LES DÉRIVÉES COVARIANTES INTRINSÈQUES DANS L'ESPACE X_n À CONNEXION MÉTRIQUE

M. PRVANOVIĆ (Novi Sad)

1. *OBJET DU TRAVAIL.* — Dans ce qui suit nous considérerons un espace à n dimensions X_n rapporté aux coordonnées $x^1, x^2, \dots x^n$ et doué d'une métrique positive et définite

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n) \tag{1.1}$$

c'est à dire d'un tenseur fondamental $a_{ij} = a_{ji}$, et d'une connexion $\Gamma^i_{jk}(x)$ qui n'est pas symétrique. Alors,

$$\Gamma^i_{[jk]} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) = T^i_{jk}, \tag{1.2}$$

où T^i_{jk} sont les composantes du tenseur de torsion. Donc, X_n est un espace à connexion métrique [1].

Envisageons dans X_n un système de référence formé par un n-tuple de congruences de courbes orientées, linéairement indépendantes. L'étude intrinsèque d'espace X_n se fait par rapport à un tel système de référence.

M. St. Petrescu [2] a étudié l'espace X_n de ce point de vue. Il a introduit la notion des composantes intrinsèques de la connexion de l'espace, ainsi que la dérivée covariante intrinsèque d'un vecteur.

Cependant, on peut montrer:

1) qu'il existe deux systèmes des composantes intrinsèques de Γ^i_{jk};

2) que chaque vecteur de X_n admet quatre dérivées covariantes intrinsèques.

Ce sera le but du présent travail. En continuant ces recherches, nous allons:

3) généraliser, pour les tenseurs, les considérations 2);

4) donner quelques applications des résultats précédants.

2. *NOTATIONS ET RELATIONS PRÉLIMINAIRES.* — La connexion Γ^i_{jk} n'étant pas symétrique, un vecteur quelconque V^i d'espace X_n a deux dérivées covariantes:

$$\nabla_k V^{\overset{i}{+}} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V^j, \qquad \nabla_k V^{\overset{i}{-}} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} V^j. \tag{2.1}$$

Plus généralement nous avons:

$$\nabla_k V^{\overset{i_1}{+}\overset{i_2}{-}\dots\overset{i_p}{-}}{}_{\underset{-}{j_1}\underset{-}{j_2}\dots\underset{+}{j_q}} = \frac{\partial V^{i_1\dots i_p}{}_{j_1 j_2 \dots j_q}}{\partial x^k} + \Gamma^{i_1}_{tk} V^{t i_2 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} +$$

$$+ \Gamma^{i_2}_{kt} V^{i_1 t i_3 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} + \dots + \Gamma^{i_p}_{kt} V^{i_1 \dots i_{p-1} t}{}_{j_1 \dots j_q} - \tag{2.2}$$

$$- \Gamma^t_{kj_1} V^{i_1 \dots i_p}{}_{t \dots j_q} - \dots - \Gamma^t_{kj_{q-1}} V^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_{q-2} t j_q} - \Gamma^t_{j_q k} V^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_{q-1} t}.$$

L'identité qui affirme que la dérivée covariante du tenseur fondamental a_{ij}, par rapport à Γ^i_{jk}, est nulle s'exprime sous trois formes différentes, à savoir:

$$\nabla_k a_{\underset{+}{i}\underset{+}{j}} \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma^t_{ik} a_{tj} - \Gamma^t_{jk} a_{it} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla_k a_{\underset{-}{i}\underset{-}{j}} \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma^t_{ki} a_{tj} - \Gamma^t_{kj} a_{it} = 0, \tag{2.4}$$

$$\nabla_k a_{\underset{+}{i}\underset{-}{j}} \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^t_{ik} a_{tj} - \Gamma^t_{kj} a_{it} = 0. \tag{2.5}$$

Les $n^2(n+1)/2$ équations (2.3) et les $n^2(n-1)/2$ équations (1.2) forment un système de n^3 équations qui suffit à déterminer les n^3 inconnus Γ^i_{jk}. En résolvant ce système on obtient:

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + T^i_{jk} + 2\, T^{i}_{\cdot (kj)}, \tag{2.6}$$

où $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce formés avec les a_{ij}, et [2]

$$T^i_{\cdot jk} = a^{il} a_{km} T^m_{jl} \tag{2.7}$$

$$T^i_{\cdot (jk)} \equiv \frac{1}{2} \left(T^i_{\cdot jk} + T^i_{\cdot kj} \right).$$

D'autre part, la résolution des équations (1.2) et (2.4) nous donne ([1], p. 131; [2])

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + T^i_{jk} - 2\, T^{i}_{\cdot (jk)}. \tag{2.8}$$

Enfin, du système d'équations (1.2) et (2.5), nous obtenons:

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}. \tag{2.9}$$

Donc.

L'espace X_n, où la conservation de la longueur d'un vecteur par le transport par parallélisme est déterminée par (2.5), *est un espace riemannien dont les coefficients de connexion Γ^i_{jk} sont les symboles de Christoffel $\left\{ {i \atop jk} \right\}$; les coefficients de connexion Γ^i_{jk} d'espace X_n, où la conservation de la longueur d'un vecteur par le transport par parallélisme est déterminé par* (2.3), [(2.4)] *s'exprime sous la forme* (2.6) [(2.8)].

Ainsi, le tenseur fondamental a_{ij} de la métrique (1.1) et le tenseur T^i_{jk} ne déterminent pas la connexion Γ^i_{jk} qu'à l'aide d'une des équations (2.3), (2.4) ou (2.5). Dans ce qui suit nous supposerons qu'on a (2.3) ou (2.4), et que le tenseur T^i_{jk} de torsion est différent de zéro, car dans le cas contraire (2.3) et (2.4) se réduisent à (2.5), ainsi que (2.6) et (2.8) se réduisent à (2.9), de sorte que l'espace X_n devient en tous cas un espace riemannien.

