REKURSIVE WORTARITHMETIK

VLADETA VUČKOVIĆ (Belgrad)

1. Rekursive Wortarithmetik will eine neue Disziplin der Grundlagenforschung sein, die das Operieren mit Wörtern eines Alphabets präzisieren soll. Die Bedeutung einer solchen Disziplin für die Theorie der Algorithmen liegt auf der Hand: ein Algorithmus kann im allgemeinen als ein System

$$(1.1) \quad g_i \rightarrow (\cdot) f_i(X), \quad i=1, 2, \dots, r$$

von Regeln, welche das Wort W , am dessen Beginn das Wort g steht, oder das das Wort g_i enthält in das Wort $f_i(W)$ abbilden, wobei f_i eine Wortfunktion ist. Also scheint es natürlich rekursive Wortfunktionen zu definieren und ihre Arithmetik zu untersuchen.

Natürlich soll solch eine Theorie konstruktiv, formell und eventuell nur auf einem finiten Bruchstück der Zahlentheorie begründet sein. Erwünscht ist auch ein Minimum von logischen Voraussetzungen; deswegen werden wir diese Theorie als einen reinen Gleichungskalkül bearbeiten, etwa nach dem Muster des Aufbaues der rekursiven Zahlentheorie im Werke „Recursive Number Theory“ von Herrn R. L. Goodstein [2].

Erste Ansätze zu einer rekursiven Theorie der Wörter finden sich in der Abhandlung [3] von H. Hermes, wie es uns aus einer Anweisung von Kleene bekannt ist (Kleene [4], Seite 246). Von einer mehr philosophischen Seite ist das Problem im Artikel [5] von E. Stenius gestellt. Wir haben zuerst kommutative rekursive Wortarithmetik in [1] betrachtet. Diese Theorie erweist sich im wesentlichen als eine Theorie der Gitterpunkte und weicht sehr von der eigentlichen Theorie der rekursiven Wortfunktionen ab. In einem Punkte treffen sich die beiden zusammen: sie haben dieselben Kalküle der logischen Symbole.

2. In dieser Abteilung wollen wir informativ den Inhalt der rekursiven Wortarithmetik illustrieren. Dabei begrenzen wir uns auf ein Alphabet

$\mathfrak{A} = \{S_0, S_1\}$ aus zwei Buchstaben. Wir wollen alle Wörter über diesem Alphabet in ein verzweigtes System anordnen. O bedeutet das leere Wort.

Jedes Wort X hat zwei Nachfolger S_1X und S_0X . Dem Worte O folgen S_1 und S_0 , dem Worte S_1 folgen S_1S_1 und S_0S_1 , dem Worte S_0 folgen S_1S_0 und S_0S_0 , usw. Jedes Wort kann man also durch Anwendung einer gewissen Anzahl von Nachfolgerfunktionen S_0 und S_1 aus dem leeren Wort gewinnen. Also können alle Wortfunktionen aus gewissen Grundfunktionen durch eine entsprechende rekursive Definition definiert werden oder, besser gesagt, nur solche Funktionen können als konstruierbar angenommen sein.

Auf diese Weise kann eine Fülle rekursiver Wortfunktionen definiert und untersucht sein: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Reversion, Abwischen von gewissen Buchstaben usw. Es zeigt sich dass die Wörter die aus lauter S_0 bestehen eine spezielle Stellung nehmen: man nennt sie natürliche Zahlen und man zeigt dass man, was arithmetische Operationen anbelangt, mit ihnen genau so wie mit natürlichen Zahlen rechnen kann.

Man ist imstande zu definieren wenn das Wort Y „kleiner“ vom Worte X ist und so eine partielle Ordnung in diese Arithmetik einzuführen. Auf diese Weise sind die Summe $\Sigma_f(X)$ und das Produkt $\Pi_f(X)$ genau bestimmt. Man kann dann $\mu_f(X)$ als das „kleinste“ Wort Z unter dem Worte X für das $f(Z) = O$ ist definieren und

$$Y < \mu_f(X) \rightarrow f(Y) \neq O$$

beweisen. Endlich kann man Quotient und Rest der Division des Wortes X durch das Wort Y definieren. Hier auch zeigen sich natürliche Zahlen spezifisch. Wenn man den Begriff des Primwortes einführt zeigt sich dass jedes Wort, das kein Primwort und keine natürliche Zahl ist, dem Produkte aus einem Primwort und einer natürlichen Zahl ist.

Dies sind im wesentlichen die Resultate die wir hier in einer ganz formellen Weise darstellen werden. Natürlich muss unsere Darstellung viele Umwege betreten.

Wir haben versucht dem Formalismus der rekursiven Zahlentheorie treu zu folgen. Wenn ein Beweis in unserem Artikel durch eine kleine Abänderung des entsprechenden Beweises aus der rekursiven Zahlentheorie gewonnen werden kann, so haben wir uns nur auf die entsprechende Formel aus [2] berufen. Überhaupt haben wir die Bezeichnungen aus die-

sem Werke von Herrn Goodstein treu zu übernehmen versucht. Nur bei neuen Wortfunktionen müssten wir neue Bezeichnungen einführen.

Der Verfasser will seine Dankbarkeit Herrn R. L. Goodstein für das Verständnis und Unterstützung aussprechen. Das bedeutet aber nicht dass Herr Goodstein für unsere Darstellung und Ideen verantwortlich sei.

3. Wir geben hier die Grundprinzipien der rekursiven Wortarithmetik genau an.

Wir betrachten die Menge $\Omega(\mathfrak{S})$ aller Wörter über einem Alphabet $\mathfrak{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_{n-1}\}$ mit $n \geq 2$ Buchstaben. In dieser Menge bauen wir eine rekursive Arithmetik in folgender Weise:

a) Individuelle Konstanten sind die Wörter O (das leere Wort); $S_0O, S_1O, \dots, S_{n-1}O, S_0S_0O, \dots, S_{1-1}S_0O, \dots$ usw. Wir schreiben das leere Wort O nicht am Ende anderer Wörter.

b) Individuelle Variablen sind $X, Y, Z, U, V, W, \dots$ usw. Ihr Bereich ist die Menge $\Omega(\mathfrak{S})$. (Der Begriff der Menge kann natürlich aus unserer Darstellung ganz eliminiert werden).

c) Grundfunktionen sind Nullfunktion $Z(X) = O$, Identitätsfunktion $I(X) = X$ und n Nachfolgerfunktionen $S_\nu(X)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$. Die Funktion $S_\nu(X)$ bildet das Wort X in das Wort $S_\nu X$ ab.

d) Die Ableitungsregeln sind die *rekursiven Definitionen* und die *Substitutionsregel*.

DEFINITION 3.1. Die rekursive Wortfunktion $F(X_1, \dots, X_m, Y)$ der Wörter $X_1, \dots, X_m$ und Y ist mittels primitiver Rekursion durch $n+1$ Anfangsgleichungen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} F(X_1, \dots, X_m, O) &= a(X_1, \dots, X_m), \\ F(X_1, \dots, X_m, S_\nu Y) &= b_\nu(X_1, \dots, X_m, Y, F(X_1, \dots, X_m, Y)), \\ &\nu = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

definiert. Dabei sind a und alle b_ν entweder Grundfunktionen oder schon eingeführte Funktionen.

DEFINITION 3.2. Die Funktion $F(X_1, \dots, X_m, Y, Z)$ ist mittels doppelter Rekursion durch das System der $n^2 + n + 1$ Anfangsgleichungen

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_m, Y, O) &= a(X_1, \dots, X_m, Y), \\ (3.2) \quad F(X_1, \dots, X_m, O, S_\nu Z) &= b_\nu(X_1, \dots, X_m, Z), \nu = 0, 1, \dots, n-1, \\ F(X_1, \dots, X_m, S_\mu Y, S_\nu Z) &= c_{\mu, \nu}(X_1, \dots, X_m, Y, Z, F(X_1, \dots, X_m, Y, Z)), \\ &\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

definiert. a und alle b_ν und $c_{\mu, \nu}$ sind wie in der Definition 3.1.

DEFINITION 3.3. Die Funktion $F(X_1, \dots, X_m, Y, Z)$ ist mittels der überworfenen Rekursion durch das System der $n+1$ Anfangsgleichungen

$$\begin{aligned} (3.3) \quad F(X_1, \dots, X_m, Y, O) &= a(X_1, \dots, X_m, Y) \\ F(X_1, \dots, X_m, Y, S_\nu Z) &= b_\nu(X_1, \dots, X_m, Y, Z, F(X_1, \dots, X_m, S_\nu Y, Z)), \\ &\nu = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

definiert. a und alle b_ν wie in Definition 3.1.

Nur an zwei Stellen werden wir die überworfenen Rekursion verwenden müssen.

DEFINITION 3.4. Seien $f(X_1, \dots, X_n)$, $\varphi_\nu(X_1, \dots, X_{m_\nu})$, $\nu = 1, 2, \dots, n$ rekursive Wortfunktionen. Dann ist auch

$f(\varphi_1(X_1, \dots, X_{m_1}), \varphi_2(X_1, \dots, X_{m_2}), \dots, \varphi_n(X_1, \dots, X_{m_n}))$
eine rekursive Wortfunktion (Substitutionsregel).

e) Es gilt das Unizitätsaxiom: Zwei Wortfunktionen mit denselben Anfangsgleichungen (3.1), oder (3.2), oder (3.3) sind eine und dieselbe Funktion.

f) Die einzigen Ausdrücke dieser Arithmetik sind die Gleichungen zwischen Wörtern und Wortfunktionen. Es werden nur bewiesene Gleichungen gestattet.

DEFINITION 3.5. Eine Gleichung $F = \Phi$ ist bewiesen: 1. Wenn F und Φ dieselben Anfangsgleichungen besitzen oder aus solchen Funktionen durch gleiche Substitutionen entstanden sind. 2. Wenn eine endliche Kette der bewiesenen Gleichungen, mit $F = \Phi$ als der letzten Gleichung, vorhanden ist.

g) *Regularitätsaxiom: Es gilt*

$$S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_p} = S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_q}$$

dann und nur dann wenn $p = q$ und $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$ gilt.

Dieses Axiom ist notwendig um „pathologische“ Modelle bei denen nicht alle Nachfolgern eines Wortes verschieden sind auszuschalten. Seine Notwendigkeit wurde dem Autor vom Herrn R. L. Goodstein klargemacht.

Offensichtlich ist die so begründete Wortarithmetik mit n Nachfolgerfunktionen (kurz: n -RWA) im folgenden Sinne frei von Widersprüchen: Wenn eine Gleichung $F(X_1, \dots, X_m) = \Phi(X_1, \dots, X_m)$ bewiesen ist, und ersetzt man die Variablen X_v mit bestimmten Wörtern $A_v, v = 1, \dots, m$, so sind $F(A_1, \dots, A_m)$ und $\Phi(A_1, \dots, A_m)$ eindeutig bestimmt und stellen ein und dasselbe Wort dar. (Beweis ähnlich wie in der rekursiven Zahlentheorie). *Jede beweisbare Gleichung ist verifizierbar.*

4. Der Addition in der rekursiven Zahlentheorie entsprechen in n -RWA n lineare Operationen $X o_\nu Y, \nu = 0, 1, \dots, n-1$, die durch

$$(4.1) \quad \begin{aligned} X o_\nu O &= X, \\ X o_\nu S_\mu Y &= S_{\mu+\nu} (X o_\nu Y), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

definiert sind. Die Summe der Indizes ν und μ soll man modulo n nehmen. (Dazu genügt nur ein finites Bruchstück der natürlichen Zahlenlehre.)

Speziell wird die Operation o_0 Summe genannt und mit $+$ bezeichnet:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} X + O &= X, \\ X + S_\mu Y &= S_\mu (X + Y), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Es ist z. B. $S_{a_1} S_{a_2} \dots S_{a_k} + S_{b_1} \dots S_{b_p} = S_{b_1} S_{b_2} \dots S_{b_p} S_{a_1} \dots S_{a_k}$, dh. die Summe $X + Y$ der Wörter X und Y wird so gebildet dass das Wort Y vor dem Worte X geschrieben wird. Ähnlich wird auch $X o_\nu Y$ gebildet, nur werden die Indizes aller Buchstaben von Y um ν (modulo n) vermehrt.

Wir schreiben

$$(4.3) \quad o_\nu X \quad \text{für das Wort} \quad O o_\nu X.$$

Es gilt

$$(4.4) \quad X o_\nu Y = X + (o_\nu Y).$$

Beweis. (Bei den Beweisen durch Unizität werden wir immer die linke Seite der zu beweisenden Gleichung mit f oder F , die rechte mit φ oder Φ bezeichnen.)

$$f(X, O) = X, \quad f(X, S_\tau Y) = S_{\tau+\nu} f(X, Y); \quad \varphi(X, O) = X + (O o_\nu O) = X + O = X, \\ \varphi(X, S_\tau Y) = X + S_{\tau+\nu} (o_\nu Y) = S_{\tau+\nu} \varphi(X, Y).$$

Weiter gelten:

$$(4.5) \quad O + X = X,$$

$$(4.6) \quad o_\nu (o_\mu X) = o_{\nu+\mu} X,$$

und das assoziative Gesetz in der Form

$$(4.7) \quad X o_\nu (Y o_\mu Z) = (X o_\nu Y) o_\mu (o_\nu Z).$$

Spezialfall von (4.7) ist

$$(4.7') \quad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z.$$

Die linearen Operationen sind nicht kommutativ. Deswegen muss man die Reihenfolge der Operanden treu befolgen.

Der klassischen Multiplikation entsprechen in n -RWA n multiplikative Operationen $X \dot{\nu} Y$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, die durch

$$(4.8) \quad X \dot{\nu} O = O, \\ X \dot{\nu} S_\mu Y = (X \dot{\nu} Y) o_{\mu+\nu} X, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1,$$

definiert sind. Wieder soll man, wie auch immer weiter, die Addition der Indizes modulo n nehmen.

Speziell wird die Operation $\dot{\nu}$ Multiplikation genannt und mit $\cdot$ bezeichnet:

$$(4.9) \quad X \cdot O = O, \\ X \cdot S_\tau Y = (X \cdot Y) o_\tau X, \quad \tau = 0, 1, \dots, n-1.$$

Auch die Multiplikation ist nicht kommutativ. Es gilt doch ausnahmsweise

$$(4.10) \quad S_0 \cdot X = X \cdot S_0 = X.$$

Deswegen nennen wir das Wort $S_0 O$ die Einheit und schreiben oft 1 für dieses Wort. Somit gewinnen unsere Formeln mehr Ähnlichkeit mit den Formeln der rekursiven Zahlentheorie.

Es folgen einige Gleichungen:

$$(4.11) \quad O \dot{\vee} X = O.$$

$$(4.12) \quad X \dot{\vee} (Y o_{\mu} Z) = (X \dot{\vee} Y) o_{\mu} (X \dot{\vee} Z),$$

dh. die multiplikativen Operationen sind gegenüber den lineären von links (nicht aber von rechts) distributiv.

Beweis. $f(X, Y, O) = X \dot{\vee} Y$, $f(X, Y, S_{\tau} Z) = X \dot{\vee} (Y o_{\mu} S_{\tau} Z) =$
 $= X \dot{\vee} S_{\tau+\mu} (Y o_{\mu} Z) = f(X, Y, Z) o_{\nu+\tau+\mu} X$; $\varphi(X, Y, O) = X \dot{\vee} Y$, $\varphi(X, Y, S Z) =$
 $= (X \dot{\vee} Y) o_{\mu} (X \dot{\vee} S_{\tau} Z) = (X \dot{\vee} Y) o_{\mu} [(X \dot{\vee} Z) o_{\tau+\nu} X]$. Nach (4.7) ist dies aber
 gleich $[(X \dot{\vee} Y) o_{\mu} (X \dot{\vee} Z)] o_{\tau+\nu} (o_{\mu} X)$ und dies ist nach (4.6) gleich
 $\varphi(X, Y, Z) o_{\tau+\nu+\mu} X$, w.z.b.w.

$$(4.13) \quad X \dot{\vee} (Y \dot{\mu} Z) = (X \dot{\vee} Y) \dot{\mu} Z,$$

dh. die multiplikative Operationen sind gegeneinander assoziativ.

Beweis. $f(X, Y, O) = O$, $f(X, Y, S_{\tau} Z) = X \dot{\vee} [(Y \dot{\mu} Z) o_{\tau+\mu} Y] =$
 $= f(X, Y, Z) o_{\tau+\mu} (X \dot{\vee} Y)$ nach (4.12) $\varphi(X, Y, O) = O$, $\varphi(X, Y, S_{\tau} Z) =$
 $= \varphi(X, Y, Z) o_{\tau+\mu} (X \dot{\vee} Y)$.

Weil in n -RWA die Kommutativität wegfällt kann man den multiplikativen Operationen $X \dot{\vee} Y$ die dualen $X \vee Y$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, gegenüberstellen durch:

$$(4.14) \quad X \vee O = O,$$

$$X \vee S_{\mu} Y = X o_{\mu+\nu} (X \vee Y), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Um Missverständnisse zu beseitigen, werden wir im weiteren keinen Gebrauch von dualen Operationen machen.

Der klassischen Exponentiation entsprechen in n -RWA n exponentielle Operationen $\exp_{\nu}(X, Y)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, die durch

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \exp_{\nu}(X, O) &= 1, \\ \exp_{\nu}(X, S_{\mu} Y) &= [\exp_{\nu}(X, Y)]^{(\nu+\mu)} X, \quad \mu = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

definiert sind. (Wir sehen von den dualen ab.) Speziell wird $\exp_0(X, Y)$ Exponentiation genannt und mit X^Y bezeichnet:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} X^O &= 1, \\ X^{S_{\mu} Y} &= X^Y \dot{\mu} Y, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Wenn die Anzahl der Nachfolgerfunktionen $S_\nu X$ zu einer einzigen SX herabgesunken wird, reduzieren sich alle lineäre Operationen zur Addition, alle multiplikative zur Multiplikation und alle exponentielle zur Exponentiation.

