COMPLÉTION D'UN GROUPE RÉTICULÉ

par B. STANKOVIĆ (Novi Sad)

Dans les travaux [4], [5], [6] M. Zamansky a donné la construction des espaces L^p, $p \geqslant 1$, par complétion d'un certain groupe qu'on appelle groupe réticulé, groupe de Riesz ou treillis.

Il se pose maintenant une question tout-à-fait naturelle de trouver des conditions pour qu'un groupe réticulé, soit complet.

Si le groupe réticulé est muni d'une topologie induite par une "semi-norme", la réponse est donnée par le théorème suivant:

THÉORÈME A. *Soit G un groupe réticulé semi-normé, dont les éléments positifs forment un ensemble fermé. Pour que G soit complet il suffit que toute suite monotone et bornée soit convergente.*

Si la semi-norme est définie par $f(|x|)$ où f est une réprésentation de G dans R, la condition précédente et aussi nécessaire.

Mais pour la construction des espaces L^p, c'est-à-dire pour construire un espace $\mathfrak{L}$ qui pourra être identifié à $\tilde{G}$ (le complété formel de G), M. Zamansky utilise deux topologies sur G. Une définie par la semi-norme et l'autre de la „convergence simple".

Notre but est de donner un théorème, analogue au théorème A, mais pour un groupe réticulé muni de deux topologies (théorème II).

Le théorème I est en réalité seulement un lemme pour le théorème II. Mais il a son intérêt particulier pour la théorie d'intégration. Ce théorème nous montre que la condition ([3], [6]):

$$f_n \searrow 0 \implies \mathrm{I}(f_n) \to 0,$$

où I est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions numériques, est dans un sens la meilleure.

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Groupe réticulé c'est un ensemble G qui est un groupe abélien ordonné tel que si $x \in G$, $y \in G$, alors $\sup(x, y) \in G$.

En posant:

$$x^+ = \sup(x, 0), \quad x^- = \sup(-x, 0), \quad |x| = \sup(x, -x),$$

on peut démontrer les relations suivantes

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|.$$

2 SEMI-NORME SUR UN GROUPE RÉTICULÉ

Sur un groupe réticulé G soit μ une fonction numériqe qui applique G dans R. Supposons qu'elle satisfait aussi aux conditions suivantes:

$$1.\ \mu(0) = 0, \quad 2.\ \mu(x) = \mu(|x|), \quad 3.\ \mu(x+y) \leqslant \mu(x) + \mu(y).$$

Une telle fonction nous allons appeler semi-norme sur le groupe réticulé G.

Si la semi-norme μ, ainsi définie, satisfait encore à la condition suplémentaire:

4. $\mu(x) \geqslant \mu(y)$ pour $|x| \geqslant |y|$,

on l'appelle semi-norme monotone.

Les hypothèse 1., 2., 3. entraînent: *a.* $\mu(x) \geqslant 0$, car $0 = \mu(x-x) \leqslant \leqslant \mu(x) + \mu(x) \leqslant 2\mu(x)$ et *b.* $|\mu(x) - \mu(y)| \leqslant \mu(x-y)$, qu'on peut démontrer de même manière que pour une semi-norme sur l'espace vectoriel.

La semi-norme, comme nous l'avons définie, induit sur G une topologie.

3. LES LEMMES PRÉCÉDENTS

Dans ce qui suit nous allons supposer:

G est un groupe réticulé sur lequel on a défini une semi-norme monotone μ et une autre topologie $\mathfrak{T}_\mu$ engendrée par μ. On a défini sur G encore une autre topologie $\mathfrak{T}$ telle que G muni de cette topologie devient un groupe ordonné topologique séparé. C'est-à-dire que la topologie $\mathfrak{T}$ est compatible avec la structure algébrique du groupe et que l'ensemble $x \geqslant 0$ est un fermé de $\mathfrak{T}$. Comme la translation $x \rightarrow x+b$ et $x \rightarrow -x$ sont des homéomorphismes de G sur lui-même, pour tout $a \geqslant 0$, les ensembles $I: -a \leqslant x \leqslant a$ sont aussi des fermés de $\mathfrak{T}$.

On suppose que ces ensembles I sont les voisinages d'élément neutre de G.

