STAZIONÄRE TEMPERATURFELDER IN DREISCHICHTIGEN PLATTEN

Von VÁCLAV VODIČKA (Pilsen, Tschechoslovakei)

Die nachstehende Arbeit enthält eine Verallgemeinerung früherer Erwägungen des Verfassers von einer zweischichtigen Platte. Ausser ihres uumittelbaren technischen Interesses ist die Arbeit als eine gute Vorbereitung zur wärmetheoretischen Berechnung von langen Röhrenleitungen mit dreischichtiger Wandung anzusehen. Davon wird noch in einem weiteren Aufsatze berichtet.

Die Behandlung enthält zwei Grundaufgaben, mit deren Hilfe dann im dritten Teile ein allgemeines Problem gelöst wird.

I. ERSTE GRUNDAUFGABE

1. *Mathematische Problemstellung.* Es seien

$$0 \leqslant y_1 < y_2 < y_3 < y_4, \; h_i > 0, \; h'_i > 0 \; (i = 2, 3)$$

gegebene Konstanten und $f(x)$ Funktion mit der Periode 2π. Diese sei für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ in eine Fourierreihe entwickelbar.

Dann geht es um die Lösung $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, folgender Aufgabe:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0, \; -\infty < x < +\infty, \; y_i < y < y_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$u_i(x, y) = u_i(x + 2\pi, y), \; -\infty < x < +\infty, \; y_i < y < y_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

$$u_1(x, y_1) = f(x), \; -\infty < x < +\infty \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} + h_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + h'_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0,$$
$$-\infty < x < +\infty,\ y = y_{i+1};\quad i = 1, 2 \tag{3.2}$$

$$u_3(x, y_4) = 0,\ -\infty < x < +\infty. \tag{3.3}$$

2. *Partikuläre Lösungen.* Die Forderung (3.1) ist von der Form

$$u_1(x, y_1) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega)\, d\omega,\quad \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cdot \begin{matrix} \cos k\omega \\ \sin k\omega \end{matrix}\, d\omega,\ k = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

und motiviert partikuläre Lösungen

$$v_{ik} = X_{ik}(x) \cdot Y_{ik}(y);\quad i = 1, 2, 3,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

$$X_{i0} = 1,\ i = 1, 2, 3;\ Y_{i0} = C_{i0}\, y + D_{i0},\ i = 1, 2,\ Y_{30} = C_{30}(y_4 - y) \tag{5.1}$$

$$X_{ik} = A_{ik} \cos kx + B_{ik} \sin kx;\quad i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

$$Y_{ik} = C_{ik} \operatorname{ch} k(y - y_i) + D_{ik} \operatorname{sh} k(y - y_i);\quad i = 1, 2,\ k = 1, 2, \ldots$$
$$Y_{3k} = \operatorname{sh} k(y_4 - y),\ k = 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

der Gleichungen (1); A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} und D_{ik} sind freie Konstanten.

Die Ausdrücke (5) erfüllen schon die Bedingungen (1), (2), (3.3); sie werden auch noch die Forderungen (3.2) befriedigen, wenn und nur wenn

$$h'_{i+1} X_{ik}(x)\, Y'_{ik}(y_{i+1}) = h_{i+1} X_{i+1,k}(x)\, Y'_{i+1,k}(y_{i+1}),$$

$$h_{i+1} \frac{Y_{ik}(y_{i+1})}{Y'_{ik}(y_{i+1})} = -1 + h'_{i+1} \frac{Y_{i+1,k}(y_{i+1})}{Y'_{i+1,k}(y_{i+1})};\ i = 1, 2,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

sein wird. Y' bedeutet natürlich die Ableitung von Y nach y.

