der abwechselnd orientierten Winkel der Gegenseitenpaare eines (m_i, n_i) ebenen Vielseits $b_1b_2 \ldots b_{2(2n+1)}$ ist kongruent $(n-1)\pi\frac{k-1}{k+1} \pmod{\pi}$.

$$\text{(3b)} \qquad b_1b_{2n+2} + b_3b_{2n+5} + \cdots + b_{2n+1}b_{2(2n+1)} = (n-1)\pi\frac{k-1}{k+1} \pmod{\pi}.$$

Die beiden Hilfssätze werden mittels Subtraktion der Gleichungen (1 a) und (2 a) bzw. (1 b) und (2 b) bewiesen.

Die Hilfssätze V a und VI a (bzw. V b und VI b) sind auch umkehrbar.

Hilfssatz V'a. Ein räumlicher Streckenzug $B_1B_2 \ldots B_{2n}$, in dem die Vektorsumme von n nicht zusammenstossenden Seiten gleich Null ist, ist ein (m, n) Streckenzug.

Hilfssatz V'b. Ein ebenes Vielseit $b_1b_2 \ldots b_{2n}$, in dem die Summe von n nicht aufeinanderfolgenden Aussenwinkeln gleich

$$(n-1)\pi\frac{1-k}{1+k} \pmod{\pi}$$

ist, ist ein (m, n) Vielseit.

Man beweist diese Hilfssätze mittels der Gleichungen (2 a) bzw. (2 b) und ähnlicher Konstruktionen, wie beim Beweise der Hilfssätze IV a (bzw. IV b).

Hilfssatz VI'a. Ein räumlicher Streckenzug $B_1B_2 \ldots B_{2(2n+1)}$, in dem die Vektorsumme der abwechselnd orientierten Hauptdiagonalen gleich Null ist, ist ein (m, n) Streckenzug.

Hilfssatz VI'b. Ein ebenes Vielseit $b_1b_2 \ldots b_{2(2n+1)}$, in dem die Summe der Gegenseitenpaare kongruent

$$(n-1)\pi\frac{k-1}{k+1} \pmod{\pi},$$

ist, ist ein (m, n) Vielseit.

Durch Subtraktion der Gleichung (3a) bzw. (3b) von der Gleichung (1a), bzw. (1b), erhält man die Gleichung (2a) bzw. (2b). So ist der Hilfssatz VIa, bzw. VIb auf den Satz V'a, bzw. V'b zurückgeführt.

4. Jetzt geben wir, auf Grund der Hilfssätze Va (Vb), zwei Erweiterungen des M. Zacharias-schen Satze[2], die entsprechenden dualen Sätze, sowie deren Umkehrungen.

Satz Ia. *Gegeben sei ein* $2n$ *räumlicher Streckenzug* A_i; B_i *sei ein* (m, n) *Streckenzug des Vielecks* A_i, *dann ist*

$$(4\,a)\qquad \overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{B_2M}+\overrightarrow{MB_3}+\overrightarrow{B_4M}+\cdots+\overrightarrow{B_{2n}M}=0,$$

wo M *ein beliebiger Punkt im Raume ist.*

Beweis. Wenn man die Gleichung

$$(4\,a')\qquad \overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_3B_4}+\overrightarrow{B_5B_6}+\cdots+\overrightarrow{B_{2n-1}B_{2n}}=0,$$

von der Identität

$$(4\,a'')\qquad \sum\left\{\overrightarrow{MB_i}+\overrightarrow{B_iB_{i+1}}+\overrightarrow{B_{i+1}M}\right\}=0$$

$$(i=1, 3, \ldots, 2n-1)$$

subtrahiert, erhält man die Gleichung (4a).

Satz IIa. *Zwei räumliche* $2n$ *Streckenzüge* A_i *und* A_i' *seien gegeben.* B_i *und* B_i' *sind die entsprechenden* (m, n) *bzw.* (m', n') *Streckenzüge der Streckenzüge* A_i *und* A_i'.