5. Wir führen auch einige Wortfunktionen ein die meistens keinen Gegenstück in der gewöhnlichen Arithmetik besitzen.

Die Reversion $R(X)$ wird durch

$$(5.1) \quad \begin{aligned} R(O) &= O, \\ R(S_\mu X) &= S_\mu + R(X), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

definiert. Sie kehrt die Reihenfolge der Buchstaben eines jeden Wortes um.

$$(5.5) \quad R(X \circ_\nu Y) = R(\circ_\nu Y) + R(X).$$

Diese Gleichung folgt aus (4.4) und der spezielleren Gleichung

$$(5.2') \quad R(X + Y) = R(Y) + R(X).$$

Beweis. $f(X, O) = R(Y)$, $f(X, S_\tau Y) = S_\tau + f(X, Y)$; $\varphi(X, O) = R(X)$, $\varphi(X, S_\tau Y) = S_\tau + \varphi(X, Y)$.

$$(5.3) \quad R(R(X)) = X,$$

$$(5.4) \quad S_\mu R(X) = R(S_\mu + X),$$

$$(5.5) \quad R(X \dot{\nu} Y) = R(X) \dot{\nu} R(Y).$$

Beweis. $f(X, O) = O$, $f(X, S_\tau Y) = R(X \dot{\nu} S_\tau Y) = R[(X \dot{\nu} Y) \circ_{\tau+\nu} X] =$
 $= R(\circ_{\tau+\nu} X) + f(X, Y)$; $\varphi(X, O) = O$, $\varphi(X, S_\tau Y) = R(X) \dot{\nu} [S_\tau + R(Y)] =$
 $= R(X) \dot{\nu} S_\tau + \varphi(X, Y) = [\circ_{\tau+\nu} R(X)] + \varphi(X, Y)$. Die Behauptung folgt jetzt aus,

$$(5.6) \quad R(\circ_\mu X) = \circ_\mu R(X).$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_\tau X) = R(\circ_\mu S_\tau X) = R[S_{\tau+\mu} \circ_\mu X] = S_{\tau+\mu} + f(X)$;
 $\varphi(O) = O$, $\varphi(S_\tau X) = \circ_\mu [S_\tau + R(X)] = \circ_\mu S_\tau + \circ_\mu R(X)$ nach (4.7). Es ist aber
 $\circ_\mu S_\tau = S_{\tau+\mu}$, so ist $\varphi(S_\tau X) = S_{\tau+\mu} + \varphi(X)$.

Die Funktion $\nu(X)$, Vorläufer des Wortes X , wischt den ersten Buchstaben des Wortes X :

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \nu(O) &= O, \\ \nu(S_\mu X) &= X, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Mit dieser können wir auch die Funktion $l(X)$, die den letzten Buchstaben des Wortes X abwischt, explizite definieren:

$$(5.8) \quad l(X) = R[v(R(X))].$$

Wir werden die Anfangsgleichungen für $l(X)$ erst später anführen können.

Eine der wichtigsten Funktionen der n -RWA, die der Subtraktion in Arithmetik entspricht, ist die Differenz $X \dot{-} Y$. Sie wird durch doppelte Rekursion definiert:

$$(5.9) \quad \begin{cases} X \dot{-} O = X, \\ O \dot{-} S_\mu Y = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \\ S_\mu X \dot{-} S_\tau Y = \begin{cases} X \dot{-} Y & \text{für } \mu = \tau, \\ S_\mu(X \dot{-} Y) & \text{für } \mu \neq \tau, \end{cases} \quad \mu, \tau = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Es gelten:

$$(5.10) \quad O \dot{-} X = O,$$

$$(5.11) \quad X \dot{-} (Y + X) = O,$$

$$(5.12) \quad (Y + X) \dot{-} X = Y,$$

$$(5.13) \quad (Z + X) \dot{-} (Y + X) = Z \dot{-} Y,$$

$$(5.14) \quad X \dot{-} X = O.$$

Die Differenz $X \dot{-} Y$ ist so definiert dass aus X nur diejenigen Buchstaben verwischt werden die identisch sind mit den entsprechenden Buchstaben des Wortes Y , vom Beginn aus gerechnet. Z. B. ist

$$\begin{aligned} & S_0 S_1 S_1 S_0 S_1 \\ \dot{-} & S_1 S_1 S_0 S_0 S_1 S_0 \\ \hline & = S_0 O S_1 O S_1 O O = S_0 S_1 S_1 \end{aligned}$$

Dabei ist irrelevant ob X und Y verschiedene oder gleiche Anzahl von Ziffern besitzen.

Wir werden aber auch eine Operation definieren die von dem Worte X genau so viele Buchstaben abwischt wieviel Buchstaben das Wort Y besitzt. Diese Operation nennen wir Besendifferenz $X \sim Y$ und definieren sie wie folgt:

$$(5.15) \quad X \sim O = X,$$

$$X \sim S_\mu Y = v(X \sim Y), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Sehr leicht beweist man

$$(5.16) \quad O \sim X = O$$

und

$$(5.17) \quad v(S_\mu X \sim Y) = X \sim Y.$$

Diese Gleichungen gestatten uns die Anfangsgleichungen der doppelten Rekursion für $X \sim Y$ zu schreiben:

$$(5.18) \quad \begin{cases} X \sim O = X, \\ O \sim S_\mu Y = O, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \\ S_\mu X \sim S_\tau Y = X \sim Y, \quad \mu, \tau = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Wir betonen dass es möglich ist auch die Differenz $X - Y$ durch primitive Rekursion zu definieren. In Beweisen ist aber diese Definition nicht von grossem Nutzen.

Die Haupteigenschaften der Funktion $X \sim Y$ werden wir erst nach der Einführung der „logischen“ Funktion $\alpha(X)$ besprechen.

Bevor wir diese Funktion einführen wollen wir noch die Funktion $a(X)$, den Anfangsbuchstaben des Wortes X , definieren:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} a(O) &= O, \\ a(S_\tau X) &= S_\tau, \quad \tau = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Diese Funktion ermöglicht uns auch den letzten Buchstaben $L(X)$ des Wortes X zu finden. Es ist

$$(5.20) \quad L(X) = a[R(X)].$$

Die Haupteigenschaften aller dieser Funktionen werden wir nach Einführung der Funktion $\alpha(X)$ besprechen können.

6. Die Funktion $\alpha(X)$ ist durch

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \alpha(O) &= O, \\ \alpha(S_\mu X) &= 1, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

definiert. Wir werden sie im weiteren ständig brauchen. Deswegen wird eine Anzahl von Gleichungen mit dieser Funktion benötigt. Um aber diese Anzahl zu bechränken stellen wir zuerst fest dass betreffs Addition,

Multiplikation, Exponentiation und der beiden Differenzen mit $\alpha(X)$, $\alpha(Y)$, als Argumenten alle Gleichungen der rekursiven Zahlentheorie gelten. Es gelten z.B.

$$(6.2) \quad \alpha(X) + \alpha(Y) = \alpha(Y) + \alpha(X),$$

$$(6.3) \quad [\alpha(X) + \alpha(Y)] \cdot \alpha(Z) = \alpha(X) \cdot \alpha(Z) + \alpha(Y) \cdot \alpha(Z),$$

$$(6.4) \quad \alpha(X) \dot{-} \alpha(Y) = \alpha(X) \sim \alpha(Y),$$

$$(6.5) \quad [\alpha(X) \dot{-} \alpha(Y)] \cdot \alpha(Z) = \alpha(X) \cdot \alpha(Z) \dot{-} \alpha(Y) \cdot \alpha(Z),$$

usw. Im allgemeinen sind Beweise solcher Gleichungen trivial.

Wir heben hervor dass die Funktion $1 \dot{-} \alpha(X)$ auch eine α -Funktion ist, weil

$$(6.6) \quad 1 \dot{-} \alpha(X) = \alpha[1 \dot{-} \alpha(X)]$$

gilt. Deswegen gelten auch für $1 \dot{-} \alpha(X)$ alle Gleichungen (6.2) – (6.5).

Es folgt eine Reihe von notwendigsten Gleichungen:

$$(6.7) \quad \alpha(X) \cdot Y = Y \cdot \alpha(X),$$

$$(6.8) \quad [X \dot{-} Y] \cdot \alpha(Z) = X \cdot \alpha(Z) \dot{-} Y \cdot \alpha(Z),$$

$$(6.9) \quad [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot Y = Y \dot{-} \alpha(X) \cdot Y,$$

$$(6.10) \quad \alpha(X) \dot{-} 1 = O.$$

Ähnliche Gleichungen gelten auch für Besendifferenz.

$$(6.11) \quad 1 \dot{-} [\alpha(X) + \alpha(Y)] = [1 \dot{-} \alpha(X)] \dot{-} \alpha(Y),$$

$$(6.12) \quad \alpha(X) + [1 \dot{-} \alpha(X)] = 1,$$

$$(6.13) \quad X \cdot \alpha(X) = X,$$

$$(6.14) \quad \alpha(\alpha(X)) = \alpha(X),$$

$$(6.15) \quad \alpha(X) \cdot \alpha(X) = \alpha(X),$$

$$(6.16) \quad [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot X = O,$$

$$(6.17) \quad \alpha(X \circ_v Y) = [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot \alpha(Y) + \alpha(X),$$

$$(6.18) \quad \alpha(\circ_v X) = \alpha(X),$$

$$(6.19) \quad \alpha(X \circ_v X) = \alpha(X),$$

$$(6.20) \quad [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot \alpha(X) \cdot \alpha(Y) + \alpha(X) = \\ = [1 \dot{-} \alpha(X) \cdot \alpha(Y)] \cdot \alpha(X) + \alpha(X) \cdot \alpha(Y) = \alpha(X),$$

$$(6.21) \quad \alpha(X \cdot Y) = \alpha(X) \cdot \alpha(Y),$$

$$(6.22) \quad 1 \dot{-} \alpha(X \circ_v Y) = [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)],$$

$$(6.23) \quad \{1 \dot{-} [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot \alpha(Y)\} \cdot \alpha(Y) \cdot [1 \dot{-} \alpha(X)] = O,$$

$$(6.24) \quad 1 \dot{-} [1 \dot{-} \alpha(X)] = \alpha(X).$$

Um nichttriviale Gleichungen anführen zu können, definieren wir die quasisymmetrische Differenz $|X, Y|$ explizite durch

$$(6.25) \quad |X, Y| = (X \dot{-} Y) + (Y \dot{-} X).$$

$|X, Y|$ ist nicht kommutativ, aber wegen (6.2) und (6.7) gilt doch

$$(6.26) \quad \alpha(|X, Y|) = \alpha(|Y, X|).$$

$$(6.27) \quad \{1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)\} = 1 \dot{-} \alpha(|X, Y|).$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] &= \\ = [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] [1 \dot{-} \alpha\{(X \dot{-} Y) + (Y \dot{-} X)\}] &= \\ = [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y \dot{-} X)] &= \\ = [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y \dot{-} X)] = 1 \dot{-} \alpha(|X, Y|). \end{aligned}$$

Es gilt auch

$$(6.27') \quad \{1 \dot{-} \alpha(Y \dot{-} X)\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)\} = 1 \dot{-} \alpha(|X, Y|).$$

$$(6.28) \quad [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot f(X + Y) = [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot f(Y).$$

Beweis. Rekursion nach X . Spezialfall:

$$(6.28') \quad [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot f(X) = [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot f(O).$$

$$(6.29) \quad [1 \dot{-} \alpha(U)] \cdot f(Y) = [1 \dot{-} \alpha(U)] \cdot f\{[1 \dot{-} \alpha(U)] \cdot Y\}.$$

$$(6.30) \quad [1 \dot{-} \alpha(V)] \cdot f(X) = [1 \dot{-} \alpha(V)] \cdot f\{[1 \dot{-} \alpha(V)] \cdot (V + X)\}.$$

$$(6.31) \quad [1 \dot{-} \alpha(U + V)] \cdot f(Y) = [1 \dot{-} \alpha(U + V)] \cdot f\{[1 \dot{-} \alpha(U + V)] \cdot Y\}.$$

$$(6.32) \quad [1 \dot{-} \alpha(U + V)] \cdot f(X) = [1 \dot{-} \alpha(U + V)] \cdot f\{[1 \dot{-} \alpha(U + V)] \cdot (V + X)\}.$$

Beweis für die zwei letzten Gleichungen werden durch Rekursion nach U bzw. V geführt unter Benutzung der zwei vorletzten Gleichungen. Durch doppelte Rekursion kann man leicht

$$(6.33) \quad [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] \cdot Y = [1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)] \cdot [(Y \dot{-} X) + X]$$

beweisen. Daraus und aus (6,27') folgt

$$(6.34) \quad [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot Y = [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot [(Y \dot{-} X) + X].$$

Wenn man jetzt in (6.31) und (6.32) $U = X \dot{-} Y$ und $V = Y \dot{-} X$ setzt so sind die rechten Seiten, auf Grund von (6.34), einander gleich. So folgt die grundlegende Gleichung

$$(6.35) \quad [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot f(X) = [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot f(Y).$$

Natürlich kann in (6.35) f noch von mehreren Parameter abhängen, etwa $f(X, X_1, \dots, X_m)$ sein.

Multipliziert man (6.35) beiderseits mit $1 \dot{-} \alpha[f(X)]$, folgt wegen (6.16)

$$(6.36) \quad [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot [1 \dot{-} \alpha[f(X)]] \cdot f(Y) = 0.$$

Die Gleichungen (6.35) resp. (6.36) gelten auch mit $\alpha(f(X))$, $\alpha(f(Y))$ resp. $\alpha(f(Y))$ anstatt $f(X)$, $f(Y)$ resp. $f(Y)$.

7. Den Begriff der Beweisschemen nehmen wir als bekannt an. Nach (5.12) gilt dann

$$(7.1) \quad \frac{X + Y = 0}{X = 0} \quad \text{und} \quad \frac{X + Y = 0}{Y = 0}.$$

Wir beweisen jetzt

$$(7.2) \quad \frac{|X, Y| = 0}{X = Y} \quad \text{und} \quad \frac{X = Y}{|X, Y| = 0}.$$

Beweis. Das zweite Beweisschema ist trivial. Das erste folgt aus (6.34) und der Tatsache dass $|X, Y| = 0$, $Y \dot{-} X = 0$ nach sich zieht.

Das Schema (7.2) gibt uns ein rekursives Kriterium der Gleichheit :

$$(7.3) \quad X = Y \text{ gilt dann und nur dann wenn } |X, Y| = 0.$$

Also werden alle unsere Gleichungen die Form $f(X_1, \dots, X_m) = 0$ haben.

$$(7.4) \quad \frac{\alpha(X) = 0}{X = 0} \quad \text{und} \quad \frac{X = 0}{\alpha(X) = 0}.$$

Beweis. Aus (6.13) und der Definition von $\alpha(X)$.

$$(7.5) \quad \frac{X \cdot Y = 0}{\alpha(X) \cdot Y = 0} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha(X) \cdot Y = 0}{X \cdot Y = 0}.$$

Beweis. [2] Eq. 2.935.

(7.5) werden wir im weiteren, besonders bei der Einführung von logischen Konstanten, ohne explizite Berufung benutzen.

$$(7.6) \quad \frac{[1 \dot{-} (X)] \cdot \alpha(Y) \cdot Z = O}{[1 \dot{-} \alpha(X) \cdot \alpha(Y)] \cdot \alpha(Y) \cdot Z = O}$$

Beweis. [2] Ex. 2.471, leicht modifiziert.

Das Schema

$$(7.7) \quad \frac{f(O) = O}{\{1 \dot{-} \alpha[f(X)]\} \cdot f(S_\mu X) = O, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1} \\ f(X) = O$$

stellt das Prinzip der totalen Induktion dar und wird ähnlich wie das entsprechende Schema in [2] Seite 35 bewiesen. Nur soll man dort $g(X)$ durch $g(O) = 1$, $g(S_\mu X) = g(X) \cdot \{1 \dot{-} \alpha[f(X)]\}$, $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ definieren, und anstatt einer Funktion $h(X) = g(SX)$, n Funktionen $h_\nu(X) = g(S_\nu X)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, einführen.

Wir erwähnen noch

$$(7.8) \quad \frac{[1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot Y = O}{[1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot Z = O} \\ [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot Z = O$$

und

$$(7.9) \quad \frac{\alpha(X) = O}{[1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot Y = O} \\ Y = O$$

8. Es folgen jetzt einige Gleichungen über Besendifferenz. Wir beginnen mit zwei Gleichungen über $\alpha(X)$:

$$(8.1) \quad [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot \alpha(\nu(X)) = O,$$

$$(8.2) \quad \alpha(R(X)) = \alpha(X).$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_r X) = \alpha(S_r + R(X)) = [1 \dot{-} \alpha(S_r)] \cdot f(X) + \alpha(S_r) = 1$.

$$(8.3) \quad \alpha(S_r X \sim Y) = \alpha(S_\mu X \sim Y),$$

$$(8.4) \quad \alpha(S_\mu + X) = 1,$$

$$(8.5) \quad (S_\mu + X) \sim Y = \alpha(S_\mu X \sim Y) \cdot S_\mu + (X \sim Y).$$

Beweis durch doppelte Rekursion: $f(X, O) = S_\mu + X$,
 $f(O, S_\tau Y) = S_\mu \sim S_\tau Y = O$, $f(S_\tau X, S_\varepsilon Y) = f(X, Y)$, $\varphi(X, O) = S_\mu + X$,
 $\varphi(O, S_\tau Y) = \alpha(S_\mu \sim S_\tau Y) \cdot S_\mu + O = \alpha(O) \cdot S_\mu = O$,
 $\varphi(S_\tau X, S_\varepsilon Y) = \alpha(S_\mu S_\tau X \sim S_\tau Y) \cdot S_\mu + (S_\tau X \sim S_\varepsilon Y) =$
 $= S_\mu \cdot (\alpha[S_\tau X \sim S_\tau Y]) + (X \sim Y) = \varphi(X, Y)$ nach (8.3).

$$(8.6) \quad X \sim S_\mu Y = X \sim (S_\mu + Y).$$

Beweis. $f(X, O) = X \sim S_\mu$, $f(X, S_\tau Y) = v(v(X \sim Y)) =$
 $= v(X \sim S_\mu Y) = v(f(X, Y))$; $\varphi(X, O) = X \sim S_\mu$, $\varphi(X, S_\tau Y) = v(\varphi(X, Y))$.

$$(8.7) \quad X \sim R(Y) = X \sim Y.$$

Beweis. $f(X, O) = X$, $f(X, S_\tau Y) = X \sim [S_\tau + R(Y)] = v(f(X, Y))$
 nach (8.6).