Mit Rücksicht auf (5.1) ergeben die Beziehungen (6) sofort

$$h'_2 C_{10} = h_2 C_{20},\ h'_3 C_{20} = -h_3 C_{30} \tag{7.1}$$

$$h_2\left(y_2 + \frac{D_{10}}{C_{10}}\right) = -1 + h'_2\left(y_2 + \frac{D_{20}}{C_{20}}\right),\ h_3\left(y_3 + \frac{D_{20}}{C_{20}}\right) = -1 - h'_3(y_4 - y_3) \tag{7.2}$$

und mit Hilfe von (5.2) und (5.3) folgt aus (6) leicht

$$X_{2k}(x)=\frac{h_2'}{h_2}\cdot\frac{C_{1k}\operatorname{sh}k(y_2-y_1)+D_{1k}\operatorname{ch}k(y_2-y_1)}{D_{2k}}X_{1k}(x),$$

$$X_{3k}(x)=-\frac{h_3'}{h_3}\cdot\frac{C_{2k}\operatorname{sh}k(y_3-y_2)+D_{2k}\operatorname{ch}k(y_3-y_2)}{\operatorname{ch}k(y_4-y_3)}X_{2k}(x);\quad k=1,2,\ldots \tag{7.3}$$

$$\frac{h_2}{k}\cdot\frac{C_{1k}\operatorname{ch}k(y_2-y_1)+D_{1k}\operatorname{sh}k(y_2-y_1)}{C_{1k}\operatorname{sh}k(y_2-y_1)+D_{1k}\operatorname{ch}k(y_2-y_1)}=-1+\frac{h_2'}{k}\cdot\frac{C_{2k}}{D_{2k}},$$

$$\frac{h_3}{k}\cdot\frac{C_{2k}\operatorname{ch}k(y_3-y_2)+D_{2k}\operatorname{sh}k(y_3-y_2)}{C_{2k}\operatorname{sh}k(y_3-y_2)+D_{2k}\operatorname{ch}k(y_3-y_2)}=-1-\frac{h_3'}{k}\cdot\frac{\operatorname{sh}k(y_4-y_3)}{\operatorname{ch}k(y_4-y_3)};$$

$$k=1,2,\ldots. \tag{7.4}$$

Aus (7.1) ergibt sich leicht

$$C_{i0}=H_i\,C_{10}:\quad i=1,2,3$$

$$H_1=1,\ H_2=\frac{h_2'}{h_2},\ H_3=-\frac{h_2'\,h_3'}{h_2\,h_3}, \tag{8.1}$$

und aus (7.2) erhalten wir — s.dazu auch (8.1) — nach kurzer Rechnung

$$D_{i0}=q_{i0}\,C_{i0}=H_i\,q_{i0}\,C_{10};\quad i=1,2$$

$$q_{10}=Q_{20}+H_2\,Q_{30}+H_3\,y_4,\quad q_{20}=Q_{30}+\frac{H_3}{H_2}y_4$$

$$Q_{j0}=-\frac{1}{h_j}+\left(\frac{h_j'}{h_j}-1\right)y_j;\quad j=2,3. \tag{8.2}$$

Die Gleichungen (7.4) ergeben

$$D_{ik}=q_{ik}\,C_{ik};\quad i=1,2,\ k=1,2,\ldots \tag{8.3}$$

mit

$$q_{1k}=-\frac{h_2'\operatorname{th}k(y_2-y_1)-q_{2k}\,[h_2+k\operatorname{th}k(y_2-y_1)]}{h_2'-q_{2k}\,[k+h_2\operatorname{th}k(y_2-y_1)]},$$

$$q_{2k}=-\frac{h_3+[k+h_3'\operatorname{th}k(y_4-y_3)]\operatorname{th}k(y_3-y_2)}{k+h_3\operatorname{th}k(y_3-y_2)+h_3'\operatorname{th}k(y_4-y_3)};\quad k=1,2,\ldots \tag{8.3.1}$$

und die Beziehungen (7.3) liefern mit (8.1) und (8.3) sofort

$$X_{2k}(x)=\frac{H_{2k}\,C_{1k}}{q_{2k}\,C_{2k}}\,[\operatorname{sh}k(y_2-y_1)+q_{1k}\operatorname{ch}k(y_2-y_1)]\,X_{1k}(x),$$

$$X_{3k}(x)=\frac{H_3\,C_{1k}}{q_{2k}\operatorname{ch}k(y_4-y_3)}\,[\operatorname{sh}k(y_2-y_1)+q_{1k}\operatorname{ch}k(y_2-y_1)]\times$$

$$\times[\operatorname{sh}k(y_3-y_2)+q_{2k}\operatorname{ch}k(y_3-y_2)]\,X_{1k}(x);\ k=1,2,\ldots \tag{8.4}$$