Un n-tuple de congruences de courbes orientées indépendantes C_α dans l'espace X_n est défini par le système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dx^1}{\lambda^1_\alpha} = \frac{dx^2}{\lambda^2_\alpha} = \ldots = \frac{dx^n}{\lambda^n_\alpha},$$

où $\lambda^i_\alpha\,(\sigma, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ sont les vecteurs contrevariants unitaires, linéairement indépendantes. Si l'on désigne par λ^α_i les réciproques du déterminant $|\lambda^i_\alpha|$, nous avons

$$\lambda^i_\alpha \lambda^\alpha_j = \delta^i, \qquad \lambda^i_\alpha \lambda^\beta_i = \delta^\beta_\alpha. \tag{2.10}$$

En désignant par ds^α la différentielle de l'arc d'une courbe C_α nous avons les formes de Pfaff:

$$ds^\alpha = \lambda^\alpha_i\, dx^i, \tag{2.11}$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$dx^i = \lambda^i_\alpha ds^\alpha. \tag{2.12}$$

V^i (V_i) étant les composantes contrevariantes (covariantes) d'un vecteur V de X_n, nous appelons les quantités

$$V^\alpha = \lambda^\alpha_i V^i, \qquad V_\alpha = \lambda^i_\alpha V_i. \tag{2.13}$$

les composantes intrinsèques [2] de V, par rapport à un tel n-uple. De (2.13) il suit

$$V^i = \lambda^i_\alpha V^\alpha, \qquad V_i = \lambda^\alpha_i V_\alpha. \tag{2.14}$$

Plus généralement, les composantes ordinaires $V^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_q}$ et les composantes intrinsèques d'un tenseur de X_n sont lieés par

$$V^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \lambda^{\alpha_1}_{i_1} \ldots \lambda^{\alpha_p}_{i_p} \lambda^{j_1}_{\beta_1} \ldots \lambda^{j_q}_{\beta_q} V^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_q}, \tag{2.15}$$

et

$$V^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_q} = \lambda^{i_1}_{\alpha_1} \ldots \lambda^{i_p}_{\alpha_p} \lambda^{\beta_1}_{j_1} \ldots \lambda^{\beta_q}_{j_q} V^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}. \tag{2.16}$$

Ainsi, les composantes intrinsèques du tenseur fondamental sont

$$a_{\alpha\beta} = a_{ij} \lambda^i_\alpha \lambda^j_\beta, \qquad a^{\alpha\beta} = a^{ij} \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j, \tag{2.17}$$

et la métrique de l'espace X_n peut être écrite sous la forme [2]

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, ds^\alpha ds^\beta.$$

3. *DEUX SYSTÈMES DES COMPOSANTES INTRINSÈQUES DE* Γ^i_{jk}. — Partons de l'expression $\lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma \nabla_k \overset{i}{V}{+}$. En vertu de (2.1), (2.12) et (2.14) nous avons

$$\lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma \nabla_k \overset{i}{V}{+} = \lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^j \Gamma^i_{jk} \right) =$$

$$= \lambda^\alpha_i \frac{\partial V^i}{\partial s^\gamma} + \lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma V^j \Gamma^i_{jk} =$$

$$= \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} - V^\beta \lambda^i_\beta \frac{\partial \lambda^\alpha_i}{\partial s^\gamma} + \lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma \lambda^j_\beta V^\beta \Gamma^i_{jk}.$$

En différentiant la deuxième relation (2.10), nous obtenons

$$- \frac{\partial \lambda^\alpha_i}{\partial s^\gamma} \lambda^i_\beta = \lambda^\alpha_i \frac{\partial \lambda^i_\beta}{\partial s^\gamma},$$

de sorte que

$$\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \nabla_k \overset{i}{V}{+} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} + V^\beta \left(\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \lambda_\beta^j \Gamma_{jk}^i + \lambda_i^\alpha \frac{\partial \lambda_\beta^i}{\partial s^\gamma} \right). \tag{3.1}$$

Ainsi, en posant

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}^\alpha = \lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\gamma^k \Gamma_{jk}^i + \lambda_i^\alpha \frac{\partial \lambda_\beta^i}{\partial s^\gamma}, \tag{3.2}$$

nous avons

$$\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \nabla_k \overset{i}{V}{+} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} + V^\beta \overset{1}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}^\alpha,$$

d'où

$$\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \nabla_k \overset{i}{V}{+} = \overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V}{+}, \tag{3.3}$$

avec

$$\overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V}{+} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} + V^\beta \overset{1}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}^\alpha. \tag{3.4}$$

$\overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V}{+}$ désigne *la première dérivée covariante intrinsèque positive* pour les composantes contrevariantes intrinsèques du vecteur V; c'est cette dérivée covariante intrinsèque qui était déjà trouvée par M. St. P e t r e s c u [2].

Les quantités (3.2) font le système des composantes intrinsèques introduit dans [2]; nous l'appelerons *le premier système des composantes intrinsèques de la connexion* Γ_{jk}^i.

De même, la première dérivée covariante positive intrinsèque pour les composantes covariantes V_α, s'exprime sous la forme

$$\overset{1}{\nabla}_\gamma V_{\underset{+}{\alpha}} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial s^\gamma} - V_\tau \overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha\gamma}^\tau; \tag{3.5}$$

elle est liée à la dérivée ordinaire par la relation

$$\lambda_\alpha^i \lambda_\gamma^k \nabla_k V_{\underset{+}{i}} = \overset{1}{\nabla}_\gamma V_{\underset{+}{\alpha}}. \tag{3.6}$$

Considérons, maintenant, l'expression

$$\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \nabla_k \overset{i}{V}{-} = \lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i V^j \right),$$

d'où, en vertu de (2.12), (2.14) et (3.1) nous déduisons

$$\begin{aligned} \lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \nabla_k \overset{i}{V}{-} &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} - V^\beta \lambda_\beta^i \frac{\partial \lambda_i^\alpha}{\partial s^\gamma} + \lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \lambda_\beta^j V^\beta \Gamma_{kj}^i \\ &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} + V^\beta \left(\lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\gamma^k \Gamma_{kj}^i + \frac{\partial \lambda_\beta^i}{\partial s^\gamma} \lambda_i^\alpha \right). \end{aligned}$$

Donc,

(3.7) $$\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k \nabla_k \overset{i}{V_-} = \overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V_+},$$

où

(3.8) $$\overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V_+} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial s^\gamma} + \overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} V^\beta$$

est *la deuxième dérivée covariante positive intrinsèque* des composantes contrevariantes intrinsèque du vecteur V, et

(3.9) $$\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\gamma^k \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial \lambda_\beta^i}{\partial s^\gamma} \lambda_i^\alpha$$

est *le deuxième système des composantes intrinsèques* de la connexion Γ^i_{jk}.