Es gilt dann

$$(5\,a)\qquad \overrightarrow{B_1B_1'}+\overrightarrow{B_2'B_2}+\overrightarrow{B_3B_3'}+\cdots+\overrightarrow{B'_{2n}B_{2n}}=0.$$

Beweis. Man erhält die Gleichung (5a) mittels Subtrahierung der Gleichung (4a) von der Gleichung

$$\overrightarrow{MB_1'}+\overrightarrow{B_2'M}+\overrightarrow{MB_3'}+\overrightarrow{B_4'M}+\cdots+\overrightarrow{B_{2n}'M}=0.$$

Satz Ib. *Gegeben sei ein* $2n$ *ebenes Vieleck* a_i; b_i *sei* (m, n) *Vielseit des Vielseits* a_i.

Es ist dann

$$(4\,b)\qquad pb_1+b_2p+pb_3+b_4p+\cdots+b_{2n}p=(n-1)\pi\frac{k-1}{k+1}\ (\mathrm{mod}\,\pi)$$

wobei p *eine beliebige Gerade in der Ebene ist.*

Beweis. Subtrahiert man die Gleichung

$$(4\,b')\qquad b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{2n-1}b_{2n}=(n-1)\,\pi\,\frac{1-k}{k+1}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$$

von der Identität

$$(4\,b'')\qquad \sum\{pb_i+b_ib_{i+1}+b_{i+1}p\}=0,$$

$$(i=1, 3, \ldots, 2n-1)$$

erhält man die Gleichung (4b).

Satz IIb. *Zwei ebene* $2n$ *Vielseite* a_i *und* a_i' *seien gegeben.* b_i *und* b_i' *sind die entsprechenden* (m, n) *bzw.* (m', n') *Vielseite der Vielseite* a_i *und* a_i'.

Es ist dann

$$(5\,b)\qquad b_1b_1'+b_2'b_2+b_3b_3'+\cdots+b_{2n}'b_{2n}=(n-1)\,2\pi\frac{k-k'}{(k+1)(k'+1)}\ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Beweis. Wenn man die Gleichung (4b) von der Gleichung

$$pb_1'+b_2'p+pb_3'+b_4'p+\cdots+b_{2n}'p=(n-1)\,\pi\frac{k'-1}{k'+1}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$$

$$\left((m, n)=\frac{1}{k};\quad (m', n')=\frac{1}{k'}\right)$$

subtrahiert erhält man die Gleichung (5b).

Zeigen wir, dass diese Sätze auch umkehrbar sind.

Satz Ia′. *Ein räumlicher* $2n$ *Streckenzug* B_i, *für den die Gleichung* (4a) *gilt, ist ein* (m, n) *Streckenzug des Streckenzuges* A_i.

Beweis. Wenn man von der Identität (4a″) die Gleichung (4a) subtrahiert erhält man die Gleichung (4a′). Damit wird der Satz auf den Hilfssatz V′a zurückgeführt.

Bemerkung. Der spezielle Fall dieses Satzes für ein ebenes ıeguläres Polygon A_i ist nicht richtig[5].

Satz IIa′. *Wenn für zwei* $2n$ *räumliche Streckenzüge* b_i *und* b_i' *die Gleichung* (5a) *gilt und für einen von diesen auch die Gleichung* (4a), *dann sind* B_i *und* B_i' (m, n) *bzw.* (m', n') *Streckenzüge der Vielecke* A *bzw.* A_i'.

Beweis. Wenn man berücksichtigt dass

$$\overrightarrow{B_i' B_i} = \overrightarrow{B_i' M} - \overrightarrow{B_i M} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

wo M ein beliebiger Punkt des Raumes ist, die Beziehung (5a) wird

$$\overrightarrow{MB_1'} + \overrightarrow{B_2' M} + \cdots + \overrightarrow{B_{2n}' M}$$
$$-(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{B_2 M} + \cdots + \overrightarrow{B_{2n} M}) = 0.$$

Satz Ib′. *Wenn für ein ebenes* $2n$ *Vielseit* b_i *und eine beliebige Gerade* p *in der Ebene die Gleichung* (4b) *gilt, dann ist* b_i *ein* (m, n) *Vielseit des Vielseits* a_i.

