# QUELQUES REMARQUES SUR LE PRINCIPE DE HAMILTON DANS LA MECANIQUE CLASSIQUE

VERA ŠNAJDER (Sarajevo)

On sait que l'importance du rôle des principes variationnels en mécanique classique provient du fait que c'est par cette voie, en partant des principes exclusivement formels, permanents dans les domaines en apparence très variés, qu'on a réussi à rapprocher les problèmes fondamentaux de la mécaniqe, de l'analyse et de la géométrie infinitésimale. Mais on sait aussi qu'à cause des hypothèses restrictives ces principes ne peuvent pas représenter les lois les plus générales de la mécanique. Ainsi, quand on applique la théorie du calcul variationnel de Weierstrass, où le problème des systèmes dynamiques à liaisons est traité comme un problème de Lagrange, le principe de Hamilton exclut de la dynamique générale les systèmes non conservatifs et les liaisons non holonomes. On sait qu'en dynamique générale certaines de ces restrictions sont évitées par un choix convenable de la technique du calcul, en restant toujours dans le domaine du calcul variationnel classique. Car, en appliquant le calcul variationnel de Lagrange, on parvient à caractériser par le principe de Hamilton les équations différentielles du mouvement d'un système dynamique conservatif aussi dans le cas des liaisons linéaires non holonomes. En ce qui concerne les systèmes non conservatifs, c'est A. Lichnerowicz qui a réussi à définir l'extension des deux théories qui jouent un rôle éminent dans la théorie des mouvements des systèmes dynamiques conservatifs: sa théorie des relations intégrales d'invariance, se rattachant à la théorie des invariants intégraux, est aussi particulièrement adaptée à la théorie des systèmes dynamiques non conservatifs que son calcul des variations non holonome, qui est une extension du calcul des variations classique. L'utilisation du principe de Hamilton, ainsi que son interprétation géométrique, est surtout en rapport avec cette deuxième théorie.

## I ENONCÉ DES RÉSULTATS

En introduisant des fonctionnelles plus générales que celles du calcul des variations classique, A. Lichnerowicz a dans son travail „Les espaces variationnels généralisés“ [5]*) défini le problème et la technique du calcul des variations non holonome et a montré que la géométrisation des problèmes relatifs à ce calcul des variations conduit naturellement à la construction d'une classe d'espaces généralisant les espaces de Finsler, qu'il a nommés les espaces variationnels généralisés.

Etant donnée, sur une variété analytique $V$ à $n$ dimensions, dont le point courant admet les coordonées $(x^\lambda)$, l'intégrale

$$I = \int_{u_0}^{u_1} H[F^u_{u_0}, x^\lambda(u), x'^\lambda(u)]\, du, \tag{1}$$

où $F^u_{u_0}$ est une fonctionnelle définie par l'intégrale

$$F^u_{u_0} = \int_{u_0}^{u} \omega[x^\lambda(v), x'^\lambda(v)]\, dv, \tag{2}$$

les $x^\lambda(v)$ sont des fonctions deux fois continûment différentiables sur un intervalle $(a, b)$, et les équations $x^\lambda = x^\lambda(v)$ la représentation des courbes $C$ sur $V$;

l'intervalle $(u_0, u_1) \subset (a, b)$ étant d'amplitude inférieure à un nombre $\varepsilon$ positif, arbitrairement petit;

$H$ et $\omega$ des fonctions suffisament de fois continûment différentiables par rapport aux $2n+1$ arguments $x^\lambda$, $x'^\lambda$, $F^u_{u_0}$;

A. Lichnerowicz appelle problème du calcul variationnel non holonome, défini par l'intégrale (1), la recherche des courbes $C$ le long desquelles la sous-variation de (1) est identiquement nulle, quels que soient les accroissements $\delta x^\lambda$. La *sous-variation* $\overline{\delta} I$ *de l'intégrale* (1) est une intégrale de la forme $\int_{u_0}^{u_1} \Phi[x^\lambda(u), x'^\lambda(u), \delta x^\lambda(u)]\, du$, où $\Phi$ est une fonction de $x^\lambda$, $x'^\lambda$, $\delta x^\lambda$ qui est

1° linéaire par rapport aux $\delta x^\lambda$,

2° telle que l'on ait $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\Delta I - \overline{\delta} I}{\varepsilon\eta} = 0,$

*) Voir la bibliographie à la fin de l'article.

$\Delta I$ étant l'accroissement de $I$ correspondant aux accroissements $\delta x^\lambda = \varepsilon y^\lambda(v,\varepsilon)$, $v \in (u_0 u_1)$, $\lambda \in 1, \ldots, n$, $y^\lambda(v,\varepsilon)$ un système de $n$ fonctions continûment différentiables par rapport à $v$ dans l'intervalle $(u_0, u_1)$ et nulles pour $v = u_0$, $v = u_2$; $\eta(\varepsilon) = \max|\delta x^\lambda(v)|$.

