COMPLÉMENT AUX THÉORÈMES DE SCHUR ET TOEPLITZ

par B. BAJŠANSKI (Belgrade) et J. KARAMATA (Genève)

SOMMAIRE: En rapport avec les théorèmes de Toeplitz et Schur relatifs aux transformations linéaires des suites, on donne une extension du théorème de Heller mentionné ci-dessous.

En généralisant le théorème de Toeplitz relatif aux matrices des procédés de sommation permanents, Schur [2] a donné plusieurs théorèmes de même nature, dont on peut déduire en particulier le suivant.

Pour que la matrice $[a_{n,k}]$ *transforme toute suite bornée* $\{x_n\}$ *en une suite bornée* $\{y_n\}$,

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

il faut et il suffit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| = O(1), \quad n \to \infty. \tag{1}$$

D'autre part, I. Heller [1] a donné le théorème suivant.

Une suite $\{x_n\}$ est dite une suite de Taylor si

$$\sqrt[n]{|x_n|} = O(1), \quad n \to \infty,$$

c'est-à-dire si la série de Taylor $\Sigma x_n z^n$ converge dans un voisinage de l'origine.

La condition nécessaire et suffisante pour que toute suite de Taylor soit transformée par $[a_{n,k}]$ *en une suite de Taylor est qu'à tout* $\varepsilon > 0$ *on puisse associer un* M^{ε} *tel que*

$$|a_{n,k}| \leqslant \varepsilon^k M_{\varepsilon}^n, \ \forall \ n \text{ et } k. \tag{2}$$

Quoique de nature différente, ce théorème se rattache au précédent; on peut en effet en donner une extension qui met en évidence cette analogie. Pour énoncer cette extension, nous préciserons tout d'abord les notions relatives aux structures d'ordre dont nous nous servirons.

Soit S l'espace vectoriel des suites $\mathbf{x}=\{x_n\}$ à termes complexes $x_n \in \mathrm{C}$, et $(S, \geqslant)$ l'espace S muni de la structure d'ordre dont la relation est définie par

$$\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y} \overset{\text{déf}}{\rightleftarrows} |x_n| \leqslant |y_n|, \ \forall n.$$

Une partie $X \subset (S, \leqslant)$ est dite *majorée* dans S s'il existe un élément $\mathbf{y} \in S$ tel que

$$\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}, \ \forall \ \mathbf{x} \in X.$$

Une suite est dite *bornée* s'il existe une suite à termes constants qui la majore.

X est dit *cofinal* à Y si

$$X \subseteq Y \ \text{ et } \ \forall \ \mathbf{y} \in Y, \ \exists \ \mathbf{x} \in X \colon \mathbf{y} < \mathbf{x}.$$

Si Y contient une partie cofinale X, il ne peut contenir (non plus que X) des éléments maximaux, et inversément.

On appellera *O-fermé* toute partie $X \subseteq S$ qui a la propriété que

$$\forall \ \mathrm{K} \in \mathrm{C} \ \text{ et } \ \mathbf{x} \in X, \ \mathbf{y} \leqslant \mathrm{K}\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{y} \in X. \tag{3}$$

Lorsqu'un O-fermé contient une chaîne cofinale, c'est-à-dire une partie totalement ordonnée cofinale, il est un sous-espace vectoriel de S.

Enfin, pour simplifier, nous poserons $|\mathbf{x}| = \{|x_n|\}$ et $\mathbf{xy} = \{x_n y_n\}$.

Ceci posé, l'extension du théorème de Heller peut s'énoncer ainsi.

THÉORÈME. *Soit U et V deux O-fermés de S qui contiennent respectivement une chaîne cofinale C_u et C_v. Si la chaîne C_u satisfait en outre la condition*

$$\mathbf{x} \in C_u \Longrightarrow \exists \ \mathbf{y} \in C_u : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} < \infty, \tag{4}$$

alors, la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $[a_{n,k}]$ transforme toute suite de U en une suite de V est qu'à toute suite $\mathbf{x} \in C_u$ on puisse associer une suite $\mathbf{y} \in C_v$ telle que

$$|a_{n,k}| \, |x_k| \leqslant |y_n|, \ \forall \ n \ \text{ et } \ k. \tag{5}$$

Ce théorème reste valable lorsque U ne contient pas de chaîne cofinale; il suffit que U soit un sous-espace vectoriel contenant une partie cofinale dénombrable $U' \subseteq U$; dans ce cas, il faut remplacer dans les conditions (4) et (5), C_u par U'.