Enfin, soit G contenu dans un espace topologique H tel que la topologie $\mathfrak{S}$ de G est identique à celle induite par H. Pour la topologie de H on suppose:

a. Si $u_n \in G$ et converge dans H, $|u_n|$ converge aussi dans H

b. Toute suite monotone de Cauchy $u_n \in G$ converge dans H.

LEMME 1. *Pour les suites monotones de Cauchy* $x_n \in G$

$$x_n \underset{\mathfrak{T}\mu}{\rightarrow} 0 \implies x_n \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. — Soit (x_n') une suite monotone de Cauchy telle que $x_n' \to 0$. De cette suite on peut extraire une sous-suites (x_k) telle que $\mu(x_k) \leqslant 1/2^k$. Considérons les suites:

$$\xi_\nu^+ = \sum_{k=1}^{\nu} x_k^+ \quad \text{et} \quad \xi_\nu^- = \sum_{k=1}^{\nu} x_k^- .$$

Elles sont monotones es aussi de Cauchy, car

$$\mu(\xi_\nu^+ - \xi_p^+) = \mu\left(\sum_{k=\nu+1}^{p} x_k^+\right) \leqslant \sum_{k=\nu+1}^{p} \mu(|x_k|) \leqslant \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

On a de même manière pour ξ_ν^-:

$$\mu(\xi_\nu^- - \xi_p^-) = \mu\left(\sum_{k=\nu+1}^{p} x_k^-\right) \leqslant \sum_{k=\nu+1}^{p} \mu(|x_k|) \leqslant \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

Nous avons supposer $\mathfrak{T}$ compatible avec la structure du groupe. C'est pourquoi $\xi_\nu^+ - \xi_{\nu-1}^+ = x_\nu^+$ et $\xi_\nu^- - \xi_{\nu-1}^+ = x_\nu^-$ convergent vers zéro dans la topologie $\mathfrak{T}$. De même raison $x_n = x_n^+ - x_n^- \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$.

La suite (x_n'), étant monotone et de Cauchy, converge dans H. Sa sous-suite $x_k \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$ et cela entraîne $x_n' \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$.

LEMME 2. *De toute suite de Cauchy,* $(x_n) \in G$ *on peut extraire une sous-suite qui converge dans* H.

D é m o n s r a t i o n. — Soit (x_n') une suite de Cauchy appartenant à G. De cette suite on peut extraire une sous-suite $x_{n_i} = x_i$ telle que

$\mu(x_{i+1}-x_i) \leqslant 1/2^i$. En utilisant les propriétés de la semi-norme μ on a:

$$1/2^i \geqslant \mu(x_{i+1}-x_i) = \mu(|x_{i+1}-x_i|) \geqslant \mu[(x_{i+1}-x_i)^+],$$

ou

$$\geqslant \mu[(x_{i+1}-x_i)^-].$$

D'après ces relations on peut montrer que les suites monotones:

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^+ \text{ et } S_n^- = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^-$$

sont en même temps des suites de Cauchy, c'est-à-dire qu'elles convergent *dans H.* Mais:

$$S_n^+ - S_n^- = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i) = -x_1 + x_n,$$

d'où la convergence de la suite (x_n).

On appelle $\mathfrak{L}$ le sous-ensemble de H dont les éléments sont les limites des suites de Cauchy mentionnées. Sur cet ensemble on peut définir „la valeur absolue" d'un élément $z = \lim x_n$: $|z| = \lim |x_n|$. On prolonge aussi sur $\mathfrak{L}$ la loi de composition interne $+$: Soit $z = \lim x_n$ et $u = \lim y_n$, $z+u = \lim(x_n+y_n)$.

LEMME 3. *Supposons que pour les suites monotones de Cauchy* $(x_n) \in G$ *on a:*

$$x_n \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0 \Longrightarrow x_n \underset{\mathfrak{T}_\mu}{\rightarrow} 0;$$

alors cette propriété reste aussi valable pour toute suite de Cauchy.