Beweis. Man erhält die Gleichung (4b′), wenn man von der Identität (4b″) die Gleichung (4b) subtrahiert. Der Satz wird dann auf den Hilfssatz V′b zurückgeführt.

Bemerkung. Man kann zeigen dass der obige Satz für ein ebenes reguläres Vielseit nicht richtig ist.

Satz IIb′. *Wenn für zwei ebene* $2n$ *Vielseite* b_i *und* b_i' *die Gleichung* (5a) *gilt und für einen von diesen auch die Gleichung* (4b); b_i *und* b_i' *sind* (m, n) *bzw.* (m', n') *Vielseite von Vielseite* a_i *bzw.* a_i'.

Beweis. Man führt diesen Satz in ähnlicher Weise wie IIa auf den Satz I′b zurück.

Nach der Voraussetzung gilt (4a) für einen der Streckenzüge B_i. Aus der obigen Gleichung geht hervor dass (4a) auch für den zweiten gilt. Damit ist der Satz auf den Satz I′a zurückgeführt.

5. Jetzt, zeigen wir dass die obigen zwei Sätze für die Streckenzüge mit *ungeraden Seitenzahl nicht mehr richtig sind*.

Man kann immer einen $2n-1$ Streckenzug B_i konstruieren, so dass die Abstände von einem beliebigen Punkte M im Raume zu den Punkten B_i *nicht* (G) *sind*.

Dem Streckenzug B_i gehört, auf Grund des Hilfssatzes Ia, ein (m_i, n_i) Streckenzug A_i.

Das heisst, dass die erwähnten Verbindungen aus dem M. Zacharias-schen Satze *nicht mehr* (G) *sind*.

[5] S. V. Pavlović: *Sur deux théorèmes de D. Pompeiu*, Mathesis, № 4—5—6, p. 211–214 (1956).

6. Betrachten wir ein *gleichschenkliges* Dreieck ABC ($\overline{AB}=\overline{BC}, \sphericalangle ABC=\alpha$). Auf dessen Medianen CT, AT, BT konstruieren wir drei Punkte C_1, C_2, C_3, entfernt vom Schwerpunkt T um $2/3$ Länge der entsprechenden Mediane.

Beschreiben wir drei Kugeln S_1, S_2, S_3, um die Punkte C_1, C_2, C_3, welche durch den Schwerpunkt gehen.

An einer anderen Stelle[3] haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz III. *Die hinreichende Bedingung, dass die Verbindungen eines Punktes M im Raume mit den Scheiteln A, B, C des gleichschenkliges Dreiecks, (G) sind, lautet*

$1°\ \alpha < \pi/3$; *Es genügt, dass der Punkt M sich ausserhalb (oder auf) den Kugeln S_1, S_2 befindet.*

$2°\ \alpha > \pi/3$; *Es genügt, dass der Punkt M ausserhalb oder auf der Kugel S_3 ist.*

(Für $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, kann der Punkt M irgendwo im Raume sein).

Auf Grund dieses Satzes III und des Satzes Ia werden wir den erweiterten Pompeiu-schen Satz beweisen.

Wegen des Satzes Ia betrachten wir nur den Fall für ungerade Seitenzahl.

Beweis. Zuerst sei ein reguläres ebenes Vieleck $A_1 A_2 \ldots A_{2n+1}$ gegeben.

Verbinden wir irgendeinen Punkt M im Raume mit den Punkten P_1, P_2 und P, welche in den Mitten der Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegen. Insofern der Punkt M in eine der Kugeln S_1, S_2, (S_3) fällt welche dem Dreieck $P_1 P_2 P$ entsprechen, dann kann man ein anderes von den Dreiecken

$$A_2 A_3 A_4, \ \ldots\ , A_{2n-1} A_{2n} A_{2n+1}$$

wählen so dass der Punkt M ausserhalb (oder auf) der entsprechenden Kugeln liegt.