Folgerungen:

$$(8.7') \quad X \sim R(X) = O,$$

$$(8.7'') \quad R(X) \sim X = O.$$

$$(8.8) \quad \alpha(S_\mu R(X) \sim X) = 1.$$

Beweis. $f(O) = \alpha(S_\mu) = 1$, $f(S_\tau X) = \alpha\{S_\mu R(S_\tau X) \sim S_\tau X\} =$
 $= \alpha[R(S_\tau X) \sim X] = \alpha\{[S_\tau + R(X)] \sim X\}$. Nach (8.5) hat man jetzt
 $f(S_\tau X) = \alpha\{S_\tau \cdot \alpha(S_\tau R(X) \sim X) + [R(X) \sim X]\} = \alpha(S_\tau) \cdot \alpha(S_\tau R(X) \sim X) =$
 $= \alpha(S_\tau R(X) \sim X) = f(X)$ nach (8.3). Dieselbe Anfangsgleichungen
 erfüllt $\varphi(X) = 1$.

$$(8.9) \quad \alpha\{S_\mu R(X) \sim R(X \sim Y)\} = 1.$$

Beweis. $f(X, Y) = \alpha\{S_\mu R(X) \sim (X \sim Y)\}$ nach (8.7). Also $f(X, O) =$
 $= \alpha\{S_\mu R(X) \sim X\} = 1$ nach (8.8). Weiter ist $f(O, S_\tau Y) = \alpha(S_\mu) = 1$ und
 $f(S_\tau X, S_\varepsilon Y) = \alpha\{S_\mu R(S_\tau X) \sim (X \sim Y)\} = \alpha\{[S_\tau + R(X) + S_\mu] \sim (X \sim Y)\} =$
 $= \alpha\{S_\tau \cdot \alpha(S_\tau [R(X) + S_\mu] \sim (X \sim Y)) + [S_\mu R(X) \sim (X \sim Y)]\}$ nach (8.5), und
 wiederum nach (8.3)

$$f(S_\tau X, S_\varepsilon Y) = \alpha\{S_\tau \cdot \alpha[S_\mu (S_\mu R(X)) \sim (X \sim Y)] + [S_\mu R(X) \sim (X \sim Y)]\}.$$

Weil $\alpha(V+W) = \alpha(W+V)$ folgt jetzt nach (6.17) und (6.21)

$$f(S_\tau X, S_\varepsilon Y) = \{1 \sim \alpha(f(X, Y))\} \cdot \alpha[S_\mu S_\mu R(X) \sim (X \sim Y)] + f(X, Y).$$

Dieselbe Anfangsgleichungen erfüllt aber auch $\varphi(X, Y) = 1$.

$$(8.10) \quad R\{[S_\mu + R(X)] \sim (X \sim Y)\} = S_\mu R\{R(X) \sim (X \sim Y)\}.$$

Beweis. Nach (8.5) ist

$$\begin{aligned} [S_\mu + R(X)] \sim (X \sim Y) &= \{\alpha(S_\mu R(X) \sim (X \sim Y))\} \cdot S_\mu + \{R(X) \sim (X \sim Y)\} = \\ &= S_\mu + \{R(X) \sim (X \sim Y)\} \text{ nach (8.9). Weil } R(S_\mu) = S_\mu \text{ folgt nach (5.2')} \\ &\text{die Behauptung.} \end{aligned}$$

$$(8.11) \quad (X \sim Y) + R\{R(X) \sim (X \sim Y)\} = X.$$

Beweis. $f(X, O) = X$, $f(O, S_\tau Y) = O$, $f(S_\tau X, S_\mu Y) = (X \sim Y) + R\{[S_\tau + R(X)] \sim (X \sim Y)\} = S_\tau f(X, Y)$ nach (8.10).

Es folgt dass $M(X, Y) = R\{R(X) \sim (X \sim Y)\}$ genau das Wort ist das vom Beginn des Wortes X durch Besendifferenz mit dem Wort Y abgewischt ist. Man kann auch leicht Anfangsgleichungen für $M(X, Y)$ anführen:

$$(8.12) \quad \begin{aligned} M(X, O) &= O, \\ M(O, S_\tau Y) &= O, \quad \tau = 0, 1, \dots, n-1, \\ M(S_\tau X, S_\mu Y) &= S_\mu M(X, Y), \quad \mu, \tau = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Daraus beweist man leicht

$$(8.13) \quad X \dot{-} Y = (X \sim Y) + [M(X, Y) \dot{-} Y].$$

Später werden wir folgende Gleichungen benötigen:

$$(8.14) \quad X \sim (Y+Z) = (X \sim Y) \sim Z,$$

$$(8.15) \quad X \sim v(Y) = (S_\mu X \sim Y) \cdot \alpha(Y) + [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot X,$$

$$(8.16) \quad \alpha(R(X) \sim Y) = \alpha(X \sim Y).$$

Beweis. $f(X, O) = \alpha(R(X)) = \alpha(X)$ nach (8.2).

$f(O, S_\tau Y) = O$, $f(S_\mu X, S_\tau Y) = \alpha\{[S_\mu + R(X)] \sim S_\tau Y\} = \alpha\{S_\mu \cdot \alpha[S_\mu R(X) \sim S_\tau Y] + [R(X) \sim S_\tau Y]\}$ nach (8.5). Also ist $f(S_\mu X, S_\tau Y) = \alpha\{S_\mu \cdot \alpha[R(X) \sim Y] + v[R(X) \sim Y]\}$ und nach (6.17) $f(S_\mu X, S_\tau Y) = \{1 \dot{-} \alpha[R(X) \sim Y]\} \cdot \alpha(v[R(X) \sim Y]) + \alpha[R(X) \sim Y]$. Nach (8.1) ist der erste Summand O , also $f(S_\mu X, S_\tau Y) = f(X, Y)$. Dieselbe Anfangsgleichungen besitzt $\varphi(X, Y) = \alpha(X \sim Y)$.

Folgerungen sind

$$(8.17) \quad \alpha(R(X) \sim R(Y)) = \alpha(X \sim Y)$$

und

$$(8.18) \quad [1 \dot{-} \alpha(X \sim Y)] \cdot \alpha(R(X) \sim R(Y)) = O.$$

$$(8.19) \quad X \sim S_\mu Y = v(X) \sim Y.$$

Folgerungen:

$$(8.19') \quad v(X \sim Y) = v(X) \sim Y.$$

$$(8.19'') \quad v(S_\mu X \sim Y) = X \sim Y.$$

$$(8.19''') \quad v(S_\tau \sim X) = O.$$

$$(8.20) \quad S_\mu X \sim Y = [X \sim v(Y)] \cdot \alpha(Y) + [1 \sim \alpha(Y)] \cdot S_\mu X.$$

$$(8.21) \quad Y \sim v(S_\tau + X) = Y \sim X.$$

$$(8.22) \quad Y \sim (S_\tau + X) = v(Y \sim X).$$

$$(8.23) \quad S_\tau \sim (S_\nu + X) = O.$$

$$(8.24) \quad Z \sim [(S_\tau + X) \sim (S_\nu + Y)] = Z \sim (X \sim Y).$$

Beweis. $f(Z, X, O) = Z \sim [(S_\tau + X) \sim S_\nu] = Z \sim v(S_\tau + X) = Z \sim X$ nach (8.22) und (8.21). $f(Z, O, S_\nu Y) = Z$ nach (8.23). $f(Z, S_\mu X, S_\nu Y) = f(Z, X, Y)$. $\varphi(Z, X, O) = Z \sim X$, $\varphi(Z, O, S_\mu Y) = Z$, $\varphi(Z, S_\mu X, S_\nu Y) = \varphi(Z, X, Y)$.

Mit Hilfe von (8.24) beweist man jetzt leicht durch Doppelrekursion

$$(8.25) \quad Z \sim [R(X) \sim R(Y)] = Z \sim (X \sim Y).$$

Jetzt geben wir an einige Gleichungen die die gewöhnliche und Besendifferenz verbinden. Zuerst bemerken wir dass

$$(8.26) \quad \alpha(X) \cdot v(X) = v(X)$$

und

$$(8.27) \quad v(\lambda + Y) = [X + v(Y)] \cdot \alpha(Y) + [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot v(X).$$

$$(8.28) \quad [1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} V)] \cdot \alpha(|V \dot{-} U, V \sim U|) = O.$$

Beweis. $f(U, O) = O$ weil $\alpha(O) = O$. $f(O, S_\mu V) = \alpha(|S_\mu V, S_\mu V|) = O$. $f(S_\mu U, S_\tau V) = f(U, V)$ für $\mu = \tau$ und $= O$ für $\mu \neq \tau$. Dieselbe Anfangsgleichungen besitzt auch $\varphi(U, V) = O$.

$$(8.29) \quad [1 \dot{-} \alpha(|V \dot{-} U, V \sim U|)] \cdot \alpha(V) \cdot \alpha(U \dot{-} V) = O,$$

$$(8.30) \quad [1 \dot{-} \alpha(|V + U, W + U|)] \alpha(|V, W|) = O.$$

Folgerung:

$$(8.30') \quad \frac{Y+Z=X+Z}{Y=X}.$$

Im weiteren werden wir oft die folgende Gleichung benutzen:

$$(8.31) \quad f(X_1, \dots, X_m, \alpha(U)) = f(X_1, \dots, X_m, O) [1 \dot{-} \alpha(U)] + \\ + f(X_1, \dots, X_m, 1) \cdot \alpha(U).$$

Diese Gleichung ermöglicht uns die Funktion α , sei sie auch von mehreren Parametern abhängig, aus einer Funktion ins Äussere zu tragen. So gilt z.B. (und wird später benutzt)

$$(8.32) \quad A \cdot [1 \dot{-} \alpha(X)] + B \cdot \alpha(X) + R \{C \sim [A \cdot \{1 \dot{-} \alpha(X)\} + B \cdot \alpha(X)]\} = \\ = \{A + R(C \sim A)\} \cdot [1 \dot{-} \alpha(X)] + \{B + R(C \sim B)\} \cdot \alpha(X),$$

mögen auch A, B, C noch von X abhängen.

$$(8.33) \quad Y \cdot [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] + X \cdot \alpha(|X, Y|) = X.$$

Beweis. Nach (6.35) und (6.12).

9. Wir führen jetzt die Prädikate „ Y beginnt mit X “, „ X ist kleiner oder gleich Y “ und „ X ist kleiner als Y “ ein.

$$(9.1) \quad X \triangleleft Y \text{ steht für die Gleichung } Y = (Y \dot{-} X) + X.$$

$X \triangleleft Y$ wird gelesen: „Das Wort Y beginnt mit dem Worte X “.

$$(9.2) \quad \frac{X \triangleleft Y}{X \dot{-} Y = O} \quad \text{und} \quad \frac{X \dot{-} Y = O}{X \triangleleft Y},$$

also; $X \dot{-} Y = O$ ist notwendig und hinreichend für $X \triangleleft Y$.

Beweis. Aus $X \triangleleft Y$ d. h. $Y = (Y \dot{-} X) + Y$ folgt $X \dot{-} Y = X \dot{-} \{(Y \dot{-} X) + X\} = O$ nach (5.11). Aus $X \dot{-} Y = O$ folgt nach (6.33) $Y = (Y \dot{-} X) + X$, also $X \triangleleft Y$.

$$(9.3) \quad X \leq Y \text{ steht für } R(X) \triangleleft R(Y) \text{ d. h. für } R(Y) = [R(Y) \dot{-} R(X)] + R(X).$$

$X \leq Y$ wird gelesen: „Das Wort X ist kleiner von oder gleich dem Worte Y “. Alle Wörter, die auf der Faser die X mit O verbindet liegen, sind $\leq X$.

Aus (9.2) folgt

$$(9.4) \quad \frac{X \leq Y}{R(X) \dot{-} R(Y) = O} \quad \text{und} \quad \frac{R(X) \dot{-} R(Y) = O}{X \leq Y}.$$

Also ist $R(X) \dot{-} R(Y) = O$ notwendig und hinreichend für $X \leq Y$. Diese Bedingung ist aber manchmal unbrauchbar. Wir werden später eine andere finden.

$$(9.5) \quad X \leq X + Y, \quad \text{speziell} \quad X \leq S_v X.$$

Beweis. Man soll $R(X + Y) = [R(X + Y) \dot{-} R(X)] + R(X)$ beweisen. Nach (5.2') ist aber $R(X + Y) \dot{-} R(X) = [R(Y) + R(X)] \dot{-} R(X) = R(Y)$ nach (5.12). Also ist $[R(X + Y) \dot{-} R(X)] + R(X) = R(Y) + R(X) = R(X + Y)$.

Es gilt aber nicht $X \leq Y + X$:

$$(9.6) \quad \frac{\begin{array}{l} X \leq Y \\ Y \leq Z \\ \hline X \leq Z \end{array}}{X \leq Z}.$$

Beweis. Weil $R(Z) = [R(Z) \dot{-} R(Y)] + R(Y)$ und $R(Y) = [R(Y) \dot{-} R(X)] + R(X)$ ist $R(X) \dot{-} R(Z) = R(X) \dot{-} \{[R(Z) \dot{-} R(Y)] + [R(Y) \dot{-} R(X)] + R(X)\} = O$ nach (5.11'), also $X \leq Z$.

$$(9.7) \quad \frac{X \leq Y}{Z + X \leq Z + Y}.$$

Beweis. $R(Z + X) \dot{-} R(Z + Y) = \{R(X) + R(Z)\} \dot{-} \{R(Y) + R(Z)\} = R(X) \dot{-} R(Y) = O$.

Aus $X \leq Y$ aber kann man nicht $X + Z \leq Y + Z$ schliessen. Es können nämlich diese überhaupt auf verschiedenen Fasern liegen.

In umgekehrter Reihenfolge beweist man

$$(9.8) \quad \frac{Z + X \leq Z + Y}{X \leq Y}.$$

Endlich wollen wir noch den Begriff „kleiner“ einführen:

$$(9.9) \quad X < Y \text{ steht für die Gleichung } [R(X) \dot{-} R(v(Y))] + [1 \dot{-} \alpha(Y)] = O'$$

Das zusätzliche Glied $1 \dot{-} \alpha(Y)$ stellt die Bedingung $Y \neq O$, sonst hätte man $O < O$.

Also ist $X < Y$ äquivalent mit „ $X \leq v(Y)$ und $Y \neq O$ “. Wir beweisen jetzt

$$(9.10) \quad [1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} V)] \cdot \alpha[U \dot{-} (S_\mu + V)] = O.$$

Beweis. $f(U, O) = [1 \dot{-} \alpha(U)] \cdot \alpha(U \dot{-} S_\mu) = O$, $f(O, S_\tau V) = O$,
 $f(S_\tau U, S_\varepsilon V) = f(U, V)$ für $\tau = \varepsilon$ und $= O$ für $\tau \neq \varepsilon$.

Mit $U = R(X)$, $V = R(Y)$ geht die Gl. (9.10) in

$$(9.10') \quad [1 \dot{-} \alpha[R(X) \dot{-} R(Y)]] \cdot \alpha[R(X) \dot{-} R(S_\mu Y)] = O$$

über.

$$(9.11) \quad 1 \dot{-} \alpha\{[R(X) \dot{-} R(v(Y))] + [1 \dot{-} \alpha(Y)]\} \cdot \alpha\{R(X) \dot{-} R(Y)\} = O$$

Beweis. Wegen (6.22) und (6.24) ist die obige Gleichung

$$(9.11') \quad \{1 \dot{-} \alpha\{R(X) \dot{-} R(v(Y))\}\} \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha\{R(X) \dot{-} R(Y)\} = O.$$

Jetzt ist $f(X, O) = O$ und $f(X, S_\tau Y) = (1 \dot{-} \alpha[R(X) \dot{-} R(Y)]) \cdot \alpha(R(X) \dot{-} R(S_\tau Y)) = O$ nach (9.10'),

Aus (9.11) folgt

$$(9.12) \quad \frac{X < Y}{X \leq Y}.$$

$$(9.13) \quad [1 \dot{-} \alpha(|Y, (Y \dot{-} X) + X|)] \cdot \alpha(X \dot{-} Y) = O.$$

Beweis. $f(X, O) = [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot \alpha(X) = O$, $f(O, S_\tau Y) = O$, $f(S_\mu X, S_\tau Y) = f(X, Y)$ für $\mu = \tau$, $= O$ für $\tau \neq \mu$, weil in diesem letzten Fall

$$\begin{aligned} \{S_\tau Y \dot{-} [(S_\tau Y \dot{-} S_\mu X) + S_\mu X]\} + \{[(S_\tau Y \dot{-} S_\mu X) + S_\mu X] \dot{-} S_\tau Y\} = \\ = S_\mu (\{S_\tau Y \dot{-} [(S_\tau Y \dot{-} S_\mu X) + S_\mu X]\} + \{[(S_\tau Y \dot{-} S_\mu X) + X] \dot{-} Y\}) \end{aligned}$$

und α davon gleich 1 ist.

$$(9.14) \quad \{1 \dot{-} \alpha(X \dot{-} Y)\} \cdot \alpha(|Y, (Y \dot{-} X) + X|) = O.$$

Beweis durch doppelte Rekursion, ähnlich (9.13).