Als Resultat von (5) — (5.3), (8.1) — (8.4) haben wir nun folgendes System von partikulären Lösungen $v_{ik}(x, y)$:

$$v_{i0} = H_i C_{10} (y + q_{i0}),\ i = 1, 2,\ v_{30} = H_3 C_{10} (y_4 - y) \tag{9.1}$$

$$v_{ik} = p_{ik} C_{1k} (A_{1k} \cos kx + B_{1k} \sin kx) [\operatorname{ch} k(y - y_i) + q_{ik} \operatorname{sh} k(y - y_i)];$$
$$i = 1, 2, k = 1, 2, \ldots$$

$$v_{3k} = p_{3k} C_{1k} (A_{1k} \cos kx + B_{1k} \sin kx) \operatorname{sh} k(y_4 - y);\ k = 1, 2, \ldots$$

$$p_{1k} = 1,\quad p_{2k} = \frac{H_2}{q_{2k}} [\operatorname{sh} k(y_2 - y_1) + q_{1k} \operatorname{ch} k(y_2 - y_1)],$$

$$\begin{aligned} p_{3k} = {} & \frac{H_3}{q_{2k} \operatorname{ch} k(y_4 - y_3)} [\operatorname{sh} k(y_2 - y_1) + q_{1k} \operatorname{ch} k(y_2 - y_1)] \times \\ & \times [\operatorname{sh} k(y_3 - y_2) + q_{2k} \operatorname{ch} k(y_3 - y_2)],\quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{9.2}$$

Unsere Ausdrücke (9.1), (9.2) erfüllen alle Bedingungen des Problems bis auf (3.1).

3. *Lösung der ursprünglichen Aufgabe.* Mit geläufigem Ansatz

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} v_{ik};\quad i = 1, 2, 3 \tag{10}$$

und mit Rücksicht auf (4), (4.1) schreibt sich die letzte noch zu befriedigende Forderung (3.1) in der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{1k}(x, y_1) =$$

$$= (y_1 + q_{10}) C_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} (A_{1k} \cos kx + B_{1k} \sin kx);$$

daraus entnimmt man

$$C_{10} = \frac{a_0}{y_1 + q_{10}};\ C_{1k} A_{1k} = a_k,\ C_{1k} B_{1k} = b_k,\ k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Nach (10) und mit Hilfe von (9.1), (9.2) und (11) erhalten wir endlich folgende Lösung unserer ersten Grundaufgabe (1) — (3.3):

$$u_i(x, y) = a_0 H_i \frac{y + q_{i0}}{y_1 + q_{10}} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) [\operatorname{ch} k(y - y_i) + q_{ik} \operatorname{sh} k(y - y_i)];\ i = 1, 2$$

$$u_3(x, y) = a_0 H_3 \frac{y_4 - y}{y_1 + q_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{3k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \operatorname{sh} k(y_4 - y). \tag{12}$$

Die darin vorkommenden Grössen und Abkürzungen berechnen sich wie folgt: Die a_k, b_k nach (4.1), H_i aus (8.1), q_{ik} mit Hilfe von (8.2), (8.3.1) und die p_{ik} endlich nach (9.2).

II. ZWEITE GRUNDAUFGABE

Dieses neue Problem unterscheidet sich von der vorigen Aufgabe (1) — (3.3) lediglich in den Bedingungen (3.1) und (3.3). An ihrer Stelle verlangen wir jetzt

$$u_1(x, y_1) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{13.1}$$

$$u_3(x, y_4) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{13.2}$$

wobei über $F(x)$ ähnliche Voraussetzungen zu machen sind, wie früher über die Funktion $f(x)$.

Vergleich dieses neuen Problems mit der ersten Aufgabe zeigt nur unwesentliche Unterschiede in der Bezeichnungsweise und die Lösung kann darum sofort auf Grund von (12) ohne jede Rechnung erhalten werden. Man hat dazu nur ursprüngliche Grössen durch neue nach dem leicht verständlichen Schema

$$\begin{pmatrix} u_1, u_2, u_3, y_1, y_2, y_3, y_4, & h_2, & h_3, & h_2', & h_3', f(x) \\ u_3, u_2, u_1, y_4, y_3, y_2, y_1, & -h_3', & -h_2', & -h_3, & -h_2, F(x) \end{pmatrix} \tag{14}$$

zu ersetzen.