Dans le cas où la fonctionelle $F^u_{u_0}$ est définie par (2), la sous-variation a la forme

$$\overline{\delta} I = \int\limits_{u_0}^{u_1} \left[ \frac{\partial H(0)}{\partial F} \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial H(0)}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{du}\frac{\partial H(0)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial^2 H(0)}{\partial x'^\lambda \partial F}\omega \right] \delta x^\lambda,$$

et les courbes correspondantes, que A. Lichnerowicz appelle les *extrémales généralisées*, sont les solutions du système différentiel

$$\frac{d}{du}\frac{\partial H(0)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial H(0)}{\partial x^\lambda} = H'(0)\frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} - \omega\frac{\partial H'(0)}{\partial x'^\lambda}, \tag{3}$$

où l'on a posé $\dfrac{\partial H}{\partial F^u_{u_0}} = H'$, et où l'on voit intervenir trois fonctions des variables $x^\lambda$ et $x'^\lambda$

$$H(0) = H(0, x^\lambda, x'^\lambda), \quad H'(0) = H'(0, x^\lambda, x'^\lambda), \quad \omega(x^\lambda, x'^\lambda). \tag{4}$$

Dans le même travail A. Lichnerowicz a défini *l'espace variationnel généralisé*, fondé sur un problème de calcul des variations non holonome relatif à une intégrale telle que

$$I = \int\limits_{u_0}^{u_1} H[F^u_{u_0}, x^\lambda(u), x'^\lambda(u)]du, \quad F^u_{u_0} = \int\limits_{u_0}^{u_1} \Omega[x^\lambda(v), x'^\lambda(v)]\,dv, \tag{1'}$$

où les fonctions $\Omega(x^\lambda, x'^\lambda)$ et $H(F, x^\lambda, x'^\lambda)$ sont toutes deux homogènes et du premier degré par rapport aux $x'^\lambda$. En donnant la théorie de ces espaces, A. Lichnerowicz a montré qu'ils généralisent les espaces de Finsler définis sur la variété $V$ par la métrique

$$ds_0^2 = H^2(0, x^\lambda, dx^\lambda).$$

C'est une classe d'espaces de Cartan à connexion euclidienne dont l'élément générateur est un élément linéaire, qui sont, excepté un seul cas special, des espaces non ponctuels. Les extrémales généralisées de l'intégrale (1') sont les géodésiques de l'espace variationnel généralisé correspondant.

Comme un exemples des problèmes du calcul des variations non holonome A. Lichnerowicz a pris le principe de Hamilton pour les systèmes dynamiques non conservatifs à liaisons holonomes, soumis à des forces ne dépendant que de la position, et il a montré que les équations de Lagrange définissent les extémales généralisées associées à l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{t} \left( T + \int_{t_0}^{t} Q_i \frac{dx^i}{d\tau} \, d\tau \right) dt. \tag{5}$$

Les notations employées sont les notations usuelles du calcul différentiel absolu; $x^i$ les paramètres indépendants relatifs au système; $T$ la force vive; $Q_i \, dx^i$ le travail élémentaire des forces données appliquées au système; $S$ est l'action du système pour l'intervalle $(t_0, t_1)$, $\tau$ un nouveau paramètre.

Dans ce travail de A. Lichnerowicz, comme dans les recherches de J. Klein [4], les équations de Lagrange du système matériel, dont les forces généralisées dépendent aussi de la vitesse, sont caractérisées par la relation intégrale d'invariance, mais non pas par le principe de Hamilton. D'autre part, on y a étudié les conditions pour que les équations de Lagrange d'un tel système dynamique, soumis à une liaison holonome, ou à une liaison d'Appell quelconque, puissent être considérées comme géodésiques d'un espace variationnel non holonome. A. Lichnerowicz a aussi donné un théorème sur les paths qui correspond au théorème de E. Kasner et J. Lipka dans l'application du calcul des variations classique.

Ici nous allons définir le problème de Lagrange dans le calcul des variations non holonome et nous allons montrer que par les résultats cités ci-dessus l'application du principe de Hamilton dans la mécanique classique devient susceptible de précisions suivantes.

En notant par $L$ le lagrangien classique pour les paramètres $x^i$ du système, pouvant se réduire à la demi-force vive, et par

$$a_l (x^i, t, x'^i) = 0, \qquad l \in 1, \ldots, m, \tag{6}$$

les équations des liaisons, où les fonctions $a_l$ sont par rapport à $x^i, t, x'^i$ suffisament de fois continûment différentiables, nous allons énoncer les résultats suivants:

I. Le mouvement d'un système conservatif à liaisons holonomes ou non holonomes $a_l (x^i, x'^i, t) = 0$ est tel que l'intégrale

(7) $I = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$ a une valeur extrémale concernant les fonctions $x^1(t), \ldots, x^n(t)$,

tandis que les déplacements virtuels $\delta x^i$ sont *transversaux*, dans le sens du problème variationnel défini par l'intégrale $\int a_l\,dt$, à l'élément linéaire tangent à la trajectoire.