L'ensemble des suites de Taylor, c'est-à-dire l'ensemble des suites $\mathbf{x}$ telles que

$$\sqrt[n]{|x_n|} = O(1), \quad n \to \infty,$$

constitue un O-fermé dont une chaîne cofinale est formée par l'ensemble G des progressions géométriques $\{K^n\}$, $\forall\, K > 1$. Ainsi, le théorème précédent se réduit au théorème de Heller lorsque U et V sont égaux entre eux et contiennent comme chaîne cofinale la chaîne $G = C_u = C_v$, car G vérifie (4), et la condition (5) se réduit à la condition (2).

Un autre cas particulier est donné par la chaîne P formée par l'ensemble des puissances $\{(n+1)^K\}$, $\forall\, K > 0$; cette chaîne satisfait en effet la condition (4), et en envisageant les O-fermés $U = V$ qui contiennent P comme chaîne cofinale, les matrices qui satisfont la condition (5), c'est-à-dire

$$|a_{n,k}| \leqslant (k+1)^{-K}\,(n+1)^{M_K}, \forall\, n \text{ et } k,$$

transforment les coefficients des séries de Dirichlet $\Sigma\, a_n\, n^{-s}$ qui convergent dans un voisinage de l'infini en coefficients de mêmes séries.

Pour qu'une chaîne satisfasse la condition (4), il faut non seulement que ses éléments ne croissent pas trop lentement, mais surtout que les ordres de croissance de ses éléments soient suffisamment écartés. Ainsi, la chaîne formée par $\{n!\, \lg^K (n+2)\}$, $\forall\, K > 0$, ne satisfait pas (4).

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant.

LEMME. *Soit V un O-fermé de S contenant une chaîne C cofinale. Pour que toute suite bornée soit transformée par la matrice $[a_{n,k}]$ en une suite de V, il faut que l'ensemble A des suites colonnes*

$$\mathbf{a}_k = \{a_{n,k}\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

soit majoré dans V.

DÉMONSTRATION. Si C ne contient pas de partie cofinale dénombrable, il suffit de montrer que $A \subset V$, car A étant dénombrable, il existe alors un élément de C qui majore A. Par hypothèse, la transformée de toute suite bornée appartient à V; en posant donc

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

la transformée de $\mathbf{x}$ étant $\mathbf{a}_k$, on a donc bien $\mathbf{a}_k \in V$, $\forall\, k$.

Supposons que C contient une partie cofinale dénombrable, et désignons ses éléments par

$$\mathbf{c}_k = \{c_{n,k}\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ;$$

on peut supposer sans restriction que leurs termes sont non négatifs, car, V étant un O-fermé,

$$\mathbf{x} \in V \implies |\mathbf{x}| \in V.$$

Remarquons d'abord que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty, \ \forall\ n; \tag{6}$$

car en posant

$$a_{n,k} = |a_{n,k}| \exp(i\theta_{n,k}), \text{ avec } \theta_{n,k} = 0 \text{ si } a_{n,k} = 0,$$

toute suite

$$\{\exp(-i\theta_{m,k})\}, \ m \text{ fixe},$$

étant bornée, sa transformée

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \exp(-i\theta_{m,k}) \right\}$$

appartient à V, donc, son m-ième terme doit vérifier (6).

Supposons par l'absurde que A n'est pas majoré dans V; en particulier $2\mathbf{c}_1$ ne pouvant être un majorant de A, il existe une suite colonne $\mathbf{a}_{k_1}$ et un terme de cette suite d'indice n_1 tel que

$$|a_{n_1, k_1}| > 2c_{n_1, 1}\,.$$

Il existe même une infinité d'éléments de A qui ne sont pas majorés par un élément de V, car toute partie finie de V est majorée dans V. On peut donc trouver une infinité de colonnes d'indices $k' > k_1$ qui, d'une part, en vertu de (6), sont telles que

$$\sum_{k=k'}^{\infty} |a_{n_1, k}| \leqslant c_{n_1, 1}, \tag{7}$$

et d'autre part, sont non majorées par

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_{k_1} + 2\mathbf{c}_2\,,$$

c'est-à-dire telles que

$$\forall\ k', \exists\ n' : \ |a_{n', k'}| > x_{n'}. \tag{8}$$

Or, dans l'infinité d'inégalités (8), n' prend une infinité de valeurs. En effet, si n' ne prenait qu'un nombre fini de valeurs, à un tel n' correspondrait une infinité de colonnes d'indice k' telles que (8) ait lieu. Dans ce cas, ou bien tous les éléments de V auraient leur n'-ième terme nul, mais alors l'inégalité (8) ne pourrait avoir lieu, ou bien une infinité d'éléments auraient leur n'-ième terme non nul, et l'on pourrait donc supposer sans restriction que $c_{n',2}>0$. Alors, d'après (8), la n'-ième ligne contiendrait une sous-suite infinie qui ne tend pas vers zéro, ce qui est en contradiction avec (6).

