STAZIONÄRE TEMPERATURFELDER IN DREISCHICHTIGER WANDUNG ZYLINDRISCHER RÖHRENLEITUNGEN

Von VÁCLAV VODIČKA (Pilsen, Tschechoslovakei)

Die nachstehende Arbeit gibt eine technisch und physikalisch wichtige Verallgemeinerung unserer früheren Erwägungen [1] auf den dreischichtigen Fall. Jedoch geht es hier überhaupt nicht um eine blosse Übertragung der erwähnten Gedankengänge, wie schon daraus erhellt, dass bei der Rechnung von den in dem früheren Aufsatze [2] gewonnenen Ergebnissen Gebrauch gemacht wird. Die fertigen Formeln hat der Verfasser nicht in der Literatur finden können.

Die Arbeit zerfällt in zwei Hauptteile. Zuerst kommt der Rotationszylinder, dann der (vor allem theoretisch wichtige) Fall eines elliptischen Zylinders.

I. DER ROTATIONSZYLINDER

1. *Mathematische Problemstellung.* Die periodischen Funktionen $f(\vartheta)$, $F(\vartheta)$ mit der Periode 2π seien für $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ in Fourierreihen entwickelbar. Bei gegebenen Festwerten

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \rho_4 > 0, \quad h_i > 0, \quad h_i' > 0 \ (i = 2, 3)$$

geht es dann um die Lösung $u_i = u_i(\rho, \vartheta)$; $i = 1, 2, 3$ folgender (technisch und physikalisch ganz durchsichtigen) Aufgabe (der Leser möge sich selbst eine kleine Figur aufzeichnen):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \vartheta^2} = 0, \ \rho_{i+1} < \rho < \rho_i, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi; \ i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$u_1(\rho_1, \vartheta) = f(\vartheta), \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \rho} - h_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \rho} - h'_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0; \quad \rho = \rho_{i+1}, \tag{2.2}$$
$$0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \quad i = 1, 2$$

$$u_3(\rho_4, \vartheta) = F(\vartheta), \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi. \tag{2.3}$$

2. *Zurückführung zum geradlinigen Falle.* Die Transformation

$$\xi = \vartheta, \quad \eta = \lg \frac{\rho_1}{\rho} \tag{3}$$

führt unser Problem (1) – (2.3) über in das folgende einfachere:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta^2} = 0, \; -\infty < \xi < +\infty, \; \eta_i < \eta < \eta_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

$$u_i(\xi, \eta) = u_i(\xi + 2\pi, \eta), \; -\infty < \xi < +\infty, \; \eta_i < \eta < \eta_{i+1}; \; i = 1, 2, 3, \tag{5}$$

$$u_1(\xi, 0) = f(\xi), \; -\infty < \xi < +\infty \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + \hbar_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \eta} + \hbar'_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0,$$
$$-\infty < \xi < +\infty, \; \eta = \eta_{i+1}; \quad i = 1, 2 \tag{6.2}$$

$$u_3(\xi, \eta_4) = F(\xi), \; -\infty < \xi < +\infty. \tag{6.3}$$

Hierin ist

$$\eta_i = \lg \frac{\rho_1}{\rho_i}; \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$\hbar_{i+1} = h_{i+1}\rho_{i+1}, \; \hbar'_{i+1} = h'_{i+1}\rho_{i+1}, \; i = 1, 2. \tag{6.4}$$

3. *Lösung des Problems* (4) – (6.3): Abgesehen von der Bezeichnungsweise geht es hier um dieselbe Aufgabe, wie in der früheren Arbeit [2] — s. die dortigen Beziehungen (16) – (18.3). Die beiden Bezeichnungen hängen zusammen nach dem leicht verstandlichen Schema

$$\begin{pmatrix} x & y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & f(x) & F(x) & h_2 & h'_2 & h_3 & h'_3 \\ \xi & \eta & \eta_1 = 0 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & f(\xi) & F(\xi) & \hbar_2 & \hbar'_2 & \hbar_3 & \hbar'_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Daher kann man die verlangte Lösung unseres jetzigen Problems (4) – (6.3) direkt ohne jede Rechnung aufschreiben, wenn man in den Formeln (19) der nämlichen Arbeit [2] konsequent die Umzeichnung (7) durchführt.