Les équations de Lagrange résultent de l'équation

$$\delta I = 0 \tag{8}$$

quand on tient compte des relations

$$\frac{\partial a_l}{\partial x'^t}\,\delta x^i = 0, \qquad l \in 1, \ldots, n, \tag{9}$$

par la méthode des multiplicateur indeterminés, qui dépendent de $x^i, x'^i, t$.

II. Les équations de Lagrange d'un système conservatif à liaisons non holonomes $a_l(x^i, x'^i) = 0$ peuvent être définies aussi par *un problème de Lagrange du calcul de variations non holonome* associé à l'inégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\left(L + \sum_l \lambda_l \int_{t_0}^{t} a_l\,dt\right)dt \tag{10}$$

et par la condition que ces équations admettent les intégrales premières $a_l(x^i, x'^i) = \text{const.}$ [$l \in 1, \ldots, m$; $\lambda_l(x^i, x'^t, t)$ sont les multiplicateurs de liaisons].

III. Pour que les trajectoires du système dynamique à liaisons holonomes puissent être interprétées comme extrémales généralisées associées à l'intégrale d'action, il est nécessaire et localement suffisant que

$$Q_i\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x'^k} - \frac{\partial Q_k}{\partial x'^j}\right) + Q_j\left(\frac{\partial Q_k}{\partial x'^i} - \frac{\partial Q_i}{\partial x'^k}\right) + Q_k\left(\frac{\partial Q_i}{\partial x'^j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x'^i}\right) = 0, \quad i, j, k \in 1, \ldots, n. \tag{11}$$

En d'autres termes, les vecteurs de forces doivent admettre dans l'espace $(x'^i)$ une congruence des normales, les forces généralisées étant déterminées par deux fonctions indépendantes

$$\omega = \omega(x^i, x'^i), \quad k = k(x^i, x'^i),$$

de façon que si l'on pose $\rho = k^2$, $\varphi = \dfrac{\omega}{k}$, on a $Q_i = \rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'^i}$.

Les équations de Lagrange, qui définissent le mouvement dans $E_n$ du système donné, peuvent être caractérisées par l'existence du principe variationnel de Hamilton qui s'exprime à l'aide de l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\left(T + k\int_{t_0}^{t} \omega\,dt\right)dt. \tag{12}$$

Au cas où un tel système est assujetti à des liaisons non holonomes $a_l(x^i, x'^i)=0$, $l\in 1,\dots,m$, les équations de Lagrange peuvent être caractérisées par le principe de Hamilton exprimé comme le problème de Lagrange du calcul des variations non holonome associé à l'intégrale

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(T+\sum_q k_q\int_{t_0}^{t}\omega_q\,dt+\sum_l\lambda_l\int_{t_0}^{t}a_l\,dt\right)dt \tag{13}$$

et les équations de liaisons.

IV. Spécialement:

a) Dans le cas où $\rho$ ne dépend que de la position

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial x'^i},\quad U(x^i, x'^i)=k\,\omega=\rho\varphi,$$

l'action est representée par l'intégrale

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(T+\int_{t_0}^{t}U\,dt\right)dt. \tag{14}$$

b) Dans le cas où les forces géneralisées $Q_i$ sont des fonctions homogènes de degré zéro $(h_0)$ par rapport à $x'^i$, on peut écrire $U=Q_i\dot{x}^i$, en particulier si les $Q_i$ ne dépendent que de la position.

c) Si $U\,dt=dV$ et $a_l\,dt=df_l$ sont des différentielles totales, les vecteurs des forces et ceux des forces de liaisons admettent une congruence des normales dans l'espace $(x^i)$ également, et les équations de Lagrange peuvent être caractérisées par le principe de Hamilton exprimé comme le problème de Lagrange du calcul des variations classique.

d) D'après les cas speciaux ci-dessus on voit que l'intégrale (13) contient implicitement tous les termes sous l'intégrale