Wir werden andere Eigenschaften angeführter Prädikate erst nach Einführung von logischen Konstanten besprechen.

10. In dieser Abteilung definieren wir natürliche Zahlen. Wir beginnen mit einer Funktion, dem „Sternprodukte“, die dazu notwendig erscheint.

$$(10.1) \quad \begin{aligned} X * O &= O, \\ X * S_\nu Y &= X + (X * Y), \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Auch Sternprodukt ist nicht kommutativ. Wir führen einige seiner Eigenschaften an:

$$(10.2) \quad O * X = O,$$

$$(10.3) \quad X * Y + X = X + X * Y,$$

$$(10.4) \quad X * (Y + Z) = X * Y + X * Z,$$

und allgemeiner

$$(10.4) \quad X * (Y o_\nu Z) = X * Y + X * Z.$$

Distributivität von rechts gilt aber nicht.

$$(10.5) \quad X * Y + X * Z = X * Z + X * Y.$$

$$(10.6) \quad (X * Y) * Z = X * (Y * Z).$$

Mittels Sternprodukt definieren wir n Funktionen $s_\nu(X)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ explizite durch

$$(10.7) \quad s_\nu(X) = S_\nu * X.$$

Ihre Anfangsgleichungen sind

$$(10.8) \quad \begin{aligned} s_\nu(O) &= O, \\ s_\nu(S_\mu X) &= S_\nu + s_\nu(X), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Die Funktion $s_\nu(X)$ verwandelt jeden Buchstaben des Wortes X in den Buchstaben S_ν . Z.B. $s_\nu(S_a S_b S_c) = S_\nu S_\nu S_\nu$. Also bewirkt $s_\nu(X)$ eine „horizontale“ Projektion des Wortes X auf die S_ν -Axe.

$$(10.9) \quad s_\nu(X) + S_\nu = S_\nu + s_\nu(X).$$

(nicht aber für S_μ mit $\mu \neq \nu$).

$$(10.10) \quad s_\nu(X o_\mu Y) = s_\nu(X + Y).$$

Beweis. $f(X, O) = s_\nu(X)$, $f(X, S_\tau Y) = s_\nu(S_{\tau+\mu}(X o_\mu Y)) = S_\nu + f(X, Y)$;
 $\varphi(X, O) = O$, $\varphi(X, S_\tau Y) = S_\nu + \varphi(X, Y)$.

$$(10.11) \quad s_\nu(X + Y) = s_\nu(X) + s_\nu(Y),$$

also

$$(10.12) \quad s_\nu(X \circ_\mu Y) = s_\nu(X) + s_\nu(Y).$$

Sehr leicht beweist man:

$$(10.13) \quad s_\nu(X) + s_\nu(Y) = s_\nu(Y) + s_\nu(X),$$

$$(10.14) \quad s_\nu(X \dot{\mu} Y) = s_\nu(X \cdot Y).$$

Beweis. $f(X, O) = O$, $f(X, S_\tau Y) = s_\nu[(X \dot{\mu} Y) \circ_{\tau+\mu} X] = f(X, Y) + s_\nu(X)$
 nach (10.12). $\varphi(X, O) = O$, $\varphi(X, S_\tau Y) = s_\nu[(X \cdot Y) \circ_\tau X] = \varphi(X, Y) + s_\nu(X)$
 nach (10.12).

$$(10.15) \quad s_\nu(S_\mu X) = S_\nu(s_\nu(X)).$$

Beweis aus (10.9).

$$(10.16) \quad s_\nu(X) \dot{-} s_\mu(X) = \begin{cases} O & \text{für } \nu = \mu \\ s_\nu(X) & \text{für } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_\tau X) = S_\nu s_\nu(X) \dot{-} S_\mu s_\mu(X)$ nach (10.15), also für $\mu = \nu$, $f(S_\tau X) = f(X)$ und für $\mu \neq \nu$, $f(S_\tau X) = S_\nu f(X)$.

$$(10.17) \quad o_\nu[s_\nu(X) + s_\nu(Y)] = o_\nu s_\nu(X) + o_\nu s_\nu(Y).$$

Beweis. $f(X, O) = o_\nu s_\nu(X)$, $f(X, S_\tau Y) = o_\nu[s_\nu(X) + S_\nu s_\nu(Y)] =$
 $= S_{\nu+\nu} f(X, Y)$; $\varphi(X, O) = o_\nu s_\nu(X)$, $\varphi(X, S_\tau Y) = o_\nu s_\nu(X) + S_{\nu+\nu} o_\nu s_\nu(Y) =$
 $= S_{\nu+\nu} \varphi(X, Y)$.

$$(10.18) \quad o_\nu s_\nu(X) + s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) = s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) + o_\nu s_\nu(X).$$

Beweis. $f(X, Y, O) = o_\nu s_\nu(X)$, $f(X, Y, S_\tau Z) = o_\nu s_\nu(X) + s_\nu(Y) \cdot S_\nu s_\nu(Z)$
 $= o_\nu s_\nu(X) + s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) + o_\nu s_\nu(Y) = f(X, Y, Z) + o_\nu s_\nu(Y)$.
 $\varphi(X, Y, O) = o_\nu s_\nu(X)$, $\varphi(X, Y, S_\tau Z) = s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) + o_\nu s_\nu(Y) + o_\nu s_\nu(X) =$
 $= s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) + o_\nu[s_\nu(Y) + s_\nu(X)]$ nach (10.17). Weiter ist $\varphi(X, Y, S_\tau Z) =$
 $= s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) + o_\nu[s_\nu(X) + s_\nu(Y)]$ nach (10.13) und wieder nach (10.17)
 $\varphi(X, Y, S_\tau Z) = \varphi(X, Y, Z) + o_\nu s_\nu(Y)$.

$$(10.19) \quad \{s_\nu(X) + s_\nu(Y)\} \cdot s_\nu(Z) = s_\nu(X) \cdot s_\nu(Z) + s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z),$$

also gilt für s_ν das rechte Distributivitätsgesetz.

Beweis. $f(X, Y, O) = O$, $f(X, Y, S_\tau Z) = f(X, Y, Z) + o_\nu\{s_\nu(X) + s_\nu(Y)\}$;
 $\varphi(X, Y, O) = O$, $\varphi(X, Y, S_\tau Z) = s_\nu(X) \cdot s_\nu(Z) + o_\nu s_\nu(X) + s_\nu(Y) \cdot s_\nu(Z) +$
 $+ o_\nu s_\nu(Y) = \varphi(X, Y) + o_\nu\{s_\nu(X) + s_\nu(Y)\}$ nach (10.18).

$$(10.20) \quad S_v \cdot s_v(X) = s_v(X) \cdot S_v.$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_\tau X) = f(X) + o_v S_v$; $\varphi(O) = O$, $\varphi(S_\tau X) = [s_v(X) + S_v] \cdot S_v = \varphi(X) + S_v \cdot S_v = \varphi(X) + o_v S_v$.

$$(10.21) \quad s_v(X) \cdot s_v(Y) = s_v(Y) \cdot s_v(X),$$

also gilt für diese Multiplikation das kommutative Gesetz.

Beweis. $f(X, O) = O$, $f(X, S_\tau Y) = f(X, Y) + o_v(s_v(X))$; $\varphi(X, O) = O$, $\varphi(X, S_\tau Y) = [S_v + s_v(Y)] \cdot s_v(X) = [s_v(S_v) + s_v(Y)] \cdot s_v(X) = [s_v(Y) + s_v(S_v)] \cdot s_v(X) = \varphi(X, Y) + o_v s_v(X)$ nach (10.20).

$$(10.22) \quad s_v(X) \sim s_\mu(X) = O.$$

$$(10.22') \quad s_v(X) \dot{-} s_v(Y) = s_v(X \sim Y).$$

Wir betrachten jetzt speziell die Funktion $s_0(X)$ und definieren:

„ X ist eine natürliche Zahl“ steht für die Gleichung $X = s_0(X)$.

Aus (10.11) folgt:

(10.23) Die Summe zweier natürlichen Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Wir beweisen jetzt:

$$(10.24) \quad s_0(X) \cdot s_0(Y) = s_0(X \cdot Y).$$

Beweis. $f(X, O) = O$, $f(X, S_\tau Y) = s_0(X) + f(X, Y)$; $\varphi(X, O) = O$, $\varphi(X, S_\tau Y) = s_0(X \cdot Y + X) = s_0(X) + \varphi(X, Y)$.

Also folgt:

(10.25) Das Produkt von natürlichen Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Man beweist leicht:

(10.26) Wenn X und Y natürliche Zahlen sind dann gilt

$$X \dot{-} Y = X \sim Y = s_0(X \dot{-} Y) = s_0(X \sim Y).$$

also:

(10.26') Gewöhnliche und Besendifferenz fallen für natürliche Zahlen zusammen und ergeben wieder eine natürliche Zahl.

$$(10.27) \quad s_0(s_0(X)) = s_0(X).$$

$$(10.28) \quad [s_0(X)]^{s_0(Y)} = s_0(X^Y).$$

Beweis. $f(X, O) = 1$, $f(X, S_\tau Y) = f(X, Y) \cdot s_0(X)$; $\varphi(X, O) = 1$,
 $\varphi(X, S_\tau Y) = s_0(X^Y \dot{\tau} X) = s_0(X^Y \cdot X) = \varphi(X, Y) \cdot s_0(X)$.

Also:

(10.28') *Wenn X und Y natürliche Zahlen sind, ist X^Y wieder eine natürliche Zahl.*

Wir beweisen noch

$$(10.29) \quad s_0(\exp_\nu(X, Y)) = s_0(X)^{s_0(Y)} = s_0(X^Y).$$

Beweis. Ähnlich (10.28).

$$(10.30) \quad R(s_0(X)) = s_0(X),$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_\tau X) = R[S_0 + s_0(X)] = R[s_0(X)] + S_0 = S_0 f(X)$.
 Dieselbe Anfangsgleichung besitzt $\varphi(X) = s_0(X)$.

$$(10.31) \quad S_\tau \cdot [s_0(X) + S_0] = S_\tau \cdot s_0(X) + S_\tau.$$

$$(10.32) \quad S_\tau \cdot s_0(X) = s_\tau(X).$$

Aus den angeführten Gleichungen folgt dass, betreffs Addition, Multiplikation, Differenz und Exponentiation die natürliche Zahlen genau den Gesetzen der rekursiven Zahlentheorie gehorchen. Rekursive Zahlentheorie erscheint so als ein partielles System der n -RWA und ist in ihr enthalten. Wir können deswegen die Relationen zwischen natürlichen Zahlen uneingeschränkt aus der rekursiven Zahlentheorie borgen.

11. Vor Einführung der logischen Konstanten wollen wir noch einige Gleichungen über die Funktionen $\nu(X)$, $l(X)$, $\alpha(X)$ und $L(X)$ aus dem Punkte 5. anführen und auch Σ und Π definieren.

$$(11.1) \quad \nu(S_\mu + X) = [S_\mu + \nu(X)] \cdot \alpha(X) = S_\mu \cdot \alpha(X) + \nu(X).$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_\tau X) = S_\mu + X$; $\varphi(O) = O$, $\varphi(S_\tau X) = S_\mu + X$.

$$l(O) = O,$$

$$(11.2) \quad l(S_\tau X) = [S_\tau l(X)] \cdot \alpha(X).$$

Beweis. $l(S_\tau X) = R[v\{R(S_\tau X)\}] = R[v\{S_\tau + R(X)\}] = R[\{S_\tau + v(R(X))\}] \cdot \alpha(R(X)) = R[S_\tau + v(R(X))] \cdot R(\alpha(X)) = [R(v(R(X))) + S_\tau] \cdot \alpha(X) = [S_\tau l(X)] \cdot \alpha(X)$.

$$(11.3) \quad R(v(X)) = l(R(X)).$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_\tau X) = R(X)$; $\varphi(O) = O$, $\varphi(S_\tau X) = l[S_\tau + R(X)] = R(X)$ nach (11.4).

$$(11.4) \quad l[S_\tau + X] = X.$$

Beweis. $f(O) = l(S_\tau) = O$, $f(S_\mu X) = l(S_\mu(S_\tau + X)) = [S_\mu l(S_\tau + X)] \cdot \alpha(S_\mu) = S_\mu f(X)$.

$$(11.5) \quad a(X + Y) = a(Y) + a(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)].$$

$$L(O) = O,$$

$$(11.6) \quad L(S_\tau X) = L(X) + [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot S_\tau.$$

$$(11.7) \quad L(X + Y) = L(X) + L(Y) \cdot [1 \dot{-} \alpha(X)].$$

Jetzt definieren wir Σ und Π . Wieder kann man je n solche Funktionen einführen (und ihnen duale darüber):

$$(11.8) \quad \begin{aligned} \Sigma_f^y(O) &= f(O), \\ \Sigma_f^y(S_\mu X) &= \Sigma_f^y(X) \circ_\nu f(S_\mu X), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

$$(11.9) \quad \begin{aligned} \Pi_f^y(O) &= f(O), \\ \Pi_f^y(S_\mu X) &= \Pi_f^y(X) \dot{\cdot} f(S_\mu X), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

und dual mit veränderten Faktoren in zweiter Reihe jeder Definition.

Wir wollen doch nur Σ_f^0 und Π_f^0 in Betracht ziehen:

$$(11.8') \quad \begin{aligned} \Sigma_f(O) &= f(O), \\ \Sigma_f(S_\mu X) &= \Sigma_f(X) + f(S_\mu X), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

$$(11.9) \quad \begin{aligned} \Pi_f(O) &= f(O), \\ \Pi_f(S_\mu X) &= \Pi_f(X) \cdot f(S_\mu X), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Wir werden oft $\Sigma_f(X)$ in der Form $\Sigma_{Y=O}^X f(Y)$ und $\Pi_f(X)$ in der Form $\Pi_{Y=O}^X f(Y)$ schreiben, besonders wenn f mehrere Parameter enthält.

$\Sigma_f(X)$ ist die Summe aller $f(Y)$ für $O \leq Y \leq X$, beginnend mit $f(O)$.
Z. B. $\Sigma_f(S_1 S_1 S_0) = f(O) + f(S_0) + f(S_1 S_0) + f(S_1 S_1 S_0)$.

$$(11.10) \quad [1 \dot{-} \alpha(f(X))] \cdot \Pi_f(X) = O.$$

Beweis. $F(O) = [1 \dot{-} \alpha(f(O))] \cdot f(O) = O$, $F(S_\tau X) = \{1 \dot{-} \alpha[f(S_\tau X)]\} \cdot \Pi_f(X) \cdot f(S_\tau X) = \Pi_f(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha(f(S_\tau X))] \cdot f(S_\tau X) = O$, nach (6.7) und (6.16).

Man beweist leicht dass die Σ und Π von natürlichen Zahlen wieder natürliche Zahlen sind:

$$(11.11) \quad \sum_{Y=0}^X s_0[f(Y)] = s_0 \left(\sum_{Y=0}^X f(Y) \right).$$

Beweis. $F(O) = s_0(f(O))$, $F(S_\tau X) = F(X) + s_0[f(S_\tau X)]$; $\Phi(O) = s_0[f(O)]$,
 $\Phi(S_\tau X) = s_0(\Sigma_f(X) + f(S_\tau X)) = \Phi(X) + s_0[f(S_\tau X)]$ nach (10.11).

Ähnlich:

$$(11.12) \quad \prod_{Y=0}^X s_0[f(Y)] = s_0(\prod_f(X)).$$

Wenn wir also Σ und Π mit der Funktion $\alpha_f(X) = \alpha(f(X))$ bilden arbeiten wir dann immer nur mit Gleichungen mit natürlichen Zahlen, weil $\alpha(X)$ eine natürliche Zahl ist:

$$(11.13) \quad s_0(\alpha(X)) = \alpha(X).$$

Man darf doch diese Gleichungen nicht ohne weiteres aus der rekursiven Zahlentheorie borgen, besonders wenn dazu die Relationen $\leq$ und $<$ eine Rolle spielen.

$$(11.14) \quad \alpha(\prod_f(X)) = \prod_{\alpha_f}(X).$$

Doch gilt nicht $\alpha(\Sigma_f(X)) = \Sigma_{\alpha_f}(X)$ sondern nur

$$(11.15) \quad \sum_{\alpha_f}(X) = s_0 \left(\sum_{\alpha_f}(X) \right).$$

$$(11.16) \quad 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_f}(X) \right) = \prod_{1 \dot{-} \alpha_f}(X).$$

Beweis. $F(O) = 1 \dot{-} \alpha_f(O)$, $F(S_\tau X) = 1 \dot{-} \alpha(\Sigma_{\alpha_f}(X) + \alpha_f(S_\tau X)) =$
 $= [1 \dot{-} \alpha(\Sigma_{\alpha_f}(X))] \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_\tau X)] = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_\tau X)]$ nach (6.22). $\Phi(O) =$
 $= 1 \dot{-} \alpha_f(O)$, $\Phi(S_\tau X) = \Phi(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_\tau X)]$.