Il est facile à voir qu'on a, pour les composantes covariantes intrinsèques de V,

(3.10) $$\overset{2}{\nabla}_\gamma \underset{+}{V_\alpha} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial s^\gamma} - \overset{2}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha\gamma} V_\beta$$

et

(3.11) $$\lambda_\alpha^i \lambda_\gamma^k \nabla_k \underset{-}{V_i} = \overset{2}{\nabla}_\beta \underset{+}{V_\alpha}.$$

En substituant dans (3.9) l'expression (1.2) pour Γ^i_{jk}, nous obtenons

(3.12) $$\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} - 2\, T^\alpha_{\beta\gamma}$$

où [2]

(3.13) $$T^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\gamma^k T^i_{jk}.$$

Les relations (3.12) et (3.13) montrent que dans le cas d'espace riemannien, c'est à dire quand $T^i_{jk} = 0$, les deux systèmes des composantes intrinsèques $\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ et $\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ coincident.

D'autre part, retranchant l'équation (3.7) de (3.3) et en tenant compte de (3.4), (3.8) et (3.1.) nous avons:

(3.14) $$\lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k (\nabla_k \overset{i}{V_+} - \nabla_k \overset{i}{V_-}) = 2\, V^\beta\, T^\alpha_{\beta\gamma}.$$

Cette relation donne une interprétation géométrique du tenseur $T^\alpha_{\beta\gamma}$.

De la même manière on démontre que

(3.15) $$\lambda_\alpha^i \lambda_\gamma^k (\nabla_k \underset{+}{V_i} - \nabla_k \underset{-}{V_i}) = -2\, V_\beta\, T^\beta_{\alpha\gamma}.$$

Dans les équations (3.3) et (3.7) apparaissent seulement les dérivées covariantes intrinsèques positives. Mais les connexions intrinsèques $\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et $\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, comme on le voit de (3.2) et (3.9), ne sont pas symétriques. Donc, nous pouvons aussi considérer *les dérivées covariantes intrinsèques négatives* du vecteur V, c'est à dire

$$\overset{1}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial s^{\gamma}} + \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma\beta} V^{\beta}, \qquad \overset{2}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial s^{\gamma}} + \overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma\beta} V^{\beta}. \tag{3.16}$$

Nous établirons les liaisons entre ces dérivées et les dérivées ordinaires du vecteur V. En effet,

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} &= \lambda^{\alpha}_{i} \frac{\partial V^{i}}{\partial s^{\gamma}} + V^{i} \frac{\partial \lambda^{\alpha}_{i}}{\partial s^{\gamma}} + V^{\beta}\left(\lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} \lambda^{j}_{\beta} \Gamma^{i}_{kj} + \lambda^{\alpha}_{i} \frac{\partial \lambda^{i}_{\gamma}}{\partial s^{\beta}}\right) \\
&= \lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} \frac{\partial V^{i}}{\partial x^{k}} + \lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} V^{j} \Gamma^{i}_{kj} + V^{\beta} \lambda^{j}_{\beta} \lambda^{k}_{\gamma} \frac{\partial \lambda^{\alpha}_{j}}{\partial x^{k}} + V^{\beta} \lambda^{j}_{\beta} \lambda^{\alpha}_{i} \frac{\partial \lambda^{i}_{\gamma}}{\partial x^{j}} \\
&= \lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} \left(\frac{\partial V^{i}}{\partial x^{k}} + V^{j} \Gamma^{i}_{kj}\right) + V^{\beta} \lambda^{j}_{\beta} \lambda^{k}_{\gamma} \left(\frac{\partial \lambda^{\alpha}_{j}}{\partial x^{k}} - \Gamma^{i}_{kj} \lambda^{\alpha}_{i}\right) + V^{\beta} \lambda^{j}_{\beta} \lambda^{\alpha}_{i} \left(\frac{\partial \lambda^{i}_{\gamma}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{i}_{kj} \lambda^{k}_{\gamma}\right)
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\overset{1}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} = \lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} V^{\overset{i}{-}} + V^{j} \left(\lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} \lambda^{\alpha}_{\underset{-}{j}} + \lambda^{\alpha}_{i} \nabla_{j} \lambda^{\overset{i}{+}}_{\gamma}\right). \tag{3.17}$$

De même nous obtenons

$$\overset{1}{\nabla}_{\gamma} V_{\underset{-}{\alpha}} = \lambda^{i}_{\alpha} \lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} V_{\underset{-}{i}} + V_{i} \left(\lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} \lambda^{\overset{i}{-}}_{\alpha} - \lambda^{j}_{\alpha} \nabla_{j} \lambda^{\overset{i}{+}}_{\gamma}\right) \tag{3.18}$$

$$\overset{2}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} = \lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} V^{\overset{i}{+}} + V^{j} \left(\lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} \lambda^{\alpha}_{\underset{+}{j}} + \lambda^{\alpha}_{i} \nabla_{j} \lambda^{\overset{i}{-}}_{\gamma}\right) \tag{3.19}$$

$$\overset{2}{\nabla}_{\gamma} V_{\underset{-}{\alpha}} = \lambda^{i}_{\alpha} \lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} V_{\underset{+}{i}} + V_{i} \left(\lambda^{k}_{\gamma} \nabla_{k} \lambda^{\overset{i}{-}}_{\alpha} - \lambda^{j}_{\alpha} \nabla_{j} \lambda^{\overset{i}{+}}_{\gamma}\right). \tag{3.20}$$

Nous voyons, donc, que *la connexion* Γ^{i}_{jk} *d'espace* X_n *admet deux systèmes des composantes intrinsèques*, (3.2) *et* (3.9), *et qu'à chaque vecteur* V^{i} *de* X_n *on peut associer quatre dérivées covariantes intrinsèques, à savoir* (3.4), (3.8) et (3.16).