Donc, on peut trouver un terme d'indice $n'=n_2>n_1$ dans une suite $\mathbf{a}_{k'}$ d'indice $k'=k_2>k_1$ tel que les inégalités (8) et (7) aient lieu, c'est-à-dire tel que

$$|a_{n_2,k_2}|>|a_{n_2,k_1}|+2c_{n_2,2},$$

et

$$\sum_{k=k_2}^{\infty}|a_{n_1,k}|\leqslant c_{n_1,1}.$$

On peut donc continuer ainsi en construisant successivement k_3 et n_3, k_4 et $n_4,\ldots$, de telle sorte que

$$|a_{n_i,k_i}|>|a_{n_i,k_1}|+|a_{n_i,k_2}|+\cdots+|a_{n_i,k_{i-1}}|+2c_{n_i,i} \tag{9}$$

et que

$$\sum_{k=k_{i+1}}^{\infty}|a_{n_i,k}|\leqslant c_{n_i,i}. \tag{10}$$

Soit alors la suite bornée $\mathbf{s}$ définie par

$$s_k=\begin{cases}1, & \text{pour } k\in\{k_i\}\\ 0, & \text{pour } k\notin\{k_i\}\end{cases};$$

elle a pour transformée une suite $\mathbf{t}$ telle que, d'après (9) et (10),

$$|t_{n_j}|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{n_j,k}\,s_k\right|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_{n_j,k_i}\right|\geqslant$$

$$\geqslant|a_{n_j,k_j}|-\sum_{i=1}^{j-1}|a_{n_j,k_i}|-\sum_{i=j+1}^{\infty}|a_{n_j,k_i}|>c_{n_j,j}.$$

Ainsi, la suite $\mathbf{t}$ n'est majorée par aucune suite de la chaîne C, puisque, quelque soit j, la j-ième suite de la chaîne contient un terme d'indice n_j pour lequel $|t_{n_j}|>c_{n_j,j}$.

La chaîne C étant cofinale à V et V étant un O-fermé, $\mathbf{t}$ ne peut appartenir à V, ce qui contredit l'hypothèse. c. q. f. d.

Ce lemme établi, le théorème peut se démontrer facilement comme suit.

a) Suffisance. Soit $\mathbf{x}\in U$ et $\mathbf{t}$ sa transformée,

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\,x_k;$$

d'après (4), et du fait que C_u est confinale à U, il existe un $\mathbf{y}\in C_u$ tel que

$$K_0 \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n/y_n| < \infty;$$

d'après (5), il existe un $\mathbf{z}\in C_v$ tel que

$$|a_{n,k}|\ |y_k| \leqslant |z_n|,\ \forall\ n \text{ et } k.$$

Alors,

$$|t_n| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, x_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\ |x_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z_n|}{|y_k|} |x_k| = K_0 |z_n|.$$

V étant un O-fermé, il s'en suit que $\mathbf{t}\in V$.

b) Nécessité. Soit $\mathbf{x}\in U$ et $\mathbf{q}$ une suite bornée,

$$|q_n| \leqslant K,\ \forall n;$$

alors, $\mathbf{qx}\in U$, car $\mathbf{qx} \leqslant K\mathbf{x}$ et U est un O-fermé. Ainsi donc, toute suite de la forme $\mathbf{qx}$, $\mathbf{q}$ bornée et $\mathbf{x}\in U$, est transformée en une suite de V, ce qui veut dire que toute matrice $[a_{n,k}\, x_k]$, avec $\mathbf{x}\in U$, transforme toute suite bornée en une suite de V. D'après le lemme, il est nécessaire à cet effet que les suites colonnes d'une quelconque des matrices $[a_{n,k}\, x_k]$ soient majorées dans V, c'est-à-dire qu'à toute suite $\mathbf{x}\in U$ on puisse associer une suite de V, et donc, C_v étant cofinale, une suite $\mathbf{y}\in C_v$ telle que

$$|a_{n,k}|\, |x_k| \leqslant |y_n|,\ \forall\ n \text{ et } k. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(Reçu le 1-XI-1960)

REFERENCES

[1] Heller, I. — Contribution à la théorie des séries divergentes, Thèse, Genève, 1950.

[2] Schur, J. — Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen *Journ. für die reine u. angew. Math.* **151** (1921), 79—111.