Démonstration. — Supposons que (ξ_ν) est une suite monotone décroissante de Cauchy qui converge dans $\mathfrak{T}$ vers zéro. D'après la supposition faite on a aussi $\xi_\nu \underset{\mathfrak{T}_\mu}{\rightarrow} 0$. Les ensembles $I_k : -\xi_k \leqslant x \leqslant \xi_k$ sont des voisinages d'élément neutre O. Si la suite x_n est une suite de Cauchy et telle que $x_n \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$, le filtre élémentaire associé à la suite (x_n) est plus fin que le système fondamental de voisinages de O. Pour tout I_k tous les points de la suite à l'exception d'un nombre fini sont dans I_k ou encore il existe un entier m_k tel que $x_i \in I_k$ pour tout $i \geqslant m_k$. La suite m_k est une suite monotone croissante et (x_{m_k}) est une sous-suite de (x_n) et par suite (x_{m_k}) et (x_n) sont équivalentes, c'est-à-dire $\mu(x_k - x_{m_k}) \rightarrow 0$.

On va montrer que (ξ_k) et (x_{m_k}) sont aussi équivalentes. D'après la construction:

$$0 \leqslant \xi_k - x_{m_k} \leqslant \xi_k + \xi_k,$$

d'où

$$0 \leqslant \mu(\xi_k - x_{m_k}) \leqslant 2\mu(\xi_k).$$

Nous avons vu que $\mu(\xi_k) \to 0$ et par suite $\mu(\xi_k - x_{m_k}) \to 0$. Les suites (ξ_k) et (x_{m_k}) étant équivalentes, (ξ_k) et (x_k) sont aussi.

Il reste à prouver que pour deux suites équivalentes de Cauchy (x_n) et $(y_n) \in G$

$$\lim \mu(x_n) = \lim \mu(y_n).$$

En effet, de

$$\mu(x_m) \leqslant \mu(x_m - y_m) + \mu(y_m)$$

on tire

$$\lim \mu(x_m) \leqslant \lim \mu(y_m).$$

De même

$$\mu(y_m) \leqslant \mu(y_m - x_m) + \mu(x_m)$$

et

$$\lim \mu(y_m) \leqslant \lim \mu(x_m).$$

C'est-à-dire

$$\lim \mu(x_m) = \lim \mu(y_m).$$

Comme on sait maintenant que (ξ_n) et (x_n) sont équivalentes et que $\xi_n \underset{\mathfrak{T}\mu}{\to} 0$ on a aussi $x_n \underset{\mathfrak{T}\mu}{\to} 0$.

LEMME 4. *Si on prolonge la semi-norme μ sur l'ensemble $\mathfrak{L}$ de manière que $\bar{\mu}(z) = \lim \mu(x_n)$ où $z = \lim\limits_{\mathfrak{T}} x_n$, x_n une suite de Cauchy appartenant à G, alors $\bar{\mu}$ est aussi une semi-norme dont la restriction sur G est μ.*

D é m o s t r a t i o n. — L'existence de cette limite est une conséquence immédiate de la relation:

$$|\mu(x_m) - \mu(x_n)| \leqslant \mu(x_m - x_n),$$

d'où l'on voit que $\mu(x_m)$ est une suite de Cauchy dans R et par suite convergente.

Montrons que $\bar{\mu}$ satisfait aux axiomes d'une semi-norme.

Soit (x_n) une suite de Cauchy telle que $x_n \underset{\mathfrak{T}}{\to} 0$, alors $\bar{\mu}(0) = \lim \mu(x_n)$. D'après le lemme 3. $x_n \underset{\mathfrak{T}\mu}{\to} 0$ et $\bar{\mu}(0) = 0$.

Si une suite $x_n \underset{\mathfrak{T}}{\to} z$, $|x_n| \underset{\mathfrak{T}}{\to} |z|$ et

$$\bar{\mu}(z) = \lim \mu(x_n) = \lim \mu(|x_n|) = \bar{\mu}(|z|).$$

Enfin

$$\bar{\mu}(z+u) = \lim \mu(x_n + y_n) \leqslant \lim [\mu(x_n) + \mu(y_n)] \leqslant \lim \mu(x_n) + \lim \mu(y_n)$$
$$\leqslant \bar{\mu}(z) + \bar{\mu}(u).$$