Ces quatre dérivées covariantes intrinsèques sont liées entre eux par des relations interéssant. En effet, de (3.19) et (3.17) il suit

$$\overset{2}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} - \overset{1}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{\alpha}{-}} = \lambda^{\alpha}_{i} \lambda^{k}_{\gamma} \left(\nabla_{k} V^{\overset{i}{+}} - \nabla_{k} V^{\overset{i}{-}}\right) \tag{3.21}$$

parce que

$$\lambda_\gamma^k \nabla_k \lambda_{\underset{+}{j}}^\alpha + \lambda_i^\alpha \nabla_j \lambda_{\gamma}^{\overset{i}{-}} = \lambda_\gamma^k \nabla_k \lambda_{\underset{-}{j}}^\alpha + \lambda_i^\alpha \nabla_j \lambda_\gamma^{\overset{i}{+}}$$

ce qu'il est facile de constater.

En comparant les équations (3.14) et (3.21) nous voyons que

$$\overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^-} - \overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^-} = 2\, V^\beta T_{\beta\gamma}^\alpha. \tag{3.22}$$

Cette relation donne une nouvelle interprétation géométriqne du tenseur $T_{\beta\gamma}^\alpha$.

D'autre part en vertu de (3.3) et (3.7), nous avons

$$\overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^+} - \overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^-} = \lambda_i^\alpha \lambda_\gamma^k (\nabla_k \overset{i}{V^+} - \nabla_k \overset{i}{V^-}). \tag{3.23}$$

De (3.21) et (3.23) nous obtenons

$$\overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^-} - \overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^-} = \overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^+} - \overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{V^+}, \tag{3.24}$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\overset{1}{\nabla}_\gamma (\overset{\alpha}{V^+} + \overset{\alpha}{V^-}) = \overset{2}{\nabla}_\gamma (\overset{\alpha}{V^+} + \overset{\alpha}{V^-}). \tag{3.25}$$

4. *LES DÉRIVÉES COVARIANTES INTRINSÈQUES ASSOCIÉES AUX TENSEURS DE* X_n. — Envisageons l'expression $\lambda_\gamma^k \lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\lambda^l \nabla_k \overset{i}{V}{}^{+}_{\underset{++}{jl}}$. En vertu de (2.2), (2.12), (2.16), (3.1), (3.2) et (3.9) nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda_\gamma^k \lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\lambda^l \nabla_k \overset{i}{V}{}^{+}_{\underset{++}{jl}} &= \lambda_\gamma^k \lambda_i^\alpha \lambda_\beta^j \lambda_\lambda^l \left(\frac{\partial V_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{tk}^i V_{jl}^t - \Gamma_{jk}^t V_{tl}^i - \Gamma_{lk}^t V_{jt}^i \right) \\
&= \frac{\partial V_{\beta\lambda}^\alpha}{\partial s^\gamma} - V_{\beta\lambda}^\tau \lambda_\tau^i \frac{\partial \lambda_i^\alpha}{\partial s^\gamma} - V_{\tau\lambda}^\alpha \lambda_j^\tau \frac{\partial \lambda_\beta^j}{\partial s^\gamma} - V_{\beta\tau}^\alpha \lambda_l^\tau \frac{\partial \lambda_\lambda^l}{\partial s^\gamma} + \\
&\qquad + \lambda_\gamma^k \lambda_i^\alpha \lambda_\tau^t V_{\beta\lambda}^\tau \Gamma_{tk}^i - \lambda_\gamma^k \lambda_\beta^j \lambda_t^\tau V_{\tau\lambda}^\alpha \Gamma_{jk}^t - \lambda_\gamma^k \lambda_\lambda^l \lambda_t^\tau V_{\beta\tau}^\alpha \Gamma_{lk}^t \\
&= \frac{\partial V_{\beta\lambda}^\alpha}{\partial s^\gamma} + V_{\beta\lambda}^\tau \left(\lambda_\gamma^k \lambda_i^\alpha \lambda_\tau^t \Gamma_{tk}^i + \lambda_i^\alpha \frac{\partial \lambda_\tau^i}{\partial s^\gamma} \right) - V_{\tau\lambda}^\alpha \left(\lambda_\gamma^k \lambda_\beta^j \lambda_t^\tau \Gamma_{jk}^t + \lambda_j^\tau \frac{\partial \lambda_\beta^j}{\partial s^\gamma} \right) \\
&\qquad - V_{\beta\tau}^\alpha \left(\lambda_\gamma^k \lambda_\lambda^l \lambda_l^\tau \Gamma_{lk}^t + \lambda_l^\tau \frac{\partial \lambda_\lambda^l}{\partial s^\gamma} \right) \\
&= \frac{\partial V_{\beta\lambda}^\alpha}{\partial s^\gamma} + V_{\beta\lambda}^\tau \overset{1}{\Gamma}{}_{\tau\gamma}^\alpha - V_{\tau\lambda}^\alpha \overset{1}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}^\tau - V_{\beta\tau}^\alpha \overset{1}{\Gamma}{}_{\lambda\gamma}^\tau
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lambda^k_\gamma \lambda^\alpha_i \lambda^j_\beta \lambda^l_\lambda \nabla_k V^{\overset{i}{+}}{}_{\underset{+}{j}\,\underset{+}{l}} = \overset{1}{\nabla}_\gamma V^{\overset{\alpha}{+}}{}_{\underset{+}{\beta}\,\underset{+}{\lambda}}.$$