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(T+V+\int_{t_0}^{t}U\,dt+\sum_q k_q\int_{t_0}^{t}\omega_q\,dt+\sum_p\lambda_p^* f_p+\sum_l\lambda_l\int_{t_0}^{t}a_l\,dt\right)dt, \tag{13'}$$

$$q\in 1,\dots,r,\quad l\in 1,\dots,m,\quad p\in 1,\dots,m^*.$$

V. Si les fonctions $L, k, \omega, a_l$, qui définissent le mouvement d'un système non conservatif à liaisons non holonomes, sont exprimées à partir des $x^i, x'^i$ et du temps $t$, et si l'on introduit un paramètre auxiliaire $u$, $t = x^{n+1}(u)$, $\frac{dx^\alpha}{du} = \dot{x}^\alpha$, $\alpha \in 1, \dots, (n+1)$, les conditions (11) deviennent

$$(S_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} + S_{\alpha\gamma} S_{\delta\beta} + S_{\alpha\delta} S_{\beta\gamma}) \dot{x}^\alpha = 0, \tag{15}$$

données par J. Klein [4]. Les éguations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i + \sum_l \lambda \frac{\partial a_l}{\partial x'^i}, \quad i \in 1, \dots, n, \tag{16}$$

qui définissent les trajectoires dans $E_{n+1}$, résultent des équations de Lagrange généralisées, qui peuvent être caractérisées par le principe de Hamilton exprimé comme le problème de Lagrange du calcul des variations non holonome associé à l'intégrale

$$\mathcal{S} = \int_{u_0}^{u_1} \left( \mathcal{L} + \sum_q K_q \int_{u_0}^{u} \Omega_q \, du + \sum_l \mu_l \int_{u_0}^{u} \mathcal{A}_l \, du \right) du, \tag{17}$$

où on a posé

$$\dot{x}^{n+1} L = \mathcal{L}, \quad \dot{x}^{n+2} U = \mathcal{U}, \quad \dot{x}^{n+1} a = \mathcal{A}, \quad \dot{x}^{n+1} k_q = K_q, \quad \dot{x}^{n+1} \omega_q = \Omega_q, \quad \dot{x}^{n+1} \lambda_l = \mu_l,$$

et les équations de liaisons.

Si l'on définit comme forces généralisées dans l'espace-temps de configuration $E_{n+1}$ les expressions $\Xi_i = Q_i \dot{x}^{n+1}$, $\Xi_{n+1} = -Q_i \dot{x}^i$, on a toujours $\mathcal{U} = \dot{x}^{n+1} U = \Xi_\alpha \dot{x}^\alpha$.

VI. Dans le cas où les vecteurs de forces admettent pour trajectoires dans l'espace $(x'^i)$ une congruence des normales:

a) les équations de Lagrange du système dynamique non conservatif à liaisons holonomes définissent dans l'espace-temps de configuration $E_{n+1}$ *les géodésiques d'un espace variationnel généralisé* $L_{n+1}$, attaché à l'intégrale

$$\mathcal{L} = \int_{u_0}^{u_1} \left( \mathcal{L} + \sum_q K_q \int_{u_0}^{u} \Omega_q \, du \right) du. \tag{17'}$$

Si le système est conservatif, les trajectoires libres sont des géodésiques d'un espace de Finsler $F_{n+1}$, dont la métrique est définie par la fonction $\mathcal{L} = L \dot{x}^{n+1}$.

b) Les équations de Lagrange d'un système non conservatif à laisons non holonomes (16) définissent dans l'espace-temps de configuration $E_{n+1}$ les *géodésiques cointraintes* associées au problème de Lagrange du calcul des variations non holonome, défini par l'intégrale (17), et les equations de liaisons.

## II DÉMONSTRATIONS

*ad* I.

Dans sa note sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses, P. Appell [1] a supposé que les liaisons peuvent être présentées comme des fonctions homogènes de degré $h$ des variations arbitraires $\delta q^i$, et il a montré qu'on peut obtenir les équations différentielles du mouvement du système en cherchant les valeurs $x''^i$ qui rendent la fonction $R = S - Q_i x''^i$ ($S$ l'énergie d'accélération) minimum en ce qui concerne les fonctions $x^i$, quand on ne se borne qu' aux déplacements $\delta x^i$ auxquels correspond le travail élémentaire de la force de liaisons zéro. — Dans cette théorie de P. Appell le principe de travaux virtuels est une conséquence mathématique des propositions qui sont prises sur les liaisons.

Une théorie mathématique plus générale des systèmes dynamiques à liaisons a été donnée par R. Kašanin. Ses deux travaux [3] répondent avant tout à la question suivante: étant donnée le champs de force d'un système non conservatif comme fonction de $n$ paramètres indépendants du système $x^i$ et leurs dérivées par rapport à $t$, tandis que ces paramètres, leurs dérivées jusqu'à un certain ordre $r$ et le temps sont, à leur tour, reliés par $m$ relations

$$a_l(x^i, x'^i, x''^i, \dots x^{(r)i}, t) = 0 \qquad l \in 1, \dots, m, \tag{18}$$