Weil $1 \dot{-} [1 \dot{-} \alpha_f(X)] = \alpha_f(X)$ folgt aus (11.16)

$$(11.17) \quad \prod_{\alpha_f}(X) = 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{1 \dot{-} \alpha_f}(X) \right).$$

Folgerungen:

$$(11.18) \quad [1 \dot{-} \alpha \left(\prod_{1 \dot{-} \alpha_f}(X) \right)] \cdot [1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_f}(X) \right)] = O,$$

und

$$(11.19) \quad [1 \dot{-} \alpha \left(\prod_{\alpha_f}(X) \right)] \cdot [1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{1 \dot{-} \alpha_f}(X) \right)] = O.$$

$$(11.20) \quad [1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_f}(X) \right)] \cdot \alpha_f(X) = O.$$

Beweis. $F(O) = [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \alpha_f(O) = O$, $F(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_\tau X)] \cdot \alpha_f(S_\tau X) = O$.

$$(11.21) \quad [1 \dot{-} \left(\sum_{\alpha_f}(X+Z) \right)] \cdot \alpha \left(\sum_{\alpha_f}(X) \right) = O.$$

$$(11.22) \quad \sum_{Y=0}^X \alpha(P \cdot q(Y)) = \alpha(P) \cdot \sum_{Y=0}^X \alpha(q(Y)).$$

Beweis. $F(O) = \alpha(P) \cdot \alpha_q(O)$, $F(S_\tau X) = F(X) + \alpha(P) \cdot \alpha_q(S_\tau X)$; $\Phi(O) = \alpha(P) \cdot \alpha_q(O)$, $\Phi(S_\tau X) = \alpha(P) \cdot \left\{ \sum_{Y=0}^X \alpha(q(Y)) + \alpha_q(S_\tau X) \right\} = \Phi(X) + \alpha(P) \cdot \alpha_q(S_\tau X)$

weil

$$(11.23) \quad \alpha(X) \cdot [A+B] = \alpha(X) \cdot A + \alpha(X) \cdot B$$

gilt.

$$(11.24) \quad \left[1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{Y=0}^X \alpha(P+q(Y)) \right) \right] \cdot \left[\alpha(P) + \alpha \left(\sum_{Y=0}^X \alpha_q(Y) \right) \right] = O.$$

Beweis. $F(O) = O$ nach (6.3) und (6.16). $F(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha(P)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_q(S_\tau X)] + \left[1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{Y=0}^X \alpha(P+q(Y)) \right) \right] \cdot [1 \dot{-} \alpha(P)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_q(S_\tau X)] \cdot \alpha_q(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha(P)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_q(S_\tau X)]$; also gelten: $F(O) = O$ und $\{1 \dot{-} \alpha[F(X)]\} \cdot F(S_\tau X) = O$ für $\tau = 0, 1, \dots, n-1$. Daraus, folgt nach (7.7) $F(X) = O$.

$$(11.25) \quad [1 \dot{-} \alpha(P)] \cdot [1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_q}(X) \right)] \cdot \alpha \left(\sum_{Y=0}^X \alpha(P+q(Y)) \right) = O.$$

Beweis. $F(O) = O$, $F(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_q(S_\tau X)] + O$.

$$(11.26) \quad \left\{ 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{Y=0}^X \alpha [p(Y) + q(Y)] \right) \right\} \cdot \left\{ \alpha \left(\sum_{\alpha_p} (X) \right) + \alpha \left(\sum_{\alpha_q} (X) \right) \right\} = O.$$

Beweis. $F(O) = O$,

$$F(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_p(S_\tau X)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_q(S_\tau X)] + O.$$

$$(11.27) \quad \left\{ 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_p} (X) \right) \right\} \cdot \left\{ 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_q} (X) \right) \right\} \cdot \alpha \left(\sum_{Y=0}^X \alpha [p(Y) + q(Y)] \right) = O.$$

$$(11.28) \quad \left\{ 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_p} (X) \right) \right\} \cdot \left\{ 1 \dot{-} \prod_{\alpha_q} (X) \right\} \cdot \alpha \left(\prod_{Y=0}^X \alpha [p(Y) + q(Y)] \right) = O.$$

Beweis. Weil $\prod_{\alpha_q} = 1 \dot{-} \alpha(\sum_{1 \dot{-} \alpha_q})$ soll man

$$(11.28') \quad \left\{ 1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_p} (X) \right) \right\} \cdot \alpha \left(\sum_{1 \dot{-} \alpha_q} (X) \right) \cdot \alpha \left(\prod_{Y=0}^X \alpha [p(Y) + q(Y)] \right) = O.$$

beweisen. Wir haben hier $F(O) = O$, $F(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_p(S_\tau X)] \cdot \alpha_q[S_\tau X] + O$, also ist $F(X) = O$.

$$(11.29) \quad \sum_f(X) = \alpha(X) \cdot \sum_f v(X) + f(X).$$

12. Wir sind jetzt in der Lage logische Konstanten einzuführen.

Wenn A und B Wörter sind und die Gleichung $|A, B| = O$ (also auch die Gleichung $\alpha(|A, B|) = O$) beweisbar ist, werden wir $A = B$ eine *wahre Aussage* nennen. Wenn $\alpha(|A, B|) = 1$ beweisbar ist werden wir $A = B$ eine *falsche Aussage* nennen. Also ist jede Aussage entweder wahr oder falsch.

Wenn p die Aussage $A = B$ und q die Aussage $C = D$ ist, so definieren wir:

$$(12.1) \quad \begin{aligned} p \vee q & \text{ als die Aussage } \alpha(|A, B|) \cdot \alpha(|C, D|) = O, \\ p \& q & \text{ als die Aussage } \alpha(|A, B|) + \alpha(|C, D|) = O. \\ \neg p & \text{ als die Aussage } 1 \dot{-} \alpha(|A, B|) = O, \\ p \rightarrow q & \text{ als die Aussage } \{1 \dot{-} \alpha(|A, B|)\} \cdot \alpha(|C, D|) = O, \\ p \leftrightarrow q & \text{ als die Aussage } p \rightarrow q \& q \rightarrow p. \end{aligned}$$

Wir haben die Definitionen (12.1) so gewählt dass Aussagen immer die Gleichungen mit lauter natürlichen Zahlen sind. Deswegen gelten für

unsere logische Konstanten alle Formeln auf den Seiten 80, 81 und 82 des Werkes [2], von 3 bis 3.093 und können genau wie dort bewiesen werden — wenn man nur anstatt x, y, z usw. mit $\alpha(X), \alpha(Y), \alpha(Z)$ usw. arbeitet.

Unter anderem hat eine jede Aussage die Form $\alpha(A)=O$, wobei A ein Wort ist, es gelten distributive Gesetze für $\vee$ und $\&$, Kommutativität bei der Disjunktion und Konjunktion usw.

Wir heben einige Schemata und Formeln hervor:

$$(12.2) \quad \frac{p \leftrightarrow q}{\neg p \leftrightarrow \neg q}.$$

$$(12.3) \quad \frac{p}{p \rightarrow q}.$$

$$(12.4) \quad \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r}.$$

$$(12.5) \quad \neg \neg p \leftrightarrow p.$$

$$(12.6) \quad p \vee q \leftrightarrow \neg (\neg p \& \neg q).$$

$$(12.7) \quad p \& q \leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q).$$

Gestattet man dass $A, B, C, \dots$ Funktionen sind, also $A = A(X_1, \dots, X_m)$, $B = B(X_1, \dots, X_m), \dots$, usw. bekommen wir gleich den Begriff der Aussagenfunktion $p = p(X_1, \dots, X_m)$, $q = q(X_1, \dots, X_m)$ usw. Wieder gelten alle Formeln über feste Aussagen auch für Aussagenfunktionen, und eine jede Aussage mit Aussagenfunktionen hat die Form $\alpha(f(X_1, \dots, X_m)) = O$.

Aus (6.36) folgt

$$(12.8) \quad X = Y \rightarrow (p(X) \rightarrow p(Y)),$$

und aus (7.7) das Prinzip der totalen Induktion

$$(12.9) \quad \frac{p(O)}{p(X) \rightarrow p(S_{\mu} X)}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1.$$

So folgt aus $[1 \dashv \alpha(X \cdot Y)] \cdot \alpha(X) \cdot \alpha(Y) = O$, d. h. aus

$$\{1 \dashv \alpha(|X \cdot Y, O|)\} \cdot \alpha(|X, O|) \cdot \alpha(Y, O) = O$$

die Aussage

$$(12.10) \quad X \cdot Y = O \rightarrow X = O \vee Y = O.$$

Aus der leicht beweisbaren Gleichung

$$(12.11) \quad \{1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)\} \cdot \alpha(|f(X), f(Y)|) = O$$

die aus (6.35) folgt, bekommt man die Aussage

$$(12.12) \quad X = Y \rightarrow f(X) = f(Y).$$

Begrenzte All- und Existential-Operatoren definieren wir wie folgt:

$$(12.13) \quad \begin{cases} A_Y^X[f(Y) = O] \text{ steht für } \sum_{\alpha_j}(X) = O; \\ E_Y^X[f(Y) = O] \text{ steht für } \prod_{\alpha_j}(X) = O. \end{cases}$$

Es gelten:

$$(12.14) \quad p(X) \rightarrow E_Y^X p(Y), \quad [(11.10)].$$

$$(12.15) \quad \neg A_Y^X p(Y) \leftrightarrow E_Y^X \neg p(Y), \quad [(11.16), (11.18)].$$

$$(12.16) \quad E_Y^X p(Y) \rightarrow \neg A_Y^X \neg p(Y), \quad [(11.19)].$$

$$(12.17) \quad A_Y^X p(Y) \rightarrow p(X), \quad [(11.20)].$$

$$(12.18) \quad A_Y^{X+Z} p(Y) \rightarrow A_Y^X p(Y), \quad [(11.21)].$$

$$(12.19) \quad \frac{p \rightarrow q(Y)}{p \rightarrow A_Y^X q(Y)},$$

wobei Y nicht in p erscheint.

Beweis. [2], Ex. 3.84.

Ähnlich beweist man

$$(12.20) \quad \frac{q(Y) \rightarrow p}{E_Y^X q(Y) \rightarrow p},$$

wobei Y nicht in p erscheint.

$$(12.21) \quad A_Y^X p(Y) \rightarrow [Z = X \rightarrow p(Z)].$$

Beweis. Man soll die Gleichung

$$(12.21') \quad \left[1 \dot{-} \alpha\left(\sum_{\alpha_p}(X)\right)\right] \cdot [1 \dot{-} \alpha(|Z, X|)] \cdot \alpha_p(Z) = O$$

beweisen. Es ist $F(X, O) = [1 \dot{-} \sigma(\Sigma_{\alpha_p}(X))] \cdot [1 \dot{-} \alpha(X)] \cdot \alpha_p(O)$. Für $\psi(X) = F(X, O)$ ist $\psi(O) = [1 \dot{-} \alpha_p(O)] \cdot \alpha_p(O) = O$ und $\psi(S_\tau X) = O$ also ist $F(X, O) = O$. Weiter $F(O, S_\tau Z) = [1 \dot{-} \alpha_p(O)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(S_\tau Z)] \cdot \alpha_p(S_\tau Z) = O$ weil $\alpha(S_\tau Z) = 1$. Endlich

$$F(S_\mu X, S_\tau Z) = \begin{cases} O & \text{für } \mu \neq \tau, \text{ wegen } [1 \dot{-} \alpha(|S_\tau Z, S_\mu X|)] = O, \\ \left[1 \dot{-} \alpha \left(\sum_{\alpha_p} (X) \right) \right] \cdot [1 \dot{-} \alpha_p(S_\mu X)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(|Z, X|)] \cdot \alpha_p(S_\mu Z), & \text{für } \tau = \mu. \end{cases}$$

Auf Grund von (6.35) ist aber $[1 \dot{-} \alpha(|Z, X|)] \cdot \alpha_p(S_\mu Z) = [1 \dot{-} \alpha(|Z, X|)] \cdot \alpha_p(S_\mu X)$ also für $\mu = \tau$ $F(S_\mu X, S_\mu Z) = [1 \dot{-} \alpha(\Sigma_{\alpha_p}(X))] \cdot [1 \dot{-} \alpha(|Z, X|)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_p(S_\mu X)] \cdot \alpha_p(S_\mu X) = O$. Damit ist $F(X, Y) = O$ bewiesen.

Aus (11.22) folgt

$$(12.22) \quad A_Y^X[p \vee q(Y)] \leftrightarrow p \vee A_Y^X q(Y),$$

und daraus, mit $\neg p$ statt p folgt

$$(12.23) \quad A_Y^X[p \rightarrow q(Y)] \leftrightarrow (p \rightarrow A_Y^X q(Y)).$$

$$(12.24) \quad \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r(Y))}{p \rightarrow (q \rightarrow A_Y^X r(Y))}.$$

$$(12.25) \quad p \rightarrow A_Y^X[p \vee q(Y)].$$

Aus (11.24) und (11.25) folgt

$$(12.26) \quad A_Y^X[p \& q(Y)] \leftrightarrow p \& A_Y^X q(Y),$$

und aus (11.26) und (11.27)

$$(12.27) \quad A_Y^X[p(Y) \& q(Y)] \leftrightarrow A_Y^X p(Y) \& A_Y^X q(Y).$$

Schreibt man (12.27) in der Form

$$A_Y^X[\neg p(Y) \& \neg q(Y)] \leftrightarrow A_Y^X \neg p(Y) \& A_Y^X \neg q(Y)$$

so folgt daraus nach (12.2)

$$\neg A_Y^X[\neg p(Y) \& \neg q(Y)] \leftrightarrow \neg[A_Y^X \neg p(Y) \& A_Y^X \neg q(Y)]$$

was, nach (12.15)

$$(12.28) \quad E_Y^X[p(Y) \vee q(Y)] \leftrightarrow E_Y^X p(Y) \vee E_Y^X q(Y)$$

ergibt. Aus dieser Gleichung folgt noch

$$(12.29) \quad E_Y^X[p(Y) \rightarrow q(Y)] \leftrightarrow [A_Y^X \neg p(Y) \rightarrow E_Y^X q(Y)]$$

Aus (11.28) folgt

$$(12.30) \quad A_Y^X p(Y) \& E_Y^X q(Y) \rightarrow E_Y^X [p(Y) \& q(Y)].$$

Daraus, mit $\neg q(Y)$ statt $q(Y)$ folgt

$$A_Y^X p(Y) \& \neg A_Y^X q(Y) \rightarrow \neg A_Y^X \{ \neg p(Y) \vee q(Y) \}$$

und nach

$$(12.31) \quad \frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p}$$

$$(12.32) \quad A_Y^X \{ p(Y) \rightarrow q(Y) \} \rightarrow \{ A_Y^X p(Y) \rightarrow A_Y^X q(Y) \}.$$

Weitere Aussagen werden wir erst nach einer eingehenden Untersuchung der Relation $\leq$ und $<$ geben können. Auch den Minimumquantor $L_Y^X [f(Y)=0]$ werden wir erst nach Einführung von $\mu_f(X)$ untersuchen können.

13. Wir kehren zur Relationen $\leq$ und $<$ zurück. Jetzt ist es klar dass

$$Y < X \text{ für die Aussage } Y \leq \nu(X) \& X \neq O \text{ steht.}$$

Dabei

$$(13.1) \quad X \neq O \text{ steht für } \neg(X=O).$$

Aus (9.11) folgt jetzt

$$(13.2) \quad X < Y \rightarrow X \leq Y,$$

und aus (9.13) und (9.14)

$$(13.2') \quad R(X) \dot{-} R(Y) = O \leftrightarrow X \leq Y.$$

$$(13.3) \quad \{1 \dot{-} \alpha[(B+C) \dot{-} D]\} \alpha[C \dot{-} D] = O.$$

Beweis. $f(B, C, O) = [1 \dot{-} \alpha(B)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(C)] \cdot \alpha(C) = O$, $f(B, O, S_\tau D) = O$,
 $f(B, S_\tau C, S_\mu D) = O$ für $\tau \neq \mu$, $= f(B, C, D)$ für $\tau = \mu$.

$$(13.4) \quad [1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} V)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(V \dot{-} W)] \cdot \alpha(U \dot{-} W) = O.$$

Beweis. Nach (6.33) ist

$$\begin{aligned} & [1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} V)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(V \dot{-} W)] = \\ & = [1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} V)] \cdot \{1 \dot{-} \alpha[\{(V \dot{-} U) + U\} \dot{-} W]\}, \end{aligned}$$

also ist die linke Seite von (13.4) gleich

$$[1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} V)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(\{(V \dot{-} U) + U\} \dot{-} W)] \cdot \alpha(U \dot{-} W).$$

Diese Funktion ist aber nach (13.3), mit $B = V \dot{-} U$, $C = U$ und $D = W$ Null.

Wenn man in (13.4) $U = R(X)$, $V = R(Y)$, $W = R(Z)$ setzt so bekommt man gleich

$$(13.5) \quad X \leq Y \ \& \ Y \leq Z \rightarrow X \leq Z.$$

Wir beweisen jetzt

$$(13.6) \quad X = Y \leftrightarrow R(X) = R(Y),$$

dh. die Gleichungen

$$(13.6') \quad \{1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)\} \cdot \alpha(|R(X), R(Y)|) = O,$$

$$(13.6'') \quad \{1 \dot{-} \alpha(|R(X), R(Y)|)\} \cdot \alpha(|X, Y|) = O.$$

(13.6') folgt aus (12.11), und (13.6'') aus (13.6') durch Übergang zu Reversionen.

$$(13.7) \quad \{1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} [S_\tau + V])\} \cdot \alpha(|S_\tau + V, U|) \cdot \alpha(U \dot{-} V) = O.$$

Beweis. $f(U, O) = [1 \dot{-} \alpha(U \dot{-} S_\tau)] \cdot \alpha(S_\tau \dot{-} U) \cdot \alpha(U) = O$. $f(O, S_\mu V) = O$,
 $f(S_\mu U, S_\nu V) = O$ für $\mu \neq \nu$, $= f(U, V)$ für $\mu = \nu$.

Aus (13.7) folgt

$$(13.7') \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(S_\tau X)]\} \cdot \alpha(|R(S_\tau X), R(Y)|) \cdot \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)] = O.$$

$$(13.8) \quad \{1 \dot{-} \alpha(|S_\tau + U, V|)\} \cdot \alpha(V \dot{-} U) \alpha(V \dot{-} [S_\tau + U]) = O.$$

Beweis. $f(U, O) = O$, $f(O, S_\mu V) = [1 \dot{-} \alpha(V)] \cdot \alpha(V)$ für $\mu = \tau$, $= O$ für $\mu \neq \tau$;
 $f(S_\mu U, S_\nu V) = f(U, V)$ für $\mu = \nu$, $= O$ für $\mu \neq \nu$.