De la même manière nous obtenons, plus généralement,

$$\lambda^k_\gamma \lambda^{\alpha_1}_{i_1} \ldots \lambda^{\alpha_p}_{i_p} \lambda^{j_1}_{\beta_1} \ldots \lambda^{j_q}_{\beta_q} \nabla_k V^{\overset{i_1}{+}\ldots\overset{i_p}{+}}{}_{\underset{+}{j_1}\ldots\underset{+}{j_q}} = \overset{1}{\nabla}_\gamma V^{\overset{\alpha_1}{+}\ldots\overset{\alpha_p}{+}}{}_{\underset{+}{\beta_1}\ldots\underset{+}{\beta_q}} \tag{4.1}$$

et aussi

$$\lambda^k_\gamma \lambda^{\alpha_1}_{i_1} \ldots \lambda^{\alpha_p}_{i_p} \lambda^{j_1}_{\beta_1} \ldots \lambda^{j_q}_{\beta_q} \nabla_k V^{\overset{i_1}{-}\ldots\overset{i_p}{-}}{}_{\underset{-}{j_1}\ldots\underset{-}{j_q}} = \overset{2}{\nabla}_\gamma V^{\overset{\alpha_1}{+}\ldots\overset{\alpha_p}{+}}{}_{\underset{+}{\beta_1}\ldots\underset{+}{\beta_q}}. \tag{4.2}$$

Les relations (4.1) et (4.2) généralisent (3.3) et (3.7) respectivement. Pour obtenir des relations analogues aux (3.17) — (3.20), remarquons qu'on a par définition,

$$\overset{1}{\nabla}_\gamma V^{\overset{\alpha}{-}\overset{\beta}{-}}{}_{\underset{-}{\delta}} = \frac{\partial V^{\alpha\beta}{}_\delta}{\partial s^\gamma} + \overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\tau} V^{\tau\beta}{}_\delta + \overset{1}{\Gamma}{}^\beta_{\gamma\tau} V^{\alpha\tau}{}_\delta - \overset{1}{\Gamma}{}^\tau_{\gamma\delta} V^{\alpha\beta}{}_\tau,$$

d'où, en vertu de (3.2) et (2.15),

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\nabla}_\gamma V^{\overset{\alpha}{-}\overset{\beta}{-}}{}_{\underset{-}{\delta}} = {} & \frac{\partial V^{ij}{}_d}{\partial s^\gamma} \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j \lambda^d_\delta + V^{ij}{}_d \frac{\partial \lambda^\alpha_i}{\partial s^\gamma} \lambda^\beta_j \lambda^d_\delta + V^{ij}{}_d \lambda^\alpha_i \frac{\partial \lambda^\beta_j}{\partial s^\gamma} \lambda^d_\delta + V^{ij}{}_d \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j \frac{\partial \lambda^d_\delta}{\partial s^\gamma} \\
& + V^{\tau\beta}{}_\delta \left(\lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma \lambda^t_\tau \Gamma^i_{kt} + \lambda^\alpha_i \frac{\partial \lambda^i_\gamma}{\partial s^\tau} \right) + V^{\alpha\tau}{}_\delta \left(\lambda^\beta_j \lambda^k_\gamma \lambda^t_\tau \Gamma^j_{kt} + \lambda^\beta_j \frac{\partial \lambda^j_\gamma}{\partial s^\tau} \right) \\
& - V^{\alpha\beta}{}_\tau \left(\lambda^\tau_t \lambda^k_\gamma \lambda^d_\delta \Gamma^t_{kd} + \lambda^\tau_k \frac{\partial \lambda^k_\gamma}{\partial s^\tau} \right) \\
= {} & \lambda^k_\gamma \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j \lambda^d_\delta \left(\frac{\partial V^{ij}{}_d}{\partial x^k} + V^{tj}{}_d \Gamma^i_{kt} + V^{it}{}_d \Gamma^j_{kt} - V^{ij}{}_t \Gamma^t_{kd} \right) \\
& + V^{\tau\beta}{}_\delta \left[\lambda^t_\tau \lambda^k_\gamma \left(\frac{\partial \lambda^\alpha_t}{\partial x^k} - \Gamma^i_{kt} \lambda^\alpha_i \right) + \lambda^\alpha_i \lambda^t_\tau \left(\frac{\partial \lambda^i_\gamma}{\partial x^t} + \Gamma^i_{kt} \lambda^k_\gamma \right) \right] + \\
& + V^{\alpha\tau}{}_\delta \left[\lambda^t_\tau \lambda^k_\gamma \left(\frac{\partial \lambda^\beta_t}{\partial x^k} - \Gamma^j_{kt} \lambda^\beta_j \right) + \lambda^\beta_j \lambda^t_\tau \left(\frac{\partial \lambda^j_\gamma}{\partial x^t} + \Gamma^j_{kt} \lambda^k_\gamma \right) \right] \\
& + V^{\alpha\beta}{}_\tau \left[\lambda^\tau_d \lambda^k_\gamma \left(\frac{\partial \lambda^d_\delta}{\partial x^k} + \Gamma^d_{kt} \lambda^t_\delta \right) - \lambda^\tau_d \lambda^t_\delta \left(\frac{\partial \lambda^d_\gamma}{\partial x^t} + \Gamma^d_{kt} \lambda^k_\gamma \right) \right],
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\nabla}_\gamma V^{\overset{\alpha}{-}\overset{\beta}{-}}{}_{\underset{-}{\delta}} = {} & \lambda^k_\gamma \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j \lambda^d_\delta \nabla_k V^{\overset{i}{-}\overset{j}{-}}{}_{\underset{-}{d}} + V^{tj}{}_d \lambda^\beta_j \lambda^d_\delta \left(\lambda^k_\gamma \nabla_k \lambda^\alpha_{\underset{-}{t}} + \lambda^\alpha_i \nabla_t \lambda^{\overset{i}{+}}_\gamma \right) \\
& + V^{it}{}_d \lambda^\alpha_i \lambda^d_\delta \left(\lambda^k_\gamma \nabla_k \lambda^\beta_{\underset{-}{t}} + \lambda^\beta_j \nabla_t \lambda^{\overset{j}{+}}_\gamma \right) + V^{ij}{}_t \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j \left(\lambda^k_\gamma \nabla_k \lambda^{\overset{t}{-}}_\delta - \lambda^d_\delta \nabla_d \lambda^{\overset{t}{+}}_\gamma \right).
\end{aligned}$$