La restriction de $\bar{\mu}$ sur G est juste μ. Pour montrer ça supposons que $x_n \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} x_0$, $x_0 \in G$, alors $x_n - x_0 \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$. Maintenant il faut prouver:

$$\bar{\mu}(x_0) = \lim \mu(x_n) = \mu(x_0).$$

Partons de la relation:

$$|\mu(x_n) - \mu(x_0)| \leqslant \mu(x_n - x_0).$$

D'après le lemme 3. $\mu(x_n - x_0) \rightarrow 0$, donc $\mu(x_n) \rightarrow \mu(x_0)$

4. *COMPLÉTION D'UN GROUPE RÉTICULÉ*

THÉORÈME I. *Pour qu'il existe un isomorphisme métrique entre le complété $\tilde{G}$ de G et $\mathfrak{L}$ il faut et il suffit que*

$$x_n \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0 \implies x_n \underset{\mathfrak{T}\mu}{\rightarrow} 0,$$

(x_n) étant une suite monotone de Cauchy.

Démonstration. — Soit (x_n) une suite de Cauchy de G telle que $x_n \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} z \in \mathfrak{L}$. On note par $\tilde{x}$ la classe d'équivalence qui contient (x_n), avec Φ l'application qui à $\tilde{x}$ fait correspondre $z \in \mathfrak{L}$. L'existence de z est assurée par le lemme 2. D'après la construction de $\mathfrak{L}$ cet application Φ est une application de G sur $\mathfrak{L}$.

Nous allons montrer que à tout $\tilde{x} \in \tilde{G}$ il correspond par Φ un et seulement un élément $z \in \mathfrak{L}$. Supposons le contraire. Soient, par exemple, z et u deux éléments de $\mathfrak{L}$ qui correspondent par Φ à une même classe $\tilde{x}$, un comme la limite de la suite (x'_n) et l'autre de la suite (y'_n). Les suites (x'_n) et (y'_n) appartiennent à $\tilde{x}$. La différence $x'_n - y'_n$ appartient à $\tilde{0}$. C'est pourquoi on peut extraire une sous-suite $x_n - y_n$ telle que $\mu(x_n - y_n) \leqslant 1/2^m$. Avec cela on peut montrer que les suites monotones:

$$\eta_n^+ = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^+ \text{ et } \eta_n^- = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^-$$

sont de Cauchy et par suite convergente dans H. Il en résulte que $(x_k - y_k)^- \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$ et $(x_k - y_k)^- \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$, c'est-à-dire $x_k - y_k \underset{\mathfrak{T}}{\rightarrow} 0$.

Ainsi nous avons démontrer que $z = u$, car (x_n) est une sous-suite de (x'_n) qui converge vers z et (y_n) une sous-suite de (y'_n) dont la limite est u.

Maintenant il faut prouver que Φ est biunivoque, c'est-à-dire que Φ^{-1} est aussi une fonction. Supposons le contraire, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ soient deux classes qui correspondent par Φ^{-1} à un élément $z \in \mathfrak{L}$. Notons par $\tilde{x}_m$ la classe définie par la suite dont tous les termes sont x_m (suite stationnaire) et par $\tilde{x}$ la classe définie par la suite (x_m). À $\tilde{x}_m$ correspod $x_m \in \mathfrak{L}$, à $\tilde{x}-\tilde{x}_m$ correspond $z-x_n$ à $\tilde{y}_m-\tilde{y}$ correspond y_m-z; enfin à $\tilde{x}-\tilde{x}_m+\tilde{y}_m-\tilde{y}$ correspond $z-x_n+y_m-z$, alors:

$$\tilde{x}-\tilde{x}_n \xrightarrow{\Phi} z-x_n \in \mathfrak{L}, \quad \tilde{y}_m-\tilde{y} \xrightarrow{\Phi} y_m-z \in \mathfrak{L},$$

$$\tilde{x}-\tilde{x}_m+\tilde{y}_m-\tilde{y} \xrightarrow{\Phi} z-x_m+y_m-z \in \mathfrak{L},$$

d'où

$$\bar{\mu}(z-x_m+y_m-z)=\bar{\mu}(y_m-x_m)=\lim_{n\to\infty} \mu(x_n-x_m+y_m-y_n)$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(x_n-x_n)+\lim_{n\to\infty} \mu(y_m-y_n).$$

Ainsi nous avons montrer que (x_n) et (y_n) appartiennent à la même classe.