quelles forces de liaisons peut-on introduire dans les équations

$$m_i \ddot{r} = \vec{F}_i \tag{19}$$

si l'on exige que les liasions (18) au cours du mouvement soient conservées? — Le cas général est ici ramené, par introduction des nouveaux paramètres, d'autant de nouvelles liaisons et par différentiation des liaisons holonomes, au cas où les liaisons sont exprimées par des coordonnées $x_i$ et leurs dérivées premières. — Au lieu du système d'équations (18) et (19) on obtient les équations

$$
(20)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial x'^i} - \dfrac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i + \sum\limits_l \lambda_l \dfrac{\partial a_l}{\partial x'^i} + a_{.k}\, v^k, \\ \text{b)} & a_l = 0, \\ \text{c)} & \dfrac{\partial a_l}{\partial x'^k} v^k = 0, \quad i, k \in 1, \ldots, n, \quad l \in 1, \ldots, m. \end{cases}
$$

$a_{ij}$ sont des composants du tenseur fondemental, $\lambda_l(x^i, x'^i, t)$ les multiplicateurs de liaisons.

R. Kašanin a montré que les composants des vecteurs de forces de liaisons $\lambda_l \dfrac{\partial a_l}{\partial x'^k}$ sont indispensables et suffisants à établir les liaisons, et qu'ils sont complètement déterminés par les forces généralisées $Q_i$ et les équations des liaisons $a_l = 0$. On voit que dans le cas où la force d'une liaison $a_l = 0$ n'a que des composants indispensables à établir cette même liaisons, il s'agit d'une liaison dite liaison d'Appell, et les équations (20 a) deviennent

$$
(20'\text{a})\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i + \sum_l \lambda_l \frac{\partial a_l}{\partial x'^i}.
$$

D'autre part, les $n-m$ des composants $v^k$ dans (20a), qui ne sont pas indispensables et qui satisfont les relations (20c), ne sont pas complètement déterminés, et il faut connaître encore d'autres caractéristiques de ces composants, comme p. ex. les caractéristiques cinématiques ou physiques. En changeant les composants $v^k$ dans la mesure de (20c) on obtient des différentes équations qui correspondent aux différents mouvements, qui sont tous en concordance avec les liaisons données. C'est parce qu'on n'a pas cherché les forces de liaisons indispensables, mais celles qu'on *peut* introduire pour conserver les liaisons données. — Il est plausible que, si l'on part d'un principe variationnel, on ne peut pas s'attendre à obtenir les composants $a_{.k}\, v^k$, et qu'il faut traiter ces composants, au cas où elles existent, comme s'il s'agissait des forces données, appliquées au système dynamique.

Pour obtenir les équations (20'a) en partant du principe de Hamilton par la technique du calcul des variations classique, nous rappellons [6] que dans le cas des liaisons non holonomes linéaires, homogènes en $x'^i$, les trajectoires sont caractérisées par les équations d'extrémales de l'intégrale $I = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$ pour toutes les variations $\delta x^i$ qui s'annulent à l'extrémité de l'arc et, dans les autres points, s'accordent avec les relations de liaisons, tandis qu'en passant à l'espace-temps de configuration $E_{n+1}$ nous avons la possibilité d'homogéniser en vue des vitesses les liaisons quelconques, données par des fonctions suffisamment de fois différentiables.

Avec les notations ci dessus $x'^i \dot{x}^{n+1} = \dot{x}^i$, la relation de liaison (6) devient

$$a\left(x^\alpha, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}\right) = 0$$

ou

$$a(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0. \tag{21}$$

En vertu de l'homogénité $(h_0)$ de $a(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$, $\partial a_{\dot{\alpha}}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\, \dot{x}^\alpha \equiv 0$ pour un élément linéaire quelconque. En ajoutant cette identité à l'équation (21) on a

$$\frac{1}{\dot{x}^{n+1}}\left[\partial_{\dot{\alpha}}(\dot{x}^{n+1} a)\right] \dot{x}^\alpha = 0 ,$$

autrement

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A} = \dot{x}^{n+1} a(x^\alpha, \dot{x}^\alpha). \tag{22}$$

Si l'on choisit un élément linéaire $(x^i_0, x'^i_0, t_0)$ en concordance avec la liaison donnée, la relation

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)_0 \delta x^\alpha = 0 \tag{23}$$

n'est pas valable dans $E_{n+1}$ seulement pour le déplacement $\delta x^\alpha = (\dot{x}^\alpha)_0\, du$, qui correspond à cet élément linéaire, mais aussi pour tous les déplacements $\delta x^\alpha$ permis par la liaison linéaire

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)_0 \dot{x}^\alpha = 0, \tag{24}$$

tangente à l'indicatrice définie par la relation $\mathcal{A}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0$ dans l'espace $(\dot{x}^\alpha)$ au point $(x^\alpha_0)$. Comme cette indicatrice est toujours une surface conique, l'espace tangent des déplacements $\delta x^\alpha$ contient aussi le déplacement réel $\dot{x}^\alpha_0\, du$, qui coïncide avec la génératrice de l'indicatrice.