Wenn man in (13.8) $U = R(X)$, $V = R(Y)$ setzt folgt

$$(13.8') \quad [1 \dot{-} \alpha(|R(S_\tau X), R(Y)|)] \cdot \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)] \cdot \alpha[R(Y) \dot{-} R(S_\tau X)] = O.$$

Jetzt können wir

$$(13.9) \quad Y \leq X \rightarrow (Y = X) \vee (Y < X),$$

dh. auf Grund von (13.6)

$$(13.9') \quad [1 \dot{-} \alpha(R(Y) \dot{-} R(X))] \cdot \alpha(|R(X), R(Y)|) \cdot \alpha\{[R(Y) \dot{-} R(v(X))] + [1 \dot{-} \alpha(X)]\} = O$$

beweisen.

Beweis. $F(Y, O) = [1 \dot{-} \alpha(R(Y))] \cdot \alpha(R(Y)) = O$, $F(Y, S_r X) =$
 $= [1 \dot{-} \alpha\{R(Y) \dot{-} R(S_r X)\}] \cdot \alpha(|R(S_r X), R(Y)|) \cdot \alpha(R(Y) \dot{-} R(X)) = O$ nach
(13.7').

Wir bemerken dass die Aussage $Y = X$ äquivalent mit der Aussage
 $R(Y) = R(X)$ ist (nach (13.6)), und wir können äquivalente Aussagen eine
für andere einsetzen. (Beweis: [2], 3.34, Seite 60, 61).

$$(13.10) \quad (Y = X) \vee (Y < X) \rightarrow Y \leq X.$$

Beweis. Man soll

$$(13.10') \quad \{1 \dot{-} \alpha[\alpha(|R(X), R(Y)|) \cdot \{[R(Y) \dot{-} R(v(X))] + [1 \dot{-} \alpha(X)]\}]\} \cdot$$

$$\cdot \alpha\{R(Y) \dot{-} R(X)\} = O$$

beweisen. Es ist $f(Y, O) = [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot \alpha(Y) = O$, $f(Y, S_r X) = O$ nach (13.8').

Aus (13.9) und (13.10) folgt

$$(13.11) \quad Y \leq X \leftrightarrow (Y = X) \vee (Y < X).$$

Wir haben schon bemerkt dass $R(Y) \dot{-} R(X) = O$ für $Y \leq X$ ziemlich
unbequem für Beweise ist. Deswegen wollen wir eine, manchmal beque-
mere äquivalente Aussage für $Y \leq X$ finden.

Setzt man in (8.29) $V = R(Y)$ und $U = R(X)$ und bemerkt man dass
 $\alpha(R(X)) = \alpha(X)$ ist, so bekommt man

$$(13.12) \quad [1 \dot{-} \alpha(|R(Y) \dot{-} R(X), R(Y) \sim R(X)|)] \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha[R(X) \dot{-} R(Y)] = O,$$

dh. die Aussage

$$(13.13) \quad R(Y) \dot{-} R(X) = R(Y) \sim R(X) \ \& \ Y \neq O \rightarrow X \leq Y.$$

Weil aber nach (8.30)

$$(13.13') \quad U + V = U + W \rightarrow V = W$$

gilt, folgt aus (13.13'), (13.13) und (13.6)

$$(13.13'') \quad X + R[R(Y) \dot{-} R(X)] = X + R[R(Y) \sim X] \ \& \ Y \neq O \rightarrow X \leq Y.$$

Aus

$$(13.14) \quad Y = X + Z \ \& \ X + Z = X + U \rightarrow Y = X + U$$

folgt daraus endlich

$$(13.13''') \quad Y = X + R[R(Y) \sim X] \ \& \ Y \neq O \rightarrow X \leq Y.$$

Aber es gilt auch

$$(13.13^{IV}) \quad Y = X + R[R(Y) \sim X] \ \& \ Y = O \rightarrow X \leq Y,$$

dh. die triviale Gleichung

$$\{1 \dot{-} \alpha(|Y, X + R[R(Y) \sim X]|)\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(Y)\} \cdot \alpha\{R(X) \dot{-} R(Y)\} = O.$$

Wenn man die Gleichung (13.13^{IV}) mit der entsprechenden Gleichung für (13.13^{III}) addiert, bekommt man

$$(13.15) \quad Y = X + R[R(Y) \sim X] \rightarrow X \leq Y.$$

Wir haben noch (13.14), dh.

$$(13.16) \quad A = B \ \& \ B = C \rightarrow A = C$$

zu beweisen, dh.

$$(13.16') \quad \{1 \dot{-} \alpha(|A, B|)\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(|B, C|)\} \cdot \alpha(|A, C|) = O.$$

Diese Gleichung folgt aus (6.35), weil nach dieser Gleichung

$$[1 \dot{-} \alpha(|A, B|)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(|B, C|)] = [1 \dot{-} \alpha(|A, B|)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(|A, C|)]$$

ist, und $[1 \dot{-} \alpha(|A, C|)] \cdot \alpha(|A, C|) = O$ ist.

Wenn man in (8.28) $U = R(X)$ und $V = R(Y)$ setzt folgt

$$(13.17) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(X) \dot{-} R(Y)]\} \cdot \alpha(|R(Y) \dot{-} R(X), R(Y) \sim R(X)|) = O,$$

dh. die Aussage

$$(13.17') \quad X \leq Y \rightarrow R(Y) \dot{-} R(X) = R(Y) \sim R(X),$$

dh.

$$(13.17'') \quad X \leq Y \rightarrow [R(Y) \dot{-} R(X)] + R(X) = [R(Y) \sim R(X)] + R(X)$$

und durch Reversion

$$(13.17''') \quad X \leq Y \rightarrow X + R[R(Y) \dot{-} R(X)] = X + R[R(Y) \sim X].$$

$X \leq Y$ ist aber die Aussage $R(Y) = [R(Y) \dot{-} R(X)] + R(X)$, dh. die Aussage $Y = X + R\{R(Y) \dot{-} R(X)\}$. Daraus folgt endlich

$$(13.18) \quad X \leq Y \rightarrow Y = X + R[R(Y) \sim X].$$

Aus (13.15) und (13.18) folgt die gesuchte Äquivalenz:

$$(13.19) \quad X \leq Y \leftrightarrow Y = X + R[R(Y) \sim X].$$

$$(13.20) \quad \{1 \dot{-} \alpha[(S_{\mu} + U) \dot{-} V]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(V \sim U)\} = O$$

Beweis. Durch Doppelrekursion.

Mit $U = R(A)$, $V = R(Y)$ wird (13.20)

$$(13.20') \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(S_{\mu} A) \dot{-} R(Y)]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(Y \sim A)\} = O$$

weil $\alpha(R(Y) \sim R(A)) = \alpha(Y \sim A)$.

$$(13.21) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(A) \dot{-} R(Y)]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha[Y \sim v(A)] \cdot \alpha(A)\} \cdot \alpha(A) = O.$$

Beweis. $f(Y, S_{\mu}A) = O$ nach (13.20').

$$(13.22) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(A) \dot{-} R(v(Y))]\} \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha(\mid \alpha(Y \sim A), 1 \mid) = O.$$

Beweis. Weil $\alpha(Y \sim A) \dot{-} 1 = O$ ist, soll man nur

$$(13.22') \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(A) \dot{-} R(v(Y))]\} \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha[1 \dot{-} \alpha(Y \sim A)] = O$$

beweisen. Es ist $f(A, O) = O$, $f(A, S_{\tau}Y) = \{1 \dot{-} \alpha[R(A) \dot{-} R(Y)]\} \cdot \alpha[1 \dot{-} \alpha(S_{\tau}Y \sim A)]$. Nach (8.20) ist $S_{\tau}Y \sim A = [Y \sim v(A)] \cdot \alpha(A) + [1 \dot{-} \alpha(A)] \cdot S_{\tau}Y$, also $f(A, S_{\tau}Y) = \{1 \dot{-} \alpha[R(A) \dot{-} R(Y)]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha[Y \sim v(A)] \cdot \alpha(A)\} \cdot \alpha(A) = O$ nach (13.21).

Aus (13.22) folgt

$$(13.23) \quad A < Y \rightarrow \alpha(Y \sim A) = 1.$$

Diese Aussage werden wir später benützen.

14. Jetzt führen wir die Funktion $\mu_f(X)$, dh. das kleinste Y , $O \leq Y \leq X$ für welches $f(Y) = O$ ist, ein. Wir beginnen mit n Hilfsfunktionen $\Theta_f^v(X)$, $v = 0, \dots, n-1$ die explizite durch

$$(14.1) \quad \Theta_f^v(X) = \prod_{\alpha_f} (X) \dot{-} \prod_{\alpha_f} (S_v X) = \prod_{\alpha_f} (X) \cdot \{1 \dot{-} \alpha_f(S_v X)\}$$

definiert sind. (Vergl. die entsprechende Def. in [2]). Offenbar sind alle $\Theta_f^v(X)$ α -Funktionen und es gilt

$$(14.2) \quad [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot \Theta_f^v(X) = O, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

Es gelten auch alle Gleichungen aus §6, mi Θ_f^v als α -Funktion.

$\mu_f(X)$ ist durch

$$(14.3) \quad \begin{aligned} \mu_f(O) &= O, \\ \mu_f(S_v X) &= [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^v(X) \cdot S_v X, \quad v = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

definiert. Obwohl diese Definition eine direkte Generalisation der entsprechenden in [2] ist, können wir in Beweisen keine Analoga der Technik aus [2] verwenden. Auf einer einzigen Stelle (beim Beweis von (14.12')) konnten wir uns der Technik vom Herrn Goodstein bedienen.

Aus (14.3) und (14.2) folgen

$$(14.4) \quad [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot \mu_f(S_v X) = [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot \mu_f(X).$$

$$\Theta_f^v(X) \cdot \mu_f(S_v X) = \Theta_f^v(X) \cdot S_v X.$$

die für jedes $v=0,1,\dots,n-1$ gelten.

Wir betrachten jetzt die Funktion

$$(14.5) \quad \Phi(X) = \mu_f(X) + R[R(X) \sim \mu_f(X)].$$

Es ist $\Phi(O) = O$ und $\Phi(S_v X) = \{[1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^v(X) \cdot S_v X\} + R\{R(S_v X) \sim [[1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^v(X) \cdot S_v X]\}$.

Aus (8.32) folgt $\Phi(S_v X) = \{\mu_f(X) + R[R(S_v X) \sim \mu_f(X)]\} \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] + \{S_v X + R[R(S_v X) \sim S_v X]\} \cdot \Theta_f^v(X)$ und nach (8.17) und (8.7)

$$(14.5') \quad \Phi(S_v X) = \{\mu_f(X) + R(R(S_v X) \sim \mu_f(X))\} \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] + \Theta_f^v(X) \cdot S_v X.$$

Nach (8.5) ist

$$(14.5'') \quad R(S_v X) \sim \mu_f(X) = \alpha[S_v R(X) \sim \mu_f(X)] \cdot S_v + [R(X) \sim \mu_f(X)].$$

Wir beweisen jetzt

$$(14.6) \quad \alpha(S_v R(X) \sim Y) = \alpha(S_v X \sim Y).$$

Beweis. $f(X, O) = 1$, $f(X, S_\tau Y) = \alpha(R(X) \sim Y) = \alpha(X \sim Y)$; $\varphi(X, O) = 1$
 $\varphi(X, S_\tau Y) = \alpha(X \sim Y)$.

Also gilt

$$(14.6') \quad \alpha[S_v R(X) \sim \mu_f(X)] = \alpha[S_v X \sim \mu_f(X)].$$

Wir beweisen noch

$$(14.7) \quad \{1 \dot{-} \alpha[1 \dot{-} \alpha(S_v X \sim B)]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha(S_\tau S_v X \sim B)\} = O.$$

Beweis. $F(X, O) = O$, $F(O, S_\mu B) = \{1 \dot{-} [1 \dot{-} \alpha(S_v \sim S_\mu B)]\} \cdot [1 \dot{-} \alpha(S_\tau S_v \sim B)] = O$, weil $S_v \sim S_\mu B = O$; $F(S_e X, S_\mu B) = F(X, Y)$.

Wenn also

$$(14.8) \quad p(X) = 1 \dot{-} \alpha[S_v X \sim \mu_f(X)]$$

ist, so gilt $p(O) = O$ und

$$p(S_\tau X) = 1 \dot{-} \alpha\{S_v S_\tau X \sim \mu_f(S_\tau X)\} =$$

$$= 1 \dot{-} \alpha\{S_v S_\tau X \sim [[1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^\tau(X) \cdot S_\tau X]\}$$

was gleich

$$\Theta_f^r(X) \cdot p(S_r X) = O,$$

$$[1 \dot{-} \Theta_f^r(X)] \cdot p(S_r X) = [1 \dot{-} \alpha(S_v S_r X \sim \mu_f(X))] \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^r(X)]$$

ergibt, und durch Addition (weil $(1 \dot{-} \alpha) + \alpha = 1$)

$$p(S_r X) = [1 \dot{-} \alpha(S_v S_r X \sim \mu_f(X))] \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^r(X)].$$

Aus (14.7) folgt

$$\{1 \dot{-} \alpha[p(X)]\} \cdot \alpha[p(S_r X)] = O,$$

was mit $p(O) = O$, nach (7.7), $p(X) = O$ ergibt.

Also ist $1 \dot{-} \alpha[S_v X \sim \mu_f(X)] = O$. Daraus folgt

$$(14.9) \quad \alpha(S_v X \sim \mu_f(X)) = \alpha(S_v R(X) \sim \mu_f(X)) = 1.$$

Somit verwandelt sich (14.5'') in

$$R(S_v X) \sim \mu_f(X) = S_v + [R(X) \sim \mu_f(X)],$$

also ist

$$(14.6) \quad R[R(S_v X) \sim \mu_f(X)] = S_v R[R(X) \sim \mu_f(X)].$$

Damit verwandelt sich (14.5') in

$$(14.5''') \quad \Phi(S_v X) = [S_v \Phi(X)] \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] + \Theta_f^v(X) \cdot S_v X.$$

Diese Anfangsgleichungen erfüllt aber $\Psi(X) = X$, weil

$$[1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot S_v X + \Theta_f^v(X) \cdot S_v X = S_v X.$$

Also ist $\Phi(X) = X$, dh.

$$(14.7) \quad X = \mu_f(X) + R[R(X) \sim \mu_f(X)].$$

Daraus und aus (13.9) folgt

$$(14.8) \quad \mu_f(X) \leq X.$$

Wir wollen auch

$$(14.9) \quad \mu_f(X) \leq \mu_f(S_v X),$$

dh. die Gleichung

$$(14.9') \quad \mu_f(S_v X) = \mu_f(X) + R\{R[\mu_f(S_v X)] \sim \mu_f(X)\}$$

beweisen. Bezeichnet man die rechte Seite dieser Gleichung mit $\Phi(X)$, so ist

$$\Phi(X) = \mu_f(X) + R\{[\Theta_f^v(X) \cdot R(S_v X) + [1 \dot{-} \Theta_f^v(X)] \cdot R[\mu_f(X)]] \sim \mu_f(X)\}.$$

Es gilt also

$$(14.10) \quad [1 \dot{-} \Theta_f^{\vee}(X)] \cdot \Phi(X) = [1 \dot{-} \Theta_f^{\vee}(X)] \cdot \{\mu_f(X) + R[R(\mu_f(X)) \sim \mu_f(X)]\} = \\ = [1 \dot{-} \Theta_f^{\vee}(X)] \cdot \mu_f(X),$$

und

$$\Theta_f^{\vee}(X) \cdot \Phi(X) = \Theta_f^{\vee}(X) \cdot \{\mu_f(X) + R[R(S_{\vee}X) \sim \mu_f(X)]\}.$$

Es gilt aber $\mu_f(X) \leq X$ und $X \leq S_{\vee}X$ also auch $\mu_f(X) \leq S_{\vee}X$, dh.

$$(14.11) \quad S_{\vee}X = \mu_f(X) + R[R(S_{\vee}X) \sim \mu_f(X)]$$

und somit

$$(14.12) \quad \Theta_f^{\vee}(X) \cdot \Phi(X) = \Theta_f^{\vee}(X) \cdot S_{\vee}X.$$

Addition von (14.10) und (14.12) ergibt

$$\Phi(X) = [1 \dot{-} \Theta_f^{\vee}(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^{\vee}(X) \cdot S_{\vee}X = \mu_f(S_{\vee}X)$$

womit (14.9') bewiesen ist.