Plus généralement,

$$
\begin{aligned}
& \overset{1}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{-}{\alpha_1}\dots\overset{-}{\alpha_p}}{}_{\underset{-}{\beta_1}\dots\underset{-}{\beta_q}} = \lambda^k_\gamma\, \lambda^{\alpha_1}_{i_1}\dots\lambda^{\alpha_p}_{i_p}\,\lambda^{j_1}_{\beta_1}\dots\lambda^{j_q}_{\beta_q}\,\nabla_k V^{\overset{-}{i_1}\dots\overset{-}{i_p}}{}_{\underset{-}{j_1}\dots\underset{-}{j_q}} \\
(4.3)\qquad & + \sum_{t=i_1}^{i_p} V^{i_1\dots i_{s-1}\,t\,i_{s+1}\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}\,\lambda^{\alpha_1}_{i_1}\dots\lambda^{\alpha_{s-1}}_{i_{s-1}}\lambda^{\alpha_{s+1}}_{i_{s+1}}\dots\lambda^{\alpha_p}_{i_p}\,\lambda^{j_1}_{\beta_1}\dots\lambda^{j_q}_{\beta_q}\,\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\Big(\lambda^k_\gamma\nabla_k\lambda^{\alpha_s}_{\underset{-}{t}} + \lambda^{\alpha_s}_{i_s}\nabla_t\lambda^{\overset{i_s}{+}}_{\gamma}\Big) \\
& + \sum_{t=j_1}^{j_q} V^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_{s-1}\,t\,j_{s+1}\dots j_q}\,\lambda^{\alpha_1}_{i_1}\dots\lambda^{\alpha_p}_{i_p}\,\lambda^{j_1}_{\beta_1}\dots\lambda^{j_{s-1}}_{\beta_{s-1}}\lambda^{j_{s+1}}_{\beta_{s+1}}\dots\lambda^{j_q}_{\beta_q}\,\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\Big(\lambda^k_\gamma\nabla_k\lambda^{\overset{t}{-}}_{\beta_s} - \lambda^{j_s}_{\beta_s}\nabla_{j_s}\lambda^{\overset{t}{+}}_{\gamma}\Big)
\end{aligned}
$$

et aussi

$$
\begin{aligned}
& \overset{2}{\nabla}_{\gamma} V^{\overset{-}{\alpha_1}\dots\overset{-}{\alpha_p}}{}_{\underset{-}{\beta_1}\dots\underset{-}{\beta_q}} = \lambda^k_\gamma\, \lambda^{\alpha_1}_{i_1}\dots\lambda^{\alpha_p}_{i_p}\,\lambda^{j_1}_{\beta_1}\dots\lambda^{j_q}_{\beta_q}\,\nabla_k V^{\overset{+}{i_1}\dots\overset{+}{i_p}}{}_{\underset{+}{j_1}\dots\underset{+}{j_q}} + \\
(4.4)\qquad & + \sum_{t=i_1}^{i_p} V^{i_1\dots i_{s-1}\,t\,i_{s+1}\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}\,\lambda^{\alpha_1}_{i_1}\dots\lambda^{\alpha_{s-1}}_{i_{s-1}}\lambda^{\alpha_{s+1}}_{i_{s+1}}\dots\lambda^{\alpha_p}_{i_p}\,\lambda^{j_1}_{\beta_1}\dots\lambda^{j_q}_{\beta_q}\,\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\Big(\lambda^k_\gamma\nabla_k\lambda^{\alpha_s}_{\underset{-}{t}} + \lambda^{\alpha_s}_{i_s}\nabla_t\lambda^{\overset{i_s}{+}}_{\gamma}\Big) \\
& + \sum_{t=j_1}^{j_q} V^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_{s-1}\,t\,j_{s+1}\dots j_q}\,\lambda^{\alpha_1}_{i_1}\dots\lambda^{\alpha_p}_{i_p}\,\lambda^{j_1}_{\beta_1}\dots\lambda^{j_{s-1}}_{\beta_{s-1}}\lambda^{j_{s+1}}_{\beta_{s+1}}\dots\lambda^{j_q}_{\beta_q}\,\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\Big(\lambda^k_\gamma\nabla_k V^{\overset{t}{-}}_{\beta_s} - \lambda^{j_s}_{\beta_s}\nabla_{j_s}\lambda^{\overset{t}{+}}_{\gamma}\Big).
\end{aligned}
$$

Utilisant (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4), on peut facilement généraliser les relations (3.21) — (3.25).

5. *CONSIDÉRATIONS SUR LES COMPOSANTES INTRINSÈQUES* $\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *ET* $\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *DE LA CONNEXION* Γ^i_{jk}.