Dadurch kommt

$$u_1(\xi,\eta)=a_0\frac{\eta+q_{10}}{q_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\xi+b_k\sin k\xi)\ (\operatorname{ch}k\eta+q_{1k}\operatorname{sh}k\eta)-$$

$$-\frac{A_0}{H_3}\cdot\frac{\eta}{\eta_4+r_{30}}-\sum_{k=1}^{\infty}t_{1k}(A_k\cos k\xi+B_k\sin k\xi)\operatorname{sh}k\eta\,,$$

$$u_2(\xi,\eta)=a_0H_2\frac{\eta+q_{20}}{q_{10}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}p_{2k}(a_k\cos k\xi+b_k\sin k\xi)\cdot[\operatorname{ch}k(\eta-\eta_2)+q_{2k}\operatorname{sh}k(\eta-\eta_2)]-\frac{A_0H_2}{H_3}\cdot\frac{\eta+r_{20}}{\eta_4+r_{30}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}t_{2k}(A_k\cos k\xi+B_k\sin k\xi)\cdot[\operatorname{ch}k(\eta_3-\eta)-r_{2k}\operatorname{sh}k(\eta_3-\eta)]\,,$$

$$u_3(\xi,\eta)=a_0H_3\frac{\eta_4-\eta}{q_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}p_{3k}(a_k\cos k\xi+b_k\sin k\xi)\operatorname{sh}k(\eta_4-\eta)+$$

$$+A_0\frac{\eta+r_{30}}{\eta_4+r_{30}}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\xi+B_k\sin k\xi)\cdot[\operatorname{ch}k(\eta_4-\eta)-r_{3k}\operatorname{sh}k(\eta_4-\eta)].\qquad(8)$$

Einzelne in (8) vorkommenden Grössen und Abkürzungen haben folgende Bedeutung:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\,d\omega,\qquad \begin{matrix}a_k\\ b_k\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\cdot\begin{matrix}\cos k\omega\\ \sin k\omega\end{matrix}\,d\omega,\quad k=1,2,\ldots\qquad(9.1)$$

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\omega)\,d\omega,\qquad \begin{matrix}A_k\\ B_k\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\omega)\cdot\begin{matrix}\cos k\omega\\ \sin k\omega\end{matrix}\,d\omega,\quad k=1,2,\ldots\qquad(9.2)$$

$$q_{10}=Q_{20}+H_2Q_{30}+H_3\eta_4,\quad q_{20}=Q_{30}+\frac{H_3}{H_2}\eta_4$$

$$Q_{i0}=-\frac{1}{\hbar_i}+\left(\frac{\hbar_i'}{\hbar_i}-1\right)\eta_i,\quad i=2,3\qquad(10.1)$$

$$q_{1k}=-\frac{\hbar_2'\operatorname{th}k\eta_2-q_{2k}(\hbar_2+k\operatorname{th}k\eta_2}{\hbar_2'-q_{2k}(k+\hbar_2\operatorname{th}k\eta_2)},$$

$$q_{2k}=-\frac{\hbar_3+[k+\hbar_3'\operatorname{th}k(\eta_4-\eta_3)]\operatorname{th}k(\eta_3-\eta_2)}{k+\hbar_3\operatorname{th}k(\eta_3-\eta_2)+\hbar_3'\operatorname{th}k(\eta_4-\eta_3)};\quad k=1,2,\ldots\qquad(10.2)$$

$$r_{20}=R_{20},\quad r_{30}=\frac{1}{H_3}(H_3R_{30}-H_2R_{20})$$

$$R_{i0}=\frac{1}{\hbar_i'}+\left(\frac{\hbar_i}{\hbar_i'}-1\right)\eta_i;\quad i=2,3 \tag{11.1}$$

$$r_{2k}=\frac{\hbar_2'+(k+\hbar_2\operatorname{th}k\eta_2)\operatorname{th}k(\eta_3-\eta_2)}{k+\hbar_2\operatorname{th}k\eta_2+\hbar_2'\operatorname{th}k(\eta_3-\eta_2)},$$