Nous savons que $\bar{\mu}$ est une semi-norme sur $\mathfrak{L}$. Mais c'est aussi une norme. Soit $\bar{\mu}(z)=0$. Il existe une suite de Cauchy $(x_n)\in G$ telle que $x_n \longrightarrow z$ et $\lim \mu(x_n)=0$. Cela signifie que $(x_n)\in\tilde{0}$, car à cette classe appartient la suite stationnaire $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Cette suite stationnaire converge dans la topologie $\mathfrak{T}$ vers 0. On a vu qu'à une classe il correspond, par la fonction Φ, un et seulement un élément de $\mathfrak{L}$; d'où $z=0$.

Il est bien connu que dans l'ensemble $\tilde{G}$ la norme $\tilde{\mu}$ est définie de manière suivante: Soit $\tilde{x}\in\tilde{G}$ et μ la norme de G, alors $\tilde{\mu}(\tilde{x})=\lim \mu(x_n)$, $(x_n)\in\tilde{x}$. Il est clair que $\tilde{G}$ et $\mathfrak{L}$ sont isométrique, car les normes sur ces deux ensembles sont définies de même manière et d'après la même suite.

Il reste à prouver que la condition

$$x_n \xrightarrow[\mathfrak{T}]{} 0 \implies x_n \xrightarrow[\mathfrak{T}_\mu]{} 0$$

pour les suites monotones de Cauchy est aussi nécessaire.

Supposons que G et $\mathfrak{L}$ sont isomorphe. La suite stationnaire $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ est une suite monotone de Cauchy. Il lui correspond $0\in\mathfrak{L}$. Si $x_n \xrightarrow[\mathfrak{T}]{} 0$, (x_n) appartient à la même classe comme la suite stationnaire mentionnée, c'est-à-dire à $\tilde{0}$. La limite de la suite numérique $\mu(x_n)$ reste la même pour toute suite de la même classe:

$$\lim \mu(x_n) = \lim \mu(0) = 0,$$

c'est-à-dire $x_n \underset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} 0$.

THÉORÈME II. *Si pour les suites monotones de Cauchy* $(x_n) \in G$

$$x_n \underset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} 0 \implies x_n \underset{\mathfrak{L}_\mu}{\rightarrow} 0,$$

pour que G *soit complet, il faut et il suffit que* G *et* $\mathfrak{L}$ *soient isométrique.*

Démonstration. — Supposons que G et $\mathfrak{L}$ sont isométriques. D'après le théorème précédent $\mathfrak{L}$ et $\tilde{G}$ sont isométrique et par suite G est complet.

Supposons maintenant G complet. Il existe une application biunivoque entre G et $\mathfrak{L}$. Soit, par cette application, $(x_n) \in G$ en correspondance avec $z \in \mathfrak{L}$. On a supposé G complet. Cela entraîne l'existence de $\zeta \in G$ tel que $\lim \mu(x_n - \zeta) = 0$. C'est pourquoi on peut écrire:

$$\bar{\mu}(z) \leqslant \bar{\mu}(z-\zeta) + \bar{\mu}(\zeta) \leqslant \lim \mu(x_m - \zeta) + \mu(\zeta) = \mu(\zeta).$$

De même

$$\mu(\zeta) = \bar{\mu}(\zeta) \leqslant \bar{\mu}(\zeta - z) + \bar{\mu}(z) \leqslant \lim \bar{\mu}(\zeta - x_m) + \bar{\mu}(z) = \bar{\mu}(z).$$

Et nous avons démontrer que G et $\mathfrak{L}$ sont isométrique.

(Reçu te 14-IX-1960)

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Birkhoff — Lattice Theory. *American Math. Society*, New York City (1948).

[2] N. Bourbaki — Éléments de mathématique, VI, Intégration. Herman, Paris (1952)

[3] L. H. Loomis — An Introduction to Abstract Harmonic Analysis. D. Van Nostrand. Company, New York (1953).

[4] M. Zamansky — Théorie de l'intégration. *C. R. Acad. Sc.* Paris, **244** (1957). 2882 et 3009.

[5] ———— Construction des espace L^p par complétion. *Journal de math. pures et appl.*, **38** (1959), 97—116.

[6] ———— Sur l'intégrale de Daniell, *Bull. Soc. math. de Belgique* t. X, fasc. 2 (1958), pp. 67—78.