Après les notations ci-dessus on a $\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\, du$. Les équations des extrémales dans $E_{n+1}$, quand on tient compte des relations (23) par la méthode des multplicateurs, deviennent

$$(25)\quad \begin{aligned} &a)\quad \frac{d}{du}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} = \mu \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \dot{x}^i} \quad \Big| \cdot \dot{x}^i \\ &b)\quad \frac{d}{du}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^{n+1}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^{n+1}} = \mu \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \dot{x}^{n+1}} \quad \Big| \cdot \dot{x}^{n+1} \end{aligned}$$

Du système d'équations (25) il résulte que l'équation (25b) est une conséquance des équations (25a), et si l'on tient compte que $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x'^i}$, $\frac{d}{du} = \dot{x}^{n+1}\frac{d}{dt}$ et si l'on pose $\frac{\mu}{\dot{x}^{n+1}} = \lambda$, les équations (25a) deviennent

$$(26)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x'^i} = \lambda \frac{\partial a}{\partial x'^i}$$

et coïncident avec les équations (20'a).

Cela signifie que les équations de Lagrange d'un système conservatif à liaisons non holonomes peuvent être caractérisées par l'existence du principe de Hamilton qui s'exprime à l'aide de l'intégrale d'action $I = \int_{t^0}^{t_1} L\,dt$, en supposant que les variations sont liées par la relation

$$(27)\qquad \frac{\partial a}{\partial x'^i}\delta x^i = 0.$$

D'autre part, la relation (27), qui caractérise les déplacements qu'on appelle les déplacemnts virtuels, résulte de la relation (13) si l' on y $\delta t = \delta x^{n+1} = 0$.

Au cas général le déplacement réel $x'^i dt$ n'appartient pas à l'espace tangent des dépłacements virtuels défini par (27). Mais dans l'exemple cité des liaisons linéaires homogènes il y appartient, l'indicatrice de $a(x^i, x'^i) = 0$ dans l'espace $(x'^i)$ étant dans ce cas un hyperplan qui passe par le point $x_0^i$ et coincide avec l'espace tangent (27).

En ce qui concerne l'équation (25b), avec les notations ci-dessus on a

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^{n+1}} = L + \dot{x}^{n+1}\frac{\partial L}{\partial x'^i}\frac{-\dot{x}^i}{(\dot{x}^{n+1})^2} = L - \frac{\partial L}{\partial x'^i}x'^i = -\mathscr{H},$$

$\mathscr{H}$ étant le hamiltonien du système, $\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \dot{x}^{n+1}} = -\frac{\partial a}{\partial x'^i}x'^i$, et l'équation (25b) devient

$$(25'b)\qquad \frac{d\mathscr{H}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \lambda \frac{\partial a}{\partial x'^i}x'^i,$$

d'après quoi l'équation (25b) exprime le théoréme de Painlevé dans l'espace $E_{n+1}$ pour les sysèmes conservatifs à liaisons d'*A*ppell.

*ad* II.

Si l'on applique une autre technique du calcul des variations classique, celle qui donne les extrémales concernant les variations qui se rapportent à des lignes variées laissant valables les relations des liaisons, les équations des extrémales sont caractérisées par un problème de Lagrange qui s'exprime à l'aide de l'intégrale d'action

$$S=\int_{t_0}^{t_1}[L+\lambda a]\,dt \tag{28}$$

et l'intégrale première $a(x^i, x'^i)=\text{const.}$

Dans les équations d'Euler de ce problème

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}+\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial a}{\partial x'^i}+\lambda\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial a}{\partial x'^i}-\frac{\partial a}{\partial x^i}\right)=0,$$

l'expression

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial a}{\partial x'^i}-\frac{\partial a}{\partial x^i} \tag{29}$$

est toujours zéro dans le cas des liaisons holonomes, la variation de l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} a\,dt$, comme cette intégrale même, étant zéro le long de n'importe quelle courbe entre les points limites qui sont en concordance avec la liaison donnée. On peut le démontrer même directement en posant dans (29) $a=\frac{\partial f}{\partial x^j}x'^j$. Dans le cas d'une liaison non holonome l'intégrale $I$ est zéro le long de chaque ligne qui laisse valable la relation de liaison $a=0$, mais cette valeur n'est pas nécessairement une valeur extrémale, et l'expression (28) peut différer de zéro, comme on le va prouver par un exemple.