$$r_{3k}=\frac{\hbar_3\operatorname{th}k(\eta_4-\eta_3)+r_{2k}[\hbar_3'+k\operatorname{th}k(\eta_4-\eta_3)]}{\hbar_3+r_{2k}[k+\hbar_3'\operatorname{th}k(\eta_4-\eta_3)]};\quad k=1,2,\ldots \tag{11.2}$$

$$p_{2k}=\frac{H_2}{q_{2k}}(\operatorname{sh}k\eta_2+q_{1k}\operatorname{ch}k\eta_2),$$

$$p_{3k}=\frac{H_3}{q_{2k}\operatorname{ch}k(\eta_4-\eta_3)}(\operatorname{sh}k\eta_2+q_{1k}\,k r_2)\,[\operatorname{sh}k(\eta_3-\eta_2)+q_{2k}\operatorname{ch}k(\eta_3-\eta_2)];$$
$$k=1,2,\ldots \tag{12.1}$$

$$t_{1k}=\frac{1}{H_3r_{2k}\operatorname{ch}k\eta_2}[\operatorname{sh}k(\eta_3-\eta_2)-r_{2k}\operatorname{ch}k(\eta_3-\eta_2)]\,[\operatorname{sh}k(\eta_4-\eta_3)-r_{3k}\operatorname{ch}k(\eta_4-\eta_3)],$$

$$t_{2k}=\frac{H_2}{H_3r_{2k}}[\operatorname{sh}k(\eta_4-\eta_3)-r_{3k}\operatorname{ch}k(\eta_4-\eta_3)];\quad k=1,2,\ldots \tag{12.2}$$

$$H_2=\frac{\hbar_2'}{\hbar_2},\quad H_3=-\frac{\hbar_2'\,\hbar_3'}{\hbar_2\,\hbar_3}. \tag{13}$$

Die $\hbar$, $\hbar_i'$ und η_i berechnen sich nach (6.4), sh, ch und th sind hyperbolische Funktionen.

4. *Lösung der Aufgabe* (1)–(2.3). Diese Lösung ist gegeben durch die Formeln (8), wo man sich nach (3) ξ und η durch ϑ und $\lg\frac{\rho_1}{\rho}$ ersetzt denkt. Alle anderen Grössen und Abkürzungen berechnen sich nach (9.1)–(13), wobei die $\hbar_i$, $\hbar_i'$ und η_i durch (6.4) erklärt sind.

II. DER ELLIPTISCHE ZYLINDER

1. *Mathematische Problemstellung.* Es bezeichne $D_i\,(i=1,2,3)$ den Bereich zwischen den konfokalen Ellipsen e_i, e_{i+1}, wobei e_i durch

$$q_i^2x^2+p_i^2y^2-p_i^2q_i^2=0,\quad p_i^2-q_i^2=c^2,\quad c>0,\ c\ \text{const.};\quad i=1,2,3,4 \tag{14.1}$$

bestimmt ist. Daneben soll

$$0<p_1<p_2<p_3<p_4,\quad \text{d. h. auch}\quad 0<q_1<q_2<q_3<q_4 \tag{14.2}$$

sein (es ist ein Leichtes sich die zugehörige Figur aufzuzeichnen).

Auf e_1 sei eine Funktion $\varphi(x, y)$ der Lage und auf e_4 eine andere Funktion $\Phi(x, y)$ erklärt. Im System

$$x = c \cos \xi \operatorname{ch} \eta, \quad y = c \sin \xi \operatorname{sh} \eta \tag{15}$$

elliptischer Koordinaten ξ, η sind die Ellipsen (14.1) durch

$$0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi, \quad \eta = \eta_i = \frac{1}{2} \lg \frac{p_i + q_i}{p_i - q_i}; \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{16.1}$$

bestimmt. Längs der Kurve e_i hat man dann

$$p_i = c \operatorname{ch} \eta_i, \quad q_i = c \operatorname{sh} \eta_i; \quad x = p_i \cos \xi, \quad y = q_i \sin \xi \tag{16.2}$$

und es wird weiterhin überall unter der Voraussetzung gerechnet, dass sich die periodischen Funktionen

$$\varphi(x, y) = \varphi(p_1 \cos \xi, q_1 \sin \xi) = f(\xi), \quad \Phi(x, y) = \Phi(p_4 \cos \xi, q_4 \sin \xi) = F(\xi) \tag{16.3}$$

für $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$ in Fourierreihen entwickeln lassen.