Dadurch bekommen wir folgende definitive Lösung unseres zweiten Grundproblems

$$u_1(x, y) = -\frac{A_0}{H_3}\frac{y-y_1}{y_4+r_{30}} - \sum_{k=1}^{\infty} t_{1k}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \operatorname{sh} k(y-y_1)$$

$$u_2(x, y) = -\frac{A_0 H_2}{H_3} \cdot \frac{y+r_{20}}{y_4+r_{30}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \cdot [\operatorname{ch} k(y_3-y) - r_{2k} \operatorname{sh} k(y_3-y)]$$

$$u_3(x, y) = A_0 \frac{y+r_{30}}{y_4+r_{30}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \cdot [\operatorname{ch} k(y_4-y) - r_{3k} \operatorname{sh} k(y_4-y)]. \tag{15}$$

Hierin ist

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)\,d\omega, \quad \frac{A_k}{B_k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)\cdot\frac{\cos k\omega}{\sin k\omega}\,d\omega, \quad k=1,2,\ldots \tag{15.1}$$

$$r_{20} = \frac{1}{H_2}(H_2 R_{20} - y_1), \quad r_{30} = \frac{1}{H_3}(H_3 R_{30} - H_2 R_{20} + y_1)$$

$$R_{i0} = \frac{1}{h_i'} + \left(\frac{h_i}{h_i'} - 1\right) y_i; \quad i=2,3 \tag{15.2}$$

$$r_{2k} = \frac{h_2' + [k + h_2 \operatorname{th} k(y_2 - y_1)] \operatorname{th} k(y_3 - y_2)}{k + h_2 \operatorname{th} k(y_2 - y_1) + h_2' \operatorname{th} k(y_3 - y_2)},$$

$$r_{3k} = \frac{h_3 \operatorname{th} k(y_4 - y_3) + r_{2k}[h_3' + k \operatorname{th} k(y_4 - y_3)]}{h_3 + r_{2k}[k + h_3' \operatorname{th} k(y_4 - y_3)]}; \quad k=1,2,\ldots \tag{15.3}$$

$$t_{2k} = \frac{1}{H_3 r_{2k} \operatorname{ch} k(y_2 - y_1)} [\operatorname{sh} k(y_3 - y_2) - r_{2k} \operatorname{ch} k(y_3 - y_2)] \times$$
$$\times [\operatorname{sh} k(y_4 - y_3) - r_{3k} \operatorname{ch} k(y_4 - y_3)],$$

$$t_{2k} = \frac{H_2}{H_3 r_{2k}} [\operatorname{sh} k(y_4 - y_3) - r_{3k} \operatorname{ch} k(y_4 - y_3)]; \quad k=1,2,\ldots, \tag{15.4}$$

wobei die Grössen H_2, H_3 in (15.2) und (15.4) nach (8.1) zu berechnen sind.

III. DAS ALLGEMEINE PROBLEM

Die jetzt zu behandelnde Aufgabe unterscheidet sich von (1) — (3.3) nur dadurch, dass man die Forderung (3.3) durch die allgemeinere (13.3) ersetzt. Das so entstehende allgemeine Problem enthält die beiden vorhergehenden als Spezialfälle und bildet ausserdem einen schönen Ausgangspunkt zur wärmetheoretischen Behandlung von zylindrischen Röhrenleitungen. Deshalb soll hier noch einmal sowohl die mathematische Formulierung, als auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe angegeben werden, obgleich alles leicht schon aus vorigen Erwägungen klar ist.

1. *Mathematische Problemstellung.* Bei gegebenen Festwerten

$$0 \leqslant y_1 < y_2 < y_3 < y_4, \; h_i > 0, \; h_i' > 0 \; (i=2,3)$$

und bei gegebenen periodischen Funktionen $f(x), F(x)$ — Periode 2π —, die im Bereich $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ in Fourierreihen entwickelbar sind, geht es um die Lösung $u_i = u_i(x, y); i = 1, 2, 3$ folgender Aufgabe:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y_i < y < y_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{16}$$

$$u_i(x, y) = u_i(x + 2\pi, y), \quad -\infty < x < +\infty, \quad y_i < y < y_{i+1}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{17}$$

$$u_1(x, y_1) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} + h_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + h'_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0, \tag{18.2}$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad y = y_{i+1}; \quad i = 1, 2$$

$$u_3(x, y_4) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{18.3}$$

Sowohl der physikalische als auch der technische Sinn unserer Beziehungen (16) — (18.3) ist leicht verständlich aus den Elementen der klassischen Wärmeleitungstheorie.