Dans le cas $n=4$ la liaison soit donnée par la relation

$$\sum_{k=1}^{3} x'^k+x^1 x'^4=0. \tag{30}$$

Pour une liaison non holonome $A_i x'^i+B_i=0$, $A_i, B_i$, étant des fonctions de position, on a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial a}{\partial x'^i}-\frac{\partial a}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j. \tag{31}$$

Ces expressions, considérées somme fonctions des $x^i$ dans le cas des liaisons non holonomes ne peuvent pas être identiquement zéro. Mais, si l'on cherche les courbes $x^i = x^i(t)$ qui laissent valable la relation de liaison et pour lesquelles les expressions (31) en tant que fonctions de $t$ sont zéro, on trouve que dans l'exemple (30) les fonctions $x^i$ doivent avoir la forme

$$x^1 = \text{const.}, \quad x^2 = x^2(t), \quad x^3 = x^3(t), \quad x^4 = \text{const},$$

ce qui signifie que les expressions (31) peuvent être zéro seulement dans le cas où la relation (30) devient $x'^2 + x'^3 = \text{const.}$, c'est-à-dire dans le cas où elle est holonome.

On peut aussi donner des exemples comme celui cité par C. Carathéodory [2]

$$a \equiv x'^2 - \sqrt{1 + (x'^1)^2} = 0, \tag{32}$$

où, dans le cas quand les coordonnées des points limites dans $E_{u+1}$ satisfont les conditions $\left(x^2_{(1)} - x^2_{(0)}\right)^2 = (t_1 - t_0)^2 + \left(x^1_{(1)} - x^1_{(0)}\right)^2$, les lignes variées n'existent pas et le problème variationnel n'a pas de sens.

Donc, les équations de Lagrange d'un système dynamique conservatif à liaisons non holonomes ne peuvent pas être caractérisées par un problème de Lagrange du calcul variationnel classique.

Mais la liaison $a(x^i, x'^i) = 0$ peut être caractérisée aussi par la relation

$$\int_{t_0}^{t} a\,dt = 0 \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{33}$$

qui vaut pour une valeur quelconque de $t$ dans l'intervalle $(t_0, t_1)$. Si l'on écrit à l'aide du multiplicateur de liaison $\lambda(x^i, x'^i, t)$ l'integrale d'action d'un système dynamique à liaison (33)

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(L + \lambda \int_{t_0}^{t} a\,dt\right) dt, \tag{34}$$

cette expression est en concordence avec l'action d'un système conservatif à liaison holonome

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (L + \lambda f)\,dt, \quad f = \int_{t_0}^{t} a\,dt.$$

Mais dans (34) on a sous l'intégrale une fonction d'une intégrale portant sur une fonctionelle de la classe régulière, et pour cette raison on est obligé d'utiliser la technique du calcul des variations non holonome. On voit que le système différentiel aux extrémales généralisées associées à l'intégrale (34), quand on tient compte que $a = \text{const.}$ est une intégrale première de ces équations, coïncident avec les équations (20'a).

Nous appellons *problème de Lugrange du calcul des variations non holonome* un problème de ce calcul, où par la méthode des multiplicateurs indéterminés on tient compte des équations des liaisons exprimées par des fonctionnelles de la classe régulière.

Au cas d'une liaison holonome les extrémales généralisées associées à l'integrale (3) coincident avec les extrémales associées à l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} (L + \lambda a)\, dt$, car $\overline{\delta} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \left(L + \lambda \int_{t_0}^{t} a\, dt\right) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (L + \lambda a)\, dt$, où l'intégrale sous le signe de la variation classique $\delta$ est prise le long d'un intervalle fini.

*ad* III, IV.

Si les forces auxquels un système dynamique est soumis doivent agir indépendemment, l'action du système dans le cas le plus général où les équations de Lagrange résultent du principe de Hamilton par l'application de la technique du calcul des variations non holonome, doit avoir la forme

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (L + \sum_q H_q (F_q, x^i, x'^i))\, dt, \quad F_i = \int_{t^0}^{t} \omega_q\, dt, \tag{35}$$

où les fonctions $H_q, \omega_q$ sont supposées comme dans l'intégrale (1).

Les forces généralisées qui correspondent à une certaine paire de fonctions $H_q, \omega_q$ seront exprimées par les fonctions $H'_q(0), \omega_q$ de façon que

$$Q_i = H' \frac{\partial \omega}{\partial x'^i} - \omega \frac{\partial H'}{\partial x'^i}. \tag{36}$$

(On a supprimé, afin d'alleger les notations, les $q$ et l'argument zéro dans $H'$.)

Autrement,

$$Q_i = (H')^2 \frac{\partial}{\partial x'^i} \left(\frac{\omega}{H'}\right), \tag{36'}$$

d'après quoi la forme differentielle $Q_i\, dx'^i$ admet le facteur intégral $\frac{1}{(H')^2}$, et les vecteurs de forces admettent pour trajectoires dans l'espace $(x'^i)$ une congruence des normales.