Sind noch $h_i > 0$, $h_i' > 0$ $(i = 2, 3)$ gegebene Festwerte, so geht es um die Lösung $u_i = u_i(x, y)$; $i = 1, 2, 3$ folgender (auch physikalisch und technisch leicht verständlichen) Aufgabe:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0 \text{ in } D_i; \quad i = 1, 2, 3 \tag{17}$$

$$u_1(x, y) = \varphi(x, y) \text{ längs } e_1 \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial n} + h'_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0 \text{ längs } e_{i+1}; \, i = 1, 2 \tag{18.2}$$

$$u_3(x, y) = \Phi(x, y) \text{ längs } e_4. \tag{18.3}$$

In (18.2) bezeichnet $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Normalenrichtung zu e_{i+1}, wobei die Normale aus D_i nach D_{i+1} zeigt.

2. *Zurückführung zum geradlinigen Falle.* Unter Benutzung von (15) erscheint unser Problem (17)–(18.3) in der Form — s. auch die schon zitierte Arbeit [1] —

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \eta_i < \eta < \eta_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{19}$$

$$u_i(\xi, \eta) = u_i(\xi + 2\pi, \eta), \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \eta_i < \eta < \eta_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{20}$$

$$u_1(\xi, \eta_1) = f(\xi), \quad -\infty < \xi < +\infty \tag{21.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + h_{i+1}\, c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta_{i+1} - \cos^2 \xi}\,(u_i - u_{i+1}) = \\ = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \eta} + h'_{i+1}\, c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta_{i+1} - \cos^2 \xi}\,(u_i - u_{i+1}) = 0, \\ -\infty < \xi < +\infty, \quad \eta = \eta_{i+1}; \quad i = 1, 2\end{gathered} \tag{21.2}$$

$$u_3(\xi, \eta_4), \quad -\infty < \xi < +\infty. \tag{21.3}$$

Der elementare Charakter dieser neuen Aufgabe geht offensichtlich lediglich infolge der zu komplizierten Übergangsbedingungen (21.2) verloren und es ist gar unmöglich die Sache mit Hilfe von den in unserer früheren Arbeit [2] erhaltenen Ergebnissen zu erledigen. Beschränkt man sich jedoch auf solche Typen von Röhrenleitungen, wo $\operatorname{ch}^2 \eta_2 \gg 1$ ist (dasselbe gilt natürlich auch von η_3), so kann man die fraglichen Forderungen (21.2) mit genügender Genauigkeit durch die einfacheren

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + h_{i+1} p_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \eta} + h'_{i+1} p_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0, \\ -\infty < \xi < +\infty, \quad \eta = \eta_{i+1}; \quad i = 1, 2\end{gathered} \tag{21.2.1}$$

ersetzen und diese sind schon von derselben Art, wie (18.2) in der nämlichen Arbeit [2].

3. *Lösung des Problems* (19) – (21.1), (21.2.1), (21.3). Diese (durch vorige Festsetzung über die Grösse von $\operatorname{ch} \eta_2$ erhaltene) Aufgabe unterscheidet sich nur unwesentlich in der Bezeichnungsweise von dem früheren Problem (16) – (18.3) in [2]. Beide Bezeichnungen hängen zusammen nach dem leicht verständlichen Schema

$$\begin{pmatrix} x, & y, & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & h_2, & h_3, & h'_2, & h'_3 & f(x), & F(x) \\ \xi, & \eta, & \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4, & h_2 p_2, & h_3 p_3, & h'_2 p_2, & h'_3 p_3, & f(\xi), & F(\xi) \end{pmatrix} \tag{22}$$

und die Lösung $u_i(\xi, \eta)$; $i = 1, 2, 3$ unserer jetzigen Aufgabe folgt direkt aus den Formeln (19) in [2], wenn man darin konsequent die Umzeichnung (22) durchführt.