Wir beweisen jetzt

$$(14.13) \quad E_Y^X[f(Y) = O] \vee (\mu_f(X) = O),$$

dh. die Gleichung

$$(14.13') \quad [\prod_{\alpha_f}(X)] \cdot \mu_f(X) = O.$$

Beweis. $F(O) = \alpha_f(O) \cdot \mu_f(O) = O$, $\{1 \dot{-} \alpha[F(X)]\} \cdot \alpha(F(S_{\tau}X)) = \\ = \{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X) \cdot \alpha(\mu_f(X))\} \cdot \prod_{\alpha_f}(X) \cdot \alpha_f(S_{\tau}X) \cdot \alpha\{[1 \dot{-} \Theta_f^{\tau}(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^{\tau}(X) \cdot \\ \cdot S_{\tau}X\} = \{1 \dot{-} \alpha(\mu_f(X)) \cdot \prod_{\alpha_f}(X)\} \cdot \prod_{\alpha_f}(X) \cdot \alpha_f(S_{\tau}X) \cdot \Theta_f^{\tau}(X)$, weil $[1 \dot{-} \alpha(\mu_f(X)) \cdot \prod_{\alpha_f}(X)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X) \cdot \mu_f(X) = O$ ist. Aber $\alpha_f(S_{\tau}X) \cdot \Theta_f^{\tau}(X) = \\ = \alpha_f(S_{\tau}X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_{\tau}X)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O$ und somit $\{1 \dot{-} \alpha(F(X))\} \cdot \\ \cdot \alpha[F(S_{\tau}X)] = O$. w. z. b. w.

$$(14.14) \quad [f(X) = O] \rightarrow E_Y^X[f(Y) = O],$$

dh.

$$(14.14') \quad [1 \dot{-} \alpha_f(X)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O.$$

Beweis. $F(O) = [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \alpha_f(O) = O$, $F(S_{\tau}X) = [1 \dot{-} \alpha_f(S_{\tau}X)] \cdot \\ \cdot \alpha_f(S_{\tau}X) \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O$.

$$(14.15) \quad E_Y^X[f(Y) = O] \rightarrow E_Y^{X+Z}[f(Y) = O],$$

dh.

$$(14.15') \quad \{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)\} \cdot \prod_{\alpha_f}(X+Z) = O.$$

Beweis. $F(X, O) = \{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)\} \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O$, $F(X, S_\tau Z) = F(X, Z) \cdot \alpha_f(X + S_\tau Z)$ und nach (7.7) folgt $F(X, Z) = O$.

$$(14.16) \quad E_Y^X[f(Y) = O] \rightarrow \Theta_f^Y(X) = O, \quad v = 0, \dots, n-1,$$

$$(14.16') \quad \{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)\} \cdot \Theta_f^Y(X) = O.$$

Beweis. aus (14.1)

Aus (14.4) folgt

$$(14.17) \quad [1 \dot{-} \Theta_f^Y(X)] \cdot \alpha(|\mu_f(X), \mu_f(S_v X)|) = O,$$

dh.

$$(14.17') \quad \Theta_f^Y(X) = O \rightarrow \mu_f(S_v X) = \mu_f(X).$$

Aus (14.16) und (14.17') folgt

$$(14.18) \quad E_Y^X[f(Y) = O] \rightarrow \mu_f(S_v X) = \mu_f(X),$$

dh.

$$(14.18') \quad [1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)] \cdot \alpha(|\mu_f(S_v X), \mu_f(X)|) = O.$$

Daraus folgt

$$\{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X+A)\} \cdot \alpha(|\mu_f(X+S_v A), \mu_f(X+A)|) = O.$$

Weil, nach (14.15'), $[1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X+A) = O$ ergibt sich nach Schema (12.4)

$$(14.19) \quad [1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)] \cdot \alpha(|\mu_f(X+S_v A), \mu_f(X+A)|) = O.$$

Wir beweisen das Schema

$$(14.20) \quad \frac{\alpha(B) \cdot \alpha(|X, Y|) = O}{\alpha(B) \cdot \alpha(|Z, X|) = \alpha(B) \cdot \alpha(|Z, Y|)}.$$

Beweis. Aus (6.35) folgt

$$[1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot \alpha(|Z, X|) = [1 \dot{-} \alpha(|X, Y|)] \cdot \alpha(|Z, Y|).$$

Wenn man jetzt diese Gleichung mit $\alpha(B)$ multipliziert und die obere Gleichung (14.20) anwendet folgt die untere.

Aus (14.19) folgt nach (14.20)

$$(14.21) \quad \{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)\} \cdot \alpha(|\mu_f(X), \mu_f(X+A)|) = \\ = \{1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)\} \cdot \alpha(|\mu_f(X), \mu_f(X+S_\vee A)|).$$

Bezeichnen wir die linke Seite dieser Gleichung mit $\Phi(X, A)$ so ist $\Phi(X, O) = O$ und nach (14.21) $\Phi(X, S_\vee A) = \Phi(X, A)$, also $\Phi(X, A) = O$. Somit hat man

$$(14.22) \quad [1 \dot{-} \prod_{\alpha_f}(X)] \cdot \alpha(|\mu_f(X+A), \mu_f(X)|) = O,$$

dh.

$$(14.22') \quad E_Y^X[f(Y) = O] \rightarrow \mu_f(X+A) = \mu_f(X).$$

Bemerkung. Der Beweis von (14.22') verfolgt den Beweis derselben Gleichung in [2]. Nur der Beweis von (14.20) weicht vom Beweise des Herrn R.L. Goodstein ab.

Man kann leicht beweisen

$$(14.23) \quad X \cdot Y = O \ \& \ X \neq O \rightarrow Y = O.$$

Aus (14.13') folgt dann

$$(14.24) \quad \mu_f(X) \neq O \rightarrow E_Y^X[f(Y) = O].$$

Jetzt beweisen wir

$$(14.25) \quad \mu_f(X) \neq O \rightarrow \prod_{\alpha_f}(\mu_f(X)) = O,$$

dh.

$$\{1 \dot{-} [1 \dot{-} \alpha(\mu_f(X))]\} \cdot \prod_{\alpha_f}(\mu_f(X)) = O,$$

dh.

$$(14.26) \quad \alpha(\mu_f(X)) \cdot \prod_{\alpha_f}(\mu_f(X)) = O.$$

Beweis. $F(O) = O$, $F(S_\tau X) = \alpha\{[1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^\tau(X) \cdot S_\tau X\} \cdot \prod_{\alpha_f}\{[1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^\tau(X) \cdot S_\tau X\}$. Also ist $F(S_\tau X)$ von der Form $\Phi(U) = \alpha\{[1 \dot{-} \alpha(U)] \cdot A + \alpha(U) \cdot B\} \cdot \prod_{\alpha_f}\{[1 \dot{-} \alpha(U)] \cdot A + \alpha(U) \cdot B\} = \alpha(A) \cdot \prod_{\alpha_f}(A) \cdot [1 \dot{-} \alpha(U)] + \alpha(B) \cdot \prod_{\alpha_f}(B) \cdot \alpha(U)$.

Somit ist, weil $\alpha(S_\tau X) = 1$

$$F(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] + \prod_{\alpha_f}(S_\tau X) \cdot \Theta_f^\tau(X).$$

Der zweite Summand ist das leere Wort O , also gilt

$$\{1 \dot{-} \alpha[F(X)]\} \cdot \alpha\{F(S_\tau X)\} = O, \quad \tau = 0, 1 \dots, n-1, \text{ also } F(X) = O.$$

Aus (14.24) und (14.25) folgt

$$(14.27) \quad \mu_f(X) \neq O \rightarrow (\prod_{\alpha_f}(X) = O) \& [(\prod_{\alpha_f}(\mu_f(X))) = O].$$

dh.

$$(14.27') \quad \mu_f(X) \neq O \rightarrow \prod_{\alpha_f}(X) = \prod_{\alpha_f}(\mu_f(X)) = O,$$

weil

$$(14.28) \quad A = O \& B = O \rightarrow A = B$$

gilt.

Wir beweisen auch

$$(14.29) \quad \mu_f(X) \neq O \rightarrow f[\mu_f(X)] = O,$$

dh.

$$(14.29') \quad \alpha[\mu_f(X)] \cdot \alpha_f[\mu_f(X)] = O.$$

Beweis. $F(O) = \alpha[\mu_f(O)] \cdot \alpha_f(\mu_f(O)) = \alpha(O) \cdot \alpha_f(O) = O$, $F(S_\tau X) = \alpha\{[1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^\tau(X) \cdot S_\tau X\} \cdot \alpha_f\{[1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] \cdot \mu_f(X) + \Theta_f^\tau(X) \cdot S_\tau X\} = F(X) \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] + \Theta_f^\tau(X) \cdot \alpha_f(S_\tau X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)]$. Also ist $F(X) = O$.

$$(14.30) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(v(X))]\} \cdot \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)] = O.$$

Beweis. $f(Y, O) = [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot \alpha(Y) = O$, $F(Y, S_\tau X) = O$ nach (9.10').

Also gilt

$$(14.31) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot \alpha\{R(Y) \dot{-} R[\mu_f(X)]\} = O,$$

dh.

$$(14.31') \quad Y \leq v[\mu_f(X)] \rightarrow Y \leq \mu_f(X).$$

Weil $\mu_f(X) \leq X$ folgt aus Transitivität von $\leq$

$$(14.32) \quad Y \leq v[\mu_f(X)] \rightarrow Y \leq X,$$

dh.

$$(14.33) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)] = O.$$

Diese triviale Gleichung wird uns doch vom Nutzen sein.

Jetzt beweisen wir

$$(14.34) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)]\} \cdot \alpha\{R(Y) \dot{-} R[v(\mu_f(X))]\} \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \Phi(Y, O) &= [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha_f(O) = O, \quad \Phi(Y, S_\tau X) = \\ &= \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(S_\tau X)]\} \cdot \alpha\{R(Y) \dot{-} R(X)\} \cdot [\prod_{\alpha_f}(S_\tau X)] \cdot \Theta_f^\tau(X) + \\ &+ \Phi(Y, X) \cdot \alpha_f(S_\tau X) \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)]. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\prod_{\alpha_f}(S_\tau X) \cdot \Theta_f^\tau(X) = \prod_{\alpha_f}(X) \cdot \alpha_f(S_\tau X) \cdot \prod_{\alpha_f}(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_\tau X)] = O,$$

also $\Phi(Y, S_\tau X) = \Phi(Y, X) \cdot \alpha_f(S_\tau X) \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)]$. Dieselbe Anfangsgleichung besitzt auch $\Psi(Y, X) = O$.

$$(14.35) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] = [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)].$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \Phi(Y, O) &= \{1 \dot{-} \alpha(Y)\} \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] = \Psi(Y, O); \quad \Phi(Y, S_\tau X) = \\ &= \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] + \\ &+ \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)]\} \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot \Theta_f^\tau(X). \text{ Also ist, teilweise mittels} \\ (14.34) \text{ und der Gleichung } &\Theta_f^\tau(X) = \prod_{\alpha_f}(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(S_\tau X)], \end{aligned}$$

$$\Phi(Y, S_\tau X) \cdot \alpha\{R(Y) \dot{-} R[v(\mu_f(X))]\} = O$$

und

$$\begin{aligned} &\Phi(Y, S_\tau X) \cdot \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v(\mu_f(X))\}]\} = \\ &= \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot \{[1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] + [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot \\ &\quad \cdot \Theta_f^\tau(X)\} = \Phi(Y, X), \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} &\{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)]\} = \\ &= \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} + \\ &+ \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]\}]\} \cdot \alpha\{R(Y) \dot{-} R(X)\}, \end{aligned}$$

und der zweite Summand rechts gleich O nach (14.33) ist.

$$(14.36) \quad [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O.$$

Folgerung:

$$(14.37) \quad [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \Theta_f^\tau(X) = O.$$

Jetzt beweisen wir

$$(14.38) \quad [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \alpha[\mu_f(X)] = O.$$

Beweis. $F(O) = O$, $F(S_\tau X) = [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \alpha[\mu_f(X)] \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)] + [1 \dot{-} \alpha_f(O)] \cdot \Theta_f^\tau(X) = F(X) \cdot [1 \dot{-} \Theta_f^\tau(X)]$, also $F(X) = O$.

$$(14.39) \quad \alpha[\mu_f(X)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)] = O.$$

Beweis. $F(X, O) = O$ nach (14.38); $F(X, S_\tau Y) = O$.

(14.34)—(14.39) sind vorbereitende Gleichungen für

$$(14.40) \quad Y < \mu_f(X) \rightarrow f(Y) \neq O,$$

dh. für die Gleichung

$$(14.40') \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v[\mu_f(X)]]]\} \cdot \alpha[\mu_f(X)] \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] = O.$$

Beweis. Nach (14.35) ist die linke Seite gleich

$$[1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot \alpha[\mu_f(X)],$$

also gleich O nach (14.39).

Wir beweisen noch

$$(14.41) \quad f(Y) = O \ \& \ Y < X \rightarrow \mu_f(X) < X,$$

dh.

$$(14.41') \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v(X)]]\} \cdot \alpha(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot \alpha\{[R[\mu_f(X)] \dot{-} R(X)] + [1 \dot{-} \alpha(X)]\} = O.$$

Wegen $\alpha(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha(X)] = O$ soll man nur

$$(14.41'') \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{v(X)]]\} \cdot \alpha(X) \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot \alpha\{R[\mu_f(X)] \dot{-} R(X)\} = O$$

beweisen, was trivial wegen $R[\mu_f(X)] \dot{-} R(X) = O$ ist.

Wir bemerken noch dass aus (14.14) durch Negation

$$\neg E_Y^X[f(Y) = O] \rightarrow \mu_f(X) = O,$$

also

$$(14.42) \quad A_Y^X[f(Y) \neq O] \rightarrow \mu_f(X) = O$$

folgt.

Aus den angeführten Gleichungen kann man schliessen: $\mu_f(X)$ ist das kleinste Wort Y , $O \leq Y \leq X$, für welches $f(Y) = O$ ist, und wenn kein solches Wort existiert so ist $\mu_f(X) = O$,

15. Wir kehren nochmals zur logischen Konstanten zurück und definieren

$$(15.1) \quad L_Y^X[f(Y) = O] \text{ steht für } \mu_f(X).$$

Es folgen:

$$(15.2) \quad L_Y^X p(Y) \leq X, \quad [(14.8)],$$

$$(15.3) \quad A_Y^X \neg p(Y) \rightarrow [L_Y^X p(Y)] = O, \quad [(14.42)],$$

$$(15.4) \quad L_Y^X p(Y) \neq O \rightarrow p(\mu_f(X)), \quad [(14.29)],$$

$$(15.5) \quad p(Y) \ \& \ Y < X \rightarrow L_Z^X p(Z) < X, \quad [(14.40)],$$

Wir bemerken dass aus (14.35) und (14.36)

$$(15.6) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{\nu[\mu_f(X)]]\}\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha_f(Y)\} \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O$$

folgt, und daraus, durch Multiplikation,

$$(15.7) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)]\} \cdot \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R\{\nu[\mu_f(X)]\}]\} \cdot \\ \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O.$$

Auf Grund von (14.34) folgt daraus

$$(15.8) \quad \{1 \dot{-} \alpha[R(Y) \dot{-} R(X)]\} \cdot [1 \dot{-} \alpha_f(Y)] \cdot \prod_{\alpha_f}(X) = O,$$

dh.

$$(15.8') \quad Y \leq X \ \& \ p(Y) \rightarrow E_Z^X p(Z).$$

Weiter gilt

$$(15.9) \quad A_Y^X p(Y) \rightarrow (Z \leq X \rightarrow p(Z)),$$

dh.

$$(15.9') \quad [1 \dot{-} \alpha(\sum_{\alpha_f}(X))] \cdot [1 \dot{-} \alpha\{R(Z) \dot{-} R(X)\}] \cdot \alpha_f(Z) = O.$$

Diese Gleichung ist nämlich die bewiesene Gleichung (15.8) mit $1 \dot{-} \alpha_f$ statt α_f .

$$(15.10) \quad \sum_{Y=0}^X \alpha(\{X, Y + R\{R(X) \sim Y\}\}) = O.$$

Beweis. Nach (11.29) und (9.10).

(15.10) sagt aus dass

$$(15.11) \quad A_Y^X(Y \leq X)$$

gilt.

Wenn wir (15.8'), (15.9) und (15.11) besitzen können wir jetzt die entsprechende Beweise des Herrn R. L. Goodstein aus [2], Seite 177, 178 und 179, wiederholen und

$$(15.12) \quad A_Y^X(Y \leq X \rightarrow p(Y)) \leftrightarrow A_Y^X p(Y),$$

$$(15.13) \quad E_Y^X(Y \leq X \& p(Y)) \leftrightarrow E_Y^X p(Y),$$

$$(15.14) \quad A_Y^X\{p(Y) \rightarrow q(Y)\} \rightarrow (E_Y^X p(Y) \rightarrow E_Y^X q(Y)),$$

$$(15.15) \quad A_Y^X\{p(Y) \leftrightarrow q(Y)\} \rightarrow (E_Y^X p(Y) \leftrightarrow E_Y^X q(Y)),$$

$$(15.16) \quad A_Y^X\{p(Y) \rightarrow q\} \leftrightarrow \{E_Y^X p(Y) \rightarrow q\},$$

$$(15.17) \quad A_Y^X A_Z^X p(Y, Z) \leftrightarrow A_Z^X A_Y^X p(Y, Z),$$

$$(15.18) \quad E_Y^X E_Z^X p(Y, Z) \leftrightarrow E_Z^X E_Y^X p(Y, Z),$$

und

$$(15.19) \quad E_Y^X A_Z^X p(Y, Z) \rightarrow A_Z^X E_Y^X p(Y, Z),$$

beweisen.

16. Bevor wir die Division der Wörter behandeln, wollen wir eine neue rekursive Definition einführen.

Definition 16.1. $F(X, Y)$ ist mittels der *reversiv umgestellten* Rekursion definiert, wenn folgendes System von $n+1$ Anfangsgleichungen vorhanden ist:

$$(16.1) \quad \begin{aligned} F(X, O) &= a(X), \\ F(X, S_\nu Y) &= b_\nu(X, Y, F(S_{\nu+1} X, Y)), \quad \nu=0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Wir wollen beweisen dass diese Rekursion mittels umgestellter Rekursion eliminiert werden kann.

Sei $F(X, Y)$ mittels (16.1) definiert. Wir setzen $\Phi(X, Y) = F(R(X), Y)$. Dann ist $\Phi(X, O) = a(R(X)) = A(X)$ und $\Phi(X, S_\tau Y) = b_\nu(R(X), Y, F(S_{\nu+1} R(X), Y)) = b_\nu(R(X), Y, \Phi(S_{\nu+1} X, Y)) = B_\nu(X, Y, \Phi(S_{\nu+1} X, Y))$

$v=0, 1, \dots, n-1$ also ist $\Phi(X, Y)$ durch umgestellte Rekursion definiert. Natürlich sind $A(X)$ und alle B_v rekursive Funktionen wenn es $a(X)$ und alle b_v sind. Jetzt ist $F(X, Y) = \Phi(R(X), Y)$ also wieder eine rekursive Funktion.