Nehmen wir an, der Punkt M befindet sich ausserhalb (oder auf) den Kugeln S_1, S_2, (S_3) entsprechend der Mitten P_1, P_2, P des Dreiecks A_1, A_2, A_3.

Aus dem Satz III geht dann hervor, dass die Abstände MP_1, MP_2, MP (G) sind. Auf Grund des Satzes Ia (weil $A_1 A_3 A_4 \ldots A_{2n+1}$ ein Streckenzug mit geraden Seitenzahl ist) lässt sich weiter schliessen dass die Verbindungen MP, MP_3, MP_4, $\ldots$, MP_{2n} auch (G) sind (wobei die Punkte P_3, P_4, P_5 ,$\ldots$, P_{2n} die Mitten der Seiten dieses Polygons sind).

Das sind gerade die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass die betrachteten Abstände MP, MP_1, MP_2, MP_3, $\ldots$, MP_{2n}, (G) sind.

Möge die Länge der Seiten dieses Polygons jetzt unverändert bleiben. Deformieren wir nur seine Form, durch Auseinanderziehen des Polygons oder durch Drehung der einzelnen Dreiecke um deren Basis.

Man kann immer, wie oben, für einen beliebigen Punkt M im Raume ein Dreieck $P_1 P_2 P$ finden, so dass M ausserhalb (oder auf) den Kugeln S_1, S_2, (S_3) ist.

Und weil der Satz Ia für die *räumlichen* Streckenzüge gilt, kann sich das obige Verfahren in identischer Weise wiederholen, woraus die Richtigkeit des erweiterten Pompeiu-schen Satzes resultiert.

Man kann in ähnlicher Weise verfahren um die Richtigkeit des Satzes für ein (m, n) Streckenzug zu beweisen.

7. Beweisen wir jetzt die Erweiterung des Ptolomeus-Neuberg-schen Satzes.

Es gilt nämlich der Satz:[6]

Seien gegeben zwei direkt ähnlichen Dreiecke ABC (mit der Seiten a, b, c) und $A'B'C'$; die Segmente $a \cdot \overline{AA'}$, $b \cdot \overline{BB'}$, $c \cdot \overline{CC'}$ sind (G).

Durch die Konstruktion der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1'A_2'A_3'$ deren Seitenmitten gerade die Punkte A, B, C bzw. A', B', C', sind, ersieht man die Gültigkeit des *P. N.* Satzes auch für diese direkt ähnlichen Dreiecke.

Weiterhin, durch die sukzessive Anwendung dieses Satzes auf die Dreiecke $A_2A_3A_1$, $A_2'A_3'A_1'$; $A_3A_4A_1$, $A_3'A_4'A_1'$; $\ldots$, $A_{n-1}A_nA_1$, $A_{n-1}'A_n'A_1'$; geht die Richtigkeit des *P. N.* Satzes heraus.

Man erhält den Pompeiu-schen Satz[1] für die geschlossenen polygonalen Streckenzüge, dessen Seiten sämtlich gleich lang sind aus dem obigen erweiterten *P. N.* Satze wenn ein von den Polygonen A_i in ein Punkt degeneriert.

Und da der Neuberg-sche Satz im Raume gilt[7], resultiert dass man *den Pompeiu-schen Satz für die Polygone in der Ebene und auch im Raume, ebenso als eine Folgerung des Neuberg-schen Satzes für die Dreiecke auffassen kann.*

---

[6] S. V. Pavlović: *Sur un théorème de Neuberg et son inversion*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, № 3, p. 5—9 (1959).

[7] V. Thébault: *Sur un théorème de M. D. Pompeiu*, Bulletin de Mathématiques et de Physique, École Polytechnique, Bucarest t. X (1939).