Man bekommt

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta) = a_0 \frac{\eta + q_{10}}{\eta_1 + q_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi) \cdot [\operatorname{ch} k(\eta - r_1) + q_{1k} \operatorname{sh} k(\eta - \eta_1)] - \\ - \frac{A_0}{H_3} \cdot \frac{\eta - \eta_1}{\eta_4 + r_{30}} - \sum_{k=1}^{\infty} t_{1k} (A_k \cos k\xi + B_k \sin k\xi) \operatorname{sh} k(\eta - \eta_1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2(\xi,\eta) = {} & a_0 H_2 \frac{\eta + q_{20}}{\eta_1 + q_{10}} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} \left(a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi\right) \cdot \left[\operatorname{ch} k(\eta - \eta_2) + q_{2k} \operatorname{sh} k(\eta - \eta_2)\right] - \\
& - \frac{A_0 H_2}{H_3} \cdot \frac{\eta + r_{20}}{\eta_4 + r_{30}} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k} \left(A_k \cos k\xi + B_k \sin k\xi\right) \cdot \left[\operatorname{ch} k(\eta_3 - \eta) - r_{2k} \operatorname{sh} k(\eta_3 - \eta)\right], \\
u_3(\xi,\eta) = {} & a_0 H_3 \frac{\eta_4 - \eta}{\eta_1 + q_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{3k} \left(a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi\right) \operatorname{sh} k(\eta_4 - \eta) + \\
& + A_0 \frac{\eta + r_{30}}{\eta_4 + r_{30}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos k\xi + B_k \sin k\xi\right) \cdot \left[\operatorname{ch} k(\eta_4 - \eta) - r_{3k} \operatorname{sh} k(\eta_4 - \eta)\right].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Einzelne in (23) vorkommenden Grössen und Abkürzungen haben nach [2] und mit Rücksicht auf (16.1)—(16.3) folgende Bedeutung:

$$
a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega)\, d\omega, \qquad \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cdot \begin{matrix} \cos k\omega \\ \sin k\omega \end{matrix}\, d\omega, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23.1}
$$

$$
A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega)\, d\omega, \qquad \begin{matrix} A_k \\ B_k \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) \cdot \begin{matrix} \cos k\omega \\ \sin k\omega \end{matrix}\, d\omega, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23.2}
$$

$$
q_{10} = Q_{20} + H_2 Q_{30} + H_3 \eta_4, \quad q_{20} = Q_{30} + \frac{H_3}{H_2} \eta_4
$$

$$
Q_{i0} = -\frac{1}{h_i p_i} + \left(\frac{h_i'}{h_i} - 1\right) \eta_i; \quad i = 2, 3 \tag{23.3}
$$

$$
q_{1k} = -\frac{h_2' p_2 \operatorname{th} k(\eta_2 - \eta_1) - q_{2k} \left[h_2 p_2 + k \operatorname{th} k(\eta_2 - \eta_1)\right]}{h_2' p_2 - q_{2k} \left[k + h_2 p_2 \operatorname{th} k(\eta_2 - \eta_1)\right]},
$$

$$
q_{2k} = -\frac{h_3 p_3 + \left[k + h_3' p_3 \operatorname{th} k(\eta_4 - \eta_3)\right] \operatorname{th} k(\eta_3 - \eta_2)}{k + h_3 p_3 \operatorname{th} k(\eta_3 - \eta_2) + h_3' p_3 \operatorname{th} k(\eta_4 - \eta_3)}; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23.4}
$$

$$
r_{20} = \frac{1}{H_2} (H_2 R_{20} - \eta_1), \quad r_{30} = \frac{1}{H_3} (H_3 R_{30} - H_2 R_{20} + \eta_1)
$$

$$
R_{i0} = \frac{1}{h_i' p_i} + \left(\frac{h_i}{h_i'} - 1\right) \eta; \quad i = 2, 3 \tag{23.5}
$$