Somit bringt reversiv umgestellte Rekursion kein neues Axiom in unsere Arithmetik der Wörter.

17. Wir definieren endlich $r(X, Y)$ — den Rest bei der Division des Wortes X durch das Wort Y , und $q(X, Y)$ — den Quotienten dieser Division:

$$(17.1) \quad \begin{aligned} r(O, Y) &= O, \\ r(S_\mu X, Y) &= [S_\mu r(X, Y)] \cdot \alpha(|S_\mu r(X, Y), Y|), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

$$(17.2) \quad \begin{aligned} q(O, Y) &= O, \\ q(S_\mu X, Y) &= q(X, Y) + \{1 \dot{-} \alpha(|S_\mu r(X, Y), Y|)\}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Diese Definitionen entsprechen genau den klassischen Definitionen der rekursiven Zahlentheorie. Mit ihnen gilt

$$(17.3) \quad X = Y \cdot q(X, Y) + r(X, Y).$$

Beweis. $\varphi(O, Y) = O, \quad \varphi(S_\mu X, Y) = Y \cdot q(X, Y) + Y \cdot [1 \dot{-} \alpha(|S_\mu r(X, Y), Y|)] + [S_\mu r(X, Y)] \cdot \alpha(|S_\mu r(X, Y), Y|) = Y \cdot q(X, Y) + S_\mu r(X, Y) = S_\mu \varphi(X, Y)$ nach (4.12) und (8.33).

Aus (17.3) ist ersichtlich dass $r(X, Y)$ immer am Beginne des Wortes X steht. Dazu gilt: $q(X, Y)$ ist immer eine natürliche Zahl, dh.

$$(17.4) \quad s_0(q(X, Y)) = q(X, Y).$$

Weiter folgt aus (17.3)

$$(17.5) \quad r(X, Y) = O \rightarrow X = Y \cdot q(X, Y).$$

Wir wollen jetzt

$$(17.6) \quad X = Y \cdot s_0(Z) \ \& \ Z \neq O \rightarrow Y \leq X,$$

dh.

$$(17.6') \quad \{1 \dot{-} \alpha(|R(X), R(Y) \cdot s_0(Z)|)\} \cdot \alpha(R(Z)) \cdot \{R(Y) \dot{-} R(X)\} = O$$

beweisen. Dazu genügt es zuerst

$$(17.6'') \quad \{1 \dot{-} \alpha(|U, A + V|)\} \cdot \alpha(V \dot{-} U) = O$$

durch doppelte Rekursion nach V und U zu beweisen und dann folgt (17.6') aus

$$(17.6''') \quad \{1 \dot{-} \alpha(|U, V \cdot s_0(Z)|)\} \cdot \alpha(Z) \cdot \alpha(V \dot{-} U) = O.$$

Diese Gleichung aber wird durch einfache Rekursion nach Z , mittels (17.6''') leicht bewiesen.

Aus (17.5) und (17.6) folgt

$$(17.7) \quad r(X, Y) = O \ \& \ q(X, Y) \neq O \rightarrow Y \leq X.$$

Also: wenn ein Wort X mit einem Worte Y teilbar ist so liegt Y immer unter X . Teilbarkeit kann nur bei Wörtern auf derselben Faser stattfinden.

$$(17.8) \quad r(s_0(X), S_0) = O.$$

Beweis. $f(O) = O$, $f(S_0 X) = [S_0 r(s_0(X), S_0)] \cdot \alpha(|r(s_0(X), S_0), O|) = [S_0 f(X)] \cdot \alpha[f(X)]$. Dieselbe Gleichungen erfüllt $\varphi(X) = O$.

$$(17.9) \quad r(X, O) = O,$$

also: jedes Wort ist durch das leere Wort teilbar.

Wir brauchen noch einige Formeln über $\alpha(X)$. Es ist leicht

$$(17.10) \quad [\alpha(X) = O \leftrightarrow \alpha(Y) = O] \rightarrow \alpha(X) = \alpha(Y)$$

zu beweisen. Weil aber

$$\alpha(|U, V|) = O \leftrightarrow \alpha(|R(U), R(V)|) = O$$

gilt, so folgt

$$(17.11) \quad \alpha(|U, V|) = \alpha(|R(U), R(V)|).$$

Man beweist durch Umrechnen

$$(17.12) \quad \alpha(|U, V+U|) = \alpha(V).$$

Daraus und aus (17.11) folgt $\alpha(|R(U), R(U)+R(V)|) = \alpha(R(V))$, dh.

$$(17.13) \quad \alpha(|X, X+Y|) = \alpha(Y).$$

Jetzt können wir

$$(17.14) \quad r(X, X+Y) = X \cdot \alpha(Y)$$

beweisen.

Beweis. $f(O, Y) = O$, $f(S_\tau X, Y) = r(S_\tau X, X + (S_\tau + Y)) = [S_\tau r(X, X + (S_\tau + Y))] \cdot \alpha(|S_\tau r(X, X + (S_\tau + Y)), S_\tau X + Y|) = [S_\tau f(X, S_\tau + Y)] \cdot \alpha(|S_\tau f(X, S_\tau + Y), S_\tau X + Y|)$. Dieselbe Gleichungen für reversiv umgestellte Rekursion besitzt $\varphi(X, Y) = X \cdot \alpha(Y)$, wenn man bemerkt dass nach (17.3) $\alpha(|S_\tau X, S_\tau X + Y|) = \alpha(Y)$ und dazu $\alpha(S_\tau + Y) = 1$ ist.

Aus (17.14) folgt

$$(17.14') \quad r(X, X) = O.$$

und überhaupt dass ein Wort mit keinem Worte das nach ihm folgt teilbar sei.

$$(17.15) \quad r(Y + X, Y) = r(X, Y).$$

Beweis. $f(O, Y) = r(Y, Y) = O, f(S_\tau X, Y) = [S_\tau f(X, Y)] \cdot \alpha(|S_\tau f(X, Y), Y|).$

Wir bemerken

$$(17.16) \quad X \cdot s_0(S_{\text{II}} Z) = X + X \cdot s_0(Z)$$

und daraus

$$(17.16') \quad Y \cdot s_0(Z) + Y = Y + Y \cdot s_0(Z).$$

Jetzt können wir

$$(17.17) \quad r(Y \cdot s_0(Z), Y) = O$$

beweisen.

Beweis. $f(O, Y) = O, f(S_{\text{II}} Z, Y) = r(Y + Y \cdot s_0(Z), Y) = r(Y \cdot s_0(Z), Y) = f(Z, Y)$ nach (17.16') und (17.15).

Wir schliessen: das Produkt aus einem Worte und einer natürlichen Zahl ist durch jenes Wort teilbar. (Spezialfall: das Produkt zweier natürlichen Zahlen ist mit jedem der Faktoren teilbar.)

Aus (17.17) folgt nach (12.12)

$$(17.17') \quad X = Y \cdot s_0(Z) \rightarrow r(X, Y) = O.$$

Wir widmen uns jetzt dem Quotienten zu.

$$(17.18) \quad q(X, X + Y) = [1 \dot{-} \alpha(Y)] \cdot \alpha(X)$$

Beweis. $f(O, Y) = O, f(S_\tau X, Y) = f(X, S_\tau + Y) + \{1 \dot{-} \alpha(|S_\tau X, S_\tau X + Y|)\} = f(X, S_\tau + Y) + [1 \dot{-} \alpha(Y)].$
 $\varphi(O, Y) = O, \varphi(S_\tau X, Y) = O + [1 \dot{-} \alpha(Y)] = \varphi(X, S_\tau + Y) + [1 \dot{-} \alpha(Y)],$ weil $1 \dot{-} \alpha(S_\tau + Y) = O$ ist. Hier ist zum zweiten- (und letzten) mal reversiv umgestellte Rekursion angewendet.

Folgerung:

$$(17.18') \quad q(X, X) = \alpha(X), \text{ dh. } q(O, O) = O \text{ und } q(S_{\text{II}} X, S_{\text{II}} X) = 1.$$

$$(17.19) \quad q(Y+X, Y) = q(X, Y) + \alpha(Y).$$

Beweis. $f(O, Y) = \alpha(Y)$, $f(S_\tau X, Y) = f(X, Y) +$
 $+ \{1 \dot{-} \alpha(|S_\tau r(Y+X, Y), Y|)\} = f(X, Y) + \{1 \dot{-} \alpha(|S_\tau r(X, Y), Y|)\}.$
 $\varphi(O, Y) = \alpha(Y)$, $\varphi(S_\tau X, Y) = \varphi(X, Y) + \{1 \dot{-} \alpha(|S_\tau r(X, Y), Y|)\}.$

$$(17.20) \quad q(Y \cdot s_0(Z), Y) = s_0(Z) \cdot \alpha(Y).$$

Beweis. $f(O, Y) = O$, $f(S_\tau Z, Y) = q(Y + Y \cdot s_0(Z), Y) = f(Z, Y) + \alpha(Y)$ nach
(17.19). $\varphi(O, Y) = O$, $\varphi(S_\tau Z, Y) = \alpha(Y) \cdot S_0 s_0(Z) = \varphi(Z, Y) + \alpha(Y).$

Also gilt

$$X = Y \cdot s_0(Z) \rightarrow q(X, Y) = s_0(Z) \cdot \alpha(Y)$$

und dann auch

$$(17.21) \quad X = Y \cdot s_0(Z) \ \& \ Y \neq O \rightarrow q(X, Y) = s_0(Z) \cdot \alpha(Y),$$

dh.

$$(17.21') \quad [1 \dot{-} \alpha(|X, Y \cdot s_0(Z)|)] \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha(|q(X, Y), s_0(Z) \cdot \alpha(Y)|) = O.$$

Aber es gilt

$$(17.22) \quad \alpha(|A, B \cdot \alpha(Y)|) = \alpha(|A, B|) \cdot \alpha(Y) + \alpha(A) \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)]$$

und wenn man $\alpha(Y) \cdot [1 \dot{-} \alpha(Y)] = O$ berücksichtigt folgt aus (17.21')

$$(17.23) \quad [1 \dot{-} \alpha(|X, Y \cdot s_0(Z)|)] \cdot \alpha(Y) \cdot \alpha(|q(X, Y), s_0(Z)|) = O,$$

dh.

$$(17.24) \quad X = Y \cdot s_0(Z) \ \& \ Y \neq O \rightarrow q(X, Y) = s_0(Z).$$

Aus (17.17') und (17.24) folgt

$$(17.25) \quad X = Y \cdot s_0(Z) \ \& \ Y \neq O \rightarrow r(X, Y) = O \ \& \ q(X, Y) = s_0(Z).$$

Mittels (17.17') beweist man leicht durch Rekursion nach A

$$(17.26) \quad r(Y \cdot s_0(Z) + A, Y) = r(A, Y),$$

dh.

$$(17.26') \quad X = Y \cdot s_0(Z) + A \rightarrow r(X, Y) = r(A, Y).$$

Daraus folgt

$$(17.27) \quad X = Y \cdot s_0(Z) + A \ \& \ r(A, Y) = A \rightarrow r(X, Y) = A.$$

Aus $X = Y \cdot q(X, Y) + r(X, Y)$ und den beweisbaren Aussagen

$$(17.28) \quad \begin{aligned} X = A + B \ \& \ A = O &\rightarrow X = B \\ X = A + B \ \& \ X = B &\rightarrow A = O \end{aligned}$$

folgt

$$(17.29) \quad q(X, Y) = O \leftrightarrow r(X, Y) = X.$$

Jetzt beweisen wir

$$(17.30) \quad q(Y \cdot s_0(Z) + A, Y) = s_0(Z) \cdot \alpha(Y) + q(A, Y).$$

Beweis. $f(O, Y, Z) = q(Y \cdot s_0(Z), Y) = s_0(Z) \cdot \alpha(Y)$ nach (17.20).

$$f(S_{\tau}A, Y, Z) = f(A, Y, Z) + \{1 \dot{-} \alpha(|S_{\tau}r(A, Y), Y|)\}. \quad \varphi(O, Y, Z) = s_0(Z) \cdot \alpha(Y), \\ \varphi(S_{\tau}A, Y, Z) = \varphi(A, Y, Z) + \{1 \dot{-} \alpha(|S_{\tau}r(A, Y), Y|)\}.$$

Aus (17.30) folgt

$$(17.31) \quad X = Y \cdot s_0(Z) + A \ \& \ Y \neq O \rightarrow q(X, Y) = s_0(Z) + q(A, Y)$$

und daraus

$$(17.31') \quad X = Y \cdot s_0(Z) + A \ \& \ Y \neq O \ \& \ q(A, Y) = O \rightarrow q(X, Y) = s_0(Z)$$

Daraus, aus (17.27) und (17.29) folgt endlich

$$(17.32) \quad X = Y \cdot s_0(Z) + A \ \& \ Y \neq O \ \& \ q(A, Y) = O \rightarrow \\ \rightarrow r(X, Y) = A \ \& \ q(X, Y) = s_0(Z).$$

Diese Aussage unterscheidet sich etwas von der Aussage in der die Bedingung $Y \neq O \ \& \ q(A, Y) = O$ durch $A < Y$ ersetzt ist, und die der klassischen mehr ähnlich ist.

Weil aber $r(A, A + R\{R(Y) \sim A\}) = A \cdot \alpha(Y \sim A)$ und nach (13.23) $A < Y \rightarrow \alpha(Y \sim A) = 1$, so bekommen wir auch

$$(17.33) \quad X = Y \cdot s_0(Z) + A \ \& \ A < Y \rightarrow r(X, Y) = A \ \& \ q(X, Y) = s_0(Z).$$

Diese Aussage aber besagt weniger als (17.32).

Wenn wir

$$(17.34) \quad Q(X) = L_Y^X \{Y \neq O \ \& \ X \neq s_0(X) \ \& \ r(X, Y) = O\}$$

definieren, aus (14.40) folgt

$$(17.35) \quad X \neq s_0(X) \ \& \ Y \neq O \ \& \ Y < Q(X) \rightarrow r(X, Y) \neq O,$$

dh.: Wenn X keine natürliche Zahl ist so ist $Q(X)$ das kleinste Wort $\neq O$ durch welches X teilbar ist.

Also, wenn $Q(X) = X$ gilt, ist X ein Primwort. Weil aber nach (14.19) $r(X, Q(X)) = O$ gilt, kann man schliessen dass jedes Wort, das keine natürliche Zahl ist, entweder ein Primwort ist, oder gleich dem Produkte aus einem kleineren Primwort und einer natürlichen Zahl ist. Für natürliche Zahlen kann man die übliche Faktorisierung gewinnen.

18. Wir glauben genug Tatsachen angebracht zu haben um das System der rekursiven Wortarithmetik genau beschreiben zu können. Natürlich, stellt unsere Untersuchung den ersten Schritt im Studium dieser Arithmetik. Fast alle Probleme der klassischen rekursiven Zahlentheorie haben ihr Gegenstück in der rekursiven Wortarithmetik. Doch, kann die Verfolgung solcher Analoga nicht als Endziel der rekursiven Wortarithmetik betrachtet werden. Diese soll vorwiegend als eine Möglichkeit, den Zugang zu der Theorie der Algorithmen ganz zu formalisieren, betrachtet werden. Unter dieser Formalisation denken wir an die Möglichkeit alle Aussagen über Wörter eines Alphabets durch entsprechende Gleichungen der rekursiven Wortarithmetik zu ersetzen und jene Aussagen als Interpretationen solcher Gleichungen zu betrachten.

Eine zweite Möglichkeit bezieht sich auf eine Vereinfachung der konkreten Algorithmenprogramme. Wenn man nämlich die rekursiven Wortfunktionen als unmittelbar „berechenbar“ betrachtet so kann man die umständliche Programme z. B. bei Markoffschen Algorithmen (die dadurch verursacht werden das eine einzige rekursive Wortfunktion bei den Umformungen verwendet wird) durch einfachere, mit passenden rekursiven Wortfunktionen, ersetzen.

Damit ist auch eine dritte Möglichkeit, die der Verallgemeinerung des Begriffes Algorithmus, eng verbunden. Dazu bemerken wir dass Herr G. Asser schon früher ([6]) die Begriffe der primitiv-, allgemein- und partiell-rekursiven Wortfunktionen eingeführt hat, wobei sich seine primitiv-rekursiven Wortfunktionen mit unseren decken. Wenn man den Begriff des Algorithmus verallgemeinern will ist zweckmässiger die allgemein- und partiell-rekursiven Wortfunktionen heranzuziehen. Diese Möglichkeit wurde in einer gemeinsamen Arbeit von Herrn G. Asser und uns, die in der Zeitschr. für. math. Logik und Grundlagen der Math. erscheinen wird, untersucht.

L I T E R A T U R

- [1] V. Vučković — Partially ordered recursive arithmetics. *Math. Scandinavica* 7 (1959), 305—320.
- [2] R. L. Goodstein — Recursive number theory, Amsterdam (1957).
- [3] H. Hermes — Semiotik. *Forsch. zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, No. 5. Leipzig, 22 p. (1938).
- [4] S. C. Kleene — Introduction to Metamathematics, New York (1952).
- [5] E. Stenius — Linguistic structure and the structure of experience. *Theoria, Lund*, 20 (1954) 153—172. (Nur aus dem Referat in „*Journ. for symb. Logic*“ bekannt.)
- [6] G. Asser — Recursive Wortfunktionen (Vortrag auf der Tagung der Deutschen Math. Vereinigung 1959 in Münster; *Zeitschr. für Math. Logik und Grundlagen der Math.* 6 (1960), im Druck).