2. *Lösung der Aufgabe* (16) — (18.3). Das verlangte Ergebnis folgt offensichtlich durch Summierung der rechten Seiten von (12) und (15).

Man erhält

$$u_1(x, y) = -\frac{A_0}{H_3} \cdot \frac{y - y_1}{y_1 + r_{30}} - \sum_{k=1}^{\infty} t_{1k}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \operatorname{sh} k(y - y_1) +$$

$$+ a_0 \frac{y + q_{10}}{y_1 + q_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cdot [\operatorname{ch} k(y - y_1) + q_{1k} \operatorname{sh} k(y - y_1)],$$

$$u_2(x, y) = a_0 H_2 \frac{y + q_{20}}{y + q_{10}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cdot [\operatorname{ch} k(y - y_2) + q_{2k} \operatorname{sh} k(y - y_2)] -$$

$$- \frac{A_0 H_2}{H_3} \cdot \frac{y + r_{20}}{y_4 + r_{30}} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \cdot [\operatorname{ch} k(y_3 - y) - r_{2k} \operatorname{sh} k(y_3 - y)],$$

$$u_3(x, y) = a_0 H_3 \frac{y_4 - y}{y_1 + q_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{3k}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \operatorname{sh} k(y_4 - y) +$$

$$+ A_0 \frac{y + r_{30}}{y_4 + r_{30}} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \cdot [\operatorname{ch} k(y_4 - y) - r_{3k} \operatorname{sh} k(y_4 - y)]. \tag{19}$$

Wegen besserer Übersichtlichkeit machen wir vom neuen aufmerksam auf die Bedeutung einzelner in (19) vorkommenden Grössen und Abkürzungen: die a_k, b_k berechnen sich nach (4.1), A_k, B_k nach (15.1), die

q_{ik} werden durch (8.2) und (8.3.1), r_{ik} durch (15.2) und (15.3) bestimmt, die p_{ik} berechnen sich nach (9.2) und die t_{ik} nach (15.4). Und endlich entnimmt man die H_i-Werte aus (8.1).

SCHLUSSBEMERKUNGEN

Wenn auch das eben gelöste Problem im Wesentlichen eine Verallgemeinerung früherer Erwägungen des Verfassers über die zweischichtige Platte darstellt [1], so verdient es doch einer selbstständigen Behandlung.

Erstens haben unsere kaum in der Literatur zu findenden Ergebnisse unmittelbare technische und physikalische Bedeutung, abgesehen von ihrer Wichtigkeit bei der Wärmeberechnung von zylindrischen Röhrenleitungen. Aber auch rein mathematisch enthält unser dreischichtige Fall neue Aspekte im Vergleich mit der früheren Arbeit [1] und der jetzige Rechnungsgang kann keineswegs als eine vielleicht nur formelle Verallgemeinerung früherer Rechnungen angesehen werden.

Dieser auf ersten Blick vielleicht etwas überraschende Sachverhalt ist gut bekannt jedem Theoretiker, welcher mit mathematischen und physikalischen Kettenprozessen zu tun hat. So erkennt man z.B. allgemeine Gesetzmässigkeiten bei nichtstazionären Wärmeleitungsvorgängen in mehrschichtigen Körpern [2] erst dann, wenn man mindestens 5 Schichten in Betracht nimmt.

(Eingegangen am 4-XII-1957)

LITERATUR

[1] Vodička, V. — Stationary Temperature Field in a Two-Layer Plate, *Arch. Mech. Stos.* IX, 1, 1957, pp 19—24.

[2] Vodička, V. — Eindimensionale Wärmeleitung in geschichteten Körpern, *Math. Nachr.*, Bd. 14, H. 1, 1955, S. 47—55.