$$
r_{2k} = \frac{h_2' p_2 + \left[k + h_2 p_2 \operatorname{th} k(\eta_2 - \eta_1)\right] \operatorname{th} k(\eta_3 - \eta_2)}{k + h_2 p_2 \operatorname{th} k(\eta_2 - \eta_1) + h_2' p_2 \operatorname{th} k(\eta_3 - \eta_2)},
$$

$$r_{3k}=\frac{h_3 p_3 \operatorname{th} k(\eta_4-\eta_3)+r_{2k}\,[h_3' p_3+k \operatorname{th} k(\eta_4-\eta_3)]}{h_3 p_3+r_{2k}\,[k+h_3' p_3 \operatorname{th} k(\eta_4-\eta_3)]}; \quad k=1,2,\ldots \tag{23.6}$$

$$p_{2k}=\frac{H_2}{q_{2k}}\,[\operatorname{sh} k(\eta_2-\eta_1)+q_{1k} \operatorname{ch} k(\eta_2-\eta_1)],$$

$$p_{3k}=\frac{H_3}{q_{2k} \operatorname{ch} k(\eta_4-\eta_3)}\,[\operatorname{sh} k(\eta_2-\eta_1)+q_{1k} \operatorname{ch} k(\eta_2-\eta_1)]\times$$
$$\times[\operatorname{sh} k(\eta_3-\eta_2)+q_{2k} \operatorname{ch} k(\eta_3-\eta_2)], \quad k=1,2,\ldots \tag{23.7}$$

$$t_{1k}=\frac{1}{H_3 r_{2k} \operatorname{ch} k(\eta_2-\eta_1)}\,[\operatorname{sh} k(\eta_3-\eta_2)-t_{2k} \operatorname{ch} k(\eta_3-\eta_2)]\times$$
$$\times[\operatorname{sh} k(\eta_4-\eta_3)-r_{3k} \operatorname{ch} k(\eta_4-\eta_3)],$$

$$t_{2k}=\frac{H_2}{H_3 r_{2k}}\,[\operatorname{sh} k(\eta_4-\eta_3)-r_{3k} \operatorname{ch} k(\eta_4-\eta_3)]; \quad k=1,2,\ldots \tag{23.8}$$

$$H_2=\frac{h_2}{h_2'}, \quad H_3=-\frac{h_2' h_3'}{h_2 h_2} \tag{23.9}$$

$$\eta_i=\frac{1}{2}\lg\frac{p_i+q_i}{p_i-q_i}, \quad i=1,2,3,4$$

$$f(\xi)=\varphi(p_1\cos\xi,\; q_1\sin\xi), \quad F(\xi)=\Phi(p_4\cos\xi,\; q_4\sin\xi). \tag{23.10}$$

4. *Lösung der Aufgabe* (17)–(18.3). Bei genügend grossen η_2 ist die verlangte Lösung gegeben durch (23), wo man sich ξ, η durch x, y im Einklang (15) ersetzt denkt. Alle anderen Grössen und Abkürzungen berechnen sich nach (23.1)–(23.10).

Natürlich hat man hier nur eine Näherungslösung vor sich, wobei die Genauigkeit gleichzeitig mit η_2 wächst. Es ist nicht schwer sich noch eine andere Näherungslösung zu verschaffen. Das geschieht in ganz analoger Weise, wie im früheren Aufsatze [1] und wir gehen hier darauf weiter nicht ein.

Im Falle eines genügend engen Kontaktes einzelner Körperschichten ist die exakte Lösung auch für den elliptischen Zylinder leicht durchführbar, wie der Verfasser noch gelegentlich berichten wird.

(Eingegangen am 4-XII-1957)

LITERATUR

[1] **Vodička, V.** — Stationary Temperature Distribution in Cylindrical Tubes, *Arch. Mech. Stos.* IX, **1**, 1957, pp. 25—33.

[2] **Vodička, V.** — Stazionäre Temperaturfelder in dreischichtigen Platten. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **14** (1960).

[3] **Vodička, V.** — Über eine Formel der Elementarmathematik. *Zbornik radova Mat. Inst. SAN* **7**, (1959), 93—98.