Si l'on introduit les notations $\rho = (H')^2, \varphi = \omega / H'$, on a

$$Q_i = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} \tag{36''}$$

ou

$$\frac{Q_1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'^1}} = \frac{Q_2}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'^2}} = \ldots = \frac{Q_n}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'^n}} = \rho . \tag{37}$$

Inversement, pour que les forces généralisées satisfassent aux conditions (36), d'après la théorie des équations différentielles totales, il est nécessaire et localement suffisant que les conditions (11) soient satisfaites.

Dans le cas où les forces généralisées données sont de la forme (36'') on peut toujours trouver deux fonctions $H'(0)$ et $\omega$, $[H'(0)]^2 = \rho$, $\omega = \varphi H'(0)$. La fonctionelle $F_q$ sera complètement déterminée, mais ce n'est pas le cas de la fonction $H_q(F_q, x^i, x'^i)$. Si l'on introduit la notation $H'_q(0, x^i, x'^i) = = k_q(x^i, x'^i)$, la plus simple de toutes les fonctions $H_q(F_q, x^i, x'^i)$ qu'on pourrait choisir s'écrit $k_q F_q = k_q \int_{t_0}^{t} \omega_q \, dt$. Cette expression est d'autre part en accord avec la théorie des systèmes conservatifs, car dans ce cas elle représente la fonction de forces $V$:

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial x'^i} x'^i, \ k = 1 \ \text{(ou const)}, \ k \int_{t_0}^{t} \omega \, dt = k^2 V = V.$$

Donc, dans le cas le plus général où les équations de Lagrange d'un système non conservatif définissent les extrémales généralisées sur la variété analytique $V_n$, le principe de Hamilton s'exprime à l'aide de l;intégrale d'action

$$S = \int_{t_0}^{t} (T + \sum_q k_q \int_{t_0}^{t} \omega_q \, dt) \, dt.$$

Dans le cas où un tel système est assujetti à des liaisons non holonomes, on obtient les équations de Lagrange en traitant le problème de Lagrange du calcul des variations non holonome, attaché à l'intégrale (13) et aux équations de liaisons.

*ad* V.

Si les fonctions $L, k, \omega, a_i$ sont exprimééś par les variables $x^i, x'^i$ et par le temps $t$, en passant à l'espace-temps de configuration $E_{n+1}$ on peut écrire les intégrales (13) et (14) sous la forme de l'intégrale (17), qui dépend de $n+1$ variables $x^\alpha$, ses $n+1$ dérivées par rapport au paramètre auxiliare $u$ et des fonctionnelles de la classe régulière. Si en vertu du principe de Hamilton on écrit le système différentiel aux extrémales généralisées, on montre, de même que dans la remarque „*ad* I.", que la $(n+1)$-ème équation est une conséquence de $n$ premières, et que les trajectoires du système non conservatif à liaisons non holonomes sont définies dans $E_{n+1}$ par les solutions du système (16). — Dans les conditions (15) $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\dot\beta}\,\Xi_\alpha - \partial_{\dot\alpha}\,\Xi_\beta)$.

*ad* VI.

Afin de donner une interprétation géométrique des équation de Lagrange au cas où elles définissent les extémales généralisées, nous allons passer à l'espace-temps de configuration $E_{n+1}$ aussi au cas cités dans l'énoncé III.— En vertu de l'homogéniété $(h_1)$ des fonctions $K$ et $\Omega$ l'intégrale (17') définit la métrique d'un espace variationnel généralisé $L_{n+1}$ intrinsèquement attachée au système dynamique à liaisons holonomes. Les géodésiques de cet espace assurent en vertu du principe de Hamilton la représentation des trajectoires du système.

De même, les équations différentielles d'un système dynamique à liaisons non holonomes sont caractérisées dans $E_{n+1}$ par le principe de Hamilton qui s'exprime comme un problème de Lagrange du calcul des variations non holonome attaché à l'intégrale (17) et les équations de liaisons, tandis que les trajectoires peuvent être interprétées comme géodésiques cointraintes associées à ce problème de Lagrange.

*(Reçu le 27.IV.1960)*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Appell — *Comptes rendus.* **152**, (1911), 1197—1199.

[2] C. Carathéodory — Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Berlin, 1935.

[3] R. Kašanin — *a. Publ. Inst. Match. Acad. Serbe Sci.* **2** (1948), 116—129. *b. Zbornik radova Mat. inst. SAN* **1** (1951), 17—57.

[4] J. Klein — *a. Comptes rendus.* **233** (1954), 2144—2146. *b. Jbid.* **240**. (1955), 2208—2210.

[5] A. Lichnerowicz — *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3) **LXII** (1946), 339—384.

[6] J. L. Synge — *Math. Ann.* **99** (1928), 738—751.