La partie assymétrique des composantes $\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ s'écrit

$$
\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \lambda^{\alpha}_{i}\lambda^{j}_{\beta}\lambda^{k}_{\gamma}\Gamma^{i}_{[jk]} + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha}_{i}\left(\frac{\partial\lambda^{i}_{\beta}}{\partial s^{\gamma}} - \frac{\partial\lambda^{i}_{\gamma}}{\partial s^{\beta}}\right),
$$

ou, en introduisant la notation

$$
(5.1)\qquad \frac{1}{2}\lambda^{\alpha}_{i}\left(\frac{\partial\lambda^{i}_{\beta}}{\partial s^{\gamma}} - \frac{\partial\lambda^{i}_{\gamma}}{\partial s^{\beta}}\right) = \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}.
$$

et en tenant compte de (1.2) et (3.13), sous la forme

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = T^{\alpha}_{\beta\gamma} + \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{5.2}$$

Pour la partie assymétrique des composantes $\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, nous avons

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = -3\, T^{\alpha}_{\beta\gamma} + \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{5.3}$$

D'autre part, il est facile à voir que

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = \overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)}, \tag{5.4}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} - T^{\alpha}_{\beta\gamma} - \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{5.5}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = \overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} + T^{\alpha}_{\beta\gamma} - \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{5.6}$$

Considérons, maintenant, l'espace X_n, détérminé par la condition (2.3). En vertu de (2.17) et (4.1), c'est-à-dire de

$$\lambda^i_\alpha \lambda^j_\beta \lambda^k_\gamma \nabla_k a_{\underset{+}{i}\,\underset{+}{j}} = \overset{1}{\nabla}_\gamma a_{\underset{+}{\alpha}\,\underset{+}{\beta}},$$

cette condition se réduit à

$$\overset{1}{\nabla}_\gamma a_{\underset{+}{\alpha}\,\underset{+}{\beta}} \equiv \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s^\gamma} - a_{\varepsilon\beta} \overset{1}{\Gamma}{}^{\varepsilon}_{\alpha\gamma} - a_{\alpha\varepsilon} \overset{1}{\Gamma}{}^{\varepsilon}_{\beta\gamma} = 0.$$

Après une permutation circulaire des indices σ, β, γ et sommation convenable des égalités ainsi obtenues, nous trouvons

$$\left\{ {\tau \atop \alpha\beta} \right\} = a^{\gamma\tau} a_{\varepsilon\alpha} \overset{1}{\Gamma}{}^{\varepsilon}_{[\gamma\beta]} + a^{\gamma\tau} a_{\beta\varepsilon} \overset{1}{\Gamma}{}^{\varepsilon}_{[\gamma\alpha]} + \overset{1}{\Gamma}{}^{\tau}_{(\alpha\beta)},$$

d'où, en tenant compte de (5.2) et (5.5), résulte

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} = \left\{ {\tau \atop \alpha\beta} \right\} + T^{\tau}_{\alpha\beta} + \omega^{\tau}_{\alpha\beta} + 2\, T^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)} + 2\, \omega^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)}. \tag{5.7}$$

Ici, $\left\{ {\tau \atop \alpha\beta} \right\}$ désignent les symboles de Christoffel de seconde espèce formés avec les coefficients $a_{\alpha\beta}$, et $T^{\tau}_{\cdot\alpha\beta}$ et $\omega^{\tau}_{\cdot\alpha\beta}$ ont, respectivement, la forme [2]

$$T^{\tau}_{\cdot\alpha\beta} = a^{\tau\delta} a_{\beta\varepsilon} T^{\varepsilon}_{\alpha\delta}, \qquad \omega^{\tau}_{\cdot\alpha\beta} = a^{\tau\delta} a_{\beta\varepsilon} \omega^{\varepsilon}_{\alpha\delta}.$$

En vertu de (3.12), nous déduisons de (5.7)

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} = \left\{ {\tau \atop \alpha\beta} \right\} - T^{\tau}_{\alpha\beta} + \omega^{\tau}_{\alpha\beta} + 2\, T^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)} + 2\, \omega^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)}, \tag{5.8}$$

Quand l'espace X_n est déterminé par la condition (2.4), nous obtenons de la même manière

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} = \left\{ {\tau \atop \alpha\beta} \right\} + T^{\tau}_{\alpha\beta} + \omega^{\tau}_{\alpha\beta} + 2\,\omega^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)} + 6\,T^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)} \tag{5.9}$$

et

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} = \left\{ {\tau \atop \alpha\beta} \right\} - T^{\tau}_{\alpha\beta} + \omega^{\tau}_{\alpha\beta} + 2\,\omega^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)} + 6\,T^{\tau}_{\cdot(\alpha\beta)}. \tag{5.10}$$

Donc:

L'espace X_n étant déterminé par la condition (2.3) [(2.4)], $\overset{1}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta}$ *et* $\overset{2}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta}$ *s'expriment respectivement sous la forme* (5.7) *et* (5.8) [(5.9) *et* (5.10)].

6. *QUELQUES APPLICATIONS DES RÉSULTAS PRÉCÉDANTS.* — a) Supposons en particulier qu'on ait

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0. \tag{6.1}$$

Alors, nous avons de (3.2)

$$\lambda^{\alpha}_{i}\,\lambda^{j}_{\beta}\,\lambda^{k}_{\gamma}\,\Gamma^{i}_{jk} = -\,\lambda^{\alpha}_{i}\,\frac{\partial \lambda^{i}_{\beta}}{\partial s^{\gamma}},$$

d'où

$$\Gamma^{i}_{jk} = -\,\frac{\partial \lambda^{i}_{\beta}}{\partial x^{k}}\,\lambda^{\beta}_{j}, \tag{6.2}$$

Donc, en calculant la dérivée covariante $\nabla_k \overset{i}{\lambda}{}^{+}_{\alpha}$, nous obtenons:

$$\nabla_k \overset{i}{\lambda}{}^{+}_{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{i}_{\alpha}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{i}_{jk}\,\lambda^{j}_{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{i}_{\alpha}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \lambda^{i}_{\beta}}{\partial x^{k}}\,\lambda^{\beta}_{j}\,\lambda^{j}_{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{i}_{\alpha}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \lambda^{i}_{\alpha}}{\partial x^{k}} = 0.$$

La dérivée covariante positive des n vecteurs λ^{i}_{α} étant toujours nulle, il en résulte qu'ils se transportent par parallélisme positive dans toutes les directions de l'espace X_n. Par conséquent, nous pouvons dire:

Si la condition (6.1) *est satisfaite, l'espace X_n admet un parallélisme positif absolut et réciproquement.*

Si l'on tient compte de (6.2) et (5.1), l'équation (3.9) devient

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i}\left(\frac{\partial \lambda^{i}_{\beta}}{\partial s^{\gamma}} - \frac{\partial \lambda^{i}_{\gamma}}{\partial s^{\beta}} \right) = 2\,\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

d'où

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0,$$

et

$$\overset{2}{\nabla}_{\gamma} \lambda^{i}_{\underset{+}{\alpha}} = \frac{\partial \lambda^{i}_{\alpha}}{\partial s^{\gamma}} - \overset{2}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\gamma} \lambda^{i}_{\tau} = \frac{\partial \lambda^{i}_{\gamma}}{\partial s^{\alpha}}.$$

Les considérations analogues du cas particulier dans lequel on a

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \tag{6.3}$$

nous donnent

$$\Gamma^{i}_{kj} = -\lambda^{\beta}_{j} \frac{\partial \lambda^{i}_{\beta}}{\partial x^{k}},$$

d'où

$$\overset{i}{\nabla}_{k} \lambda_{\overline{\alpha}} = 0.$$

Donc:

Si la condition (6.3) *est satisfaite, l'espace X_n admet un parallélisme négatif absolu et réciproquement.*

Sous la condition (6.3) nous avons aussi

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 2\,\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}, \qquad \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0, \qquad \overset{1}{\nabla}_{\gamma} \lambda^{i}_{\underset{+}{\alpha}} = \frac{\partial \lambda^{i}_{\gamma}}{\partial s^{\alpha}}.$$

b) Soient t^{α} les composantes intrinsèques contrevariantes du champ de vecteurs unitaires tangents à une courbe C. Alors, nous pouvons considérer quatre vecteurs de courbure de C, à savoir

$$\overset{1\alpha}{k^{+}} = \overset{1}{\nabla}_{\gamma} \overset{\alpha}{t^{+}} \cdot t^{\gamma}, \quad \overset{1\alpha}{k^{-}} = \overset{1}{\nabla}_{\gamma} \overset{\alpha}{t^{-}} \cdot t^{\gamma}, \quad \overset{2\alpha}{k^{+}} = \overset{2}{\nabla}_{\gamma} \overset{\alpha}{t^{+}} \cdot t^{\gamma}, \quad \overset{2\alpha}{k^{-}} = \overset{2}{\nabla}_{\gamma} \overset{\alpha}{t^{-}} \cdot t^{\gamma}, \tag{6.4}$$

Mais, dans le cas où la courbe C est une courbe C_{α} du n-tuple donné de congruences, nous avons

$$t^{\mu} = \lambda^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}, \tag{6.5}$$

et de (6.4) il s'en suit que

$$\overset{1\mu}{k^{+}} = \overset{1\mu}{k^{-}} = \overset{1}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\alpha}, \quad \overset{2\mu}{k^{+}} = \overset{2\mu}{k^{-}} = \overset{2}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\alpha} \quad (\alpha \text{ fixe}).$$

Cependant, à cause de (3.12) et de l'assymétrie du tenseur de torsion, on a

$$\overset{1\mu}{k^{+}} = \overset{1\mu}{k^{-}} = \overset{2\mu}{k^{+}} = \overset{2\mu}{k^{-}},$$

c'est-à-dire:

Les quatre vecteurs de courbure de le courbe C_{α} du n-tuple de congruences coïncident.

w^α étant les composantes intrinsèques d'un champ arbitraire de vecteurs unitaires w d'espace X_n, nous pouvons définir quatre vecteurs associés de courbure du champ w par rapport à la courbe C, à savoir

$$\overset{1\alpha}{c^+} = \overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{w^+} t^\gamma, \quad \overset{1\alpha}{c^-} = \overset{1}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{w^-} t^\gamma, \quad \overset{2\alpha}{c^+} = \overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{w^+} t^\gamma, \quad \overset{2\alpha}{c^-} = \overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{\alpha}{w^-} t^\gamma.$$

Quand C est une courbe C_α de congruences et w constituent le champ de vecteurs unitaires tangents aux courbes C_β du n-tuple, nous avons, à côté de (6.5),

$$w^\mu = \lambda^\mu_\beta = \delta^\mu_\beta,$$

de sorte que

$$\underset{\beta\gamma}{\overset{1\mu}{c^+}} = \overset{1}{\nabla}_\nu \overset{\mu}{\lambda^+_\beta} \cdot \lambda^\nu_\gamma = \overset{1}{\Gamma}{}^\mu_{\beta\gamma}, \qquad \underset{\beta\gamma}{\overset{1\mu}{c^-}} = \overset{1}{\nabla}_\nu \overset{\mu}{\lambda^-_\beta} \cdot \lambda^\nu_\gamma = \overset{1}{\Gamma}{}^\mu_{\gamma\beta},$$

$$\underset{\beta\gamma}{\overset{2\mu}{c^+}} = \overset{2}{\nabla}_\nu \overset{\mu}{\lambda^+_\beta} \cdot \lambda^\nu_\gamma = \overset{2}{\Gamma}{}^\mu_{\beta\gamma}, \qquad \underset{\beta\gamma}{\overset{2\mu}{c^-}} = \overset{2}{\nabla}_\nu \overset{\mu}{\lambda^-_\beta} \cdot \lambda^\nu_\gamma = \overset{2}{\Gamma}{}^\mu_{\gamma\beta}.$$

De ces relations nous obtenons

$$\underset{\beta\gamma}{\overset{2\mu}{c^+}} - \underset{\beta\gamma}{\overset{1\mu}{c^+}} = -2\, T^\mu_{\beta\gamma}, \qquad \underset{\beta\gamma}{\overset{2\mu}{c^-}} - \underset{\beta\gamma}{\overset{1\mu}{c^-}} = -2\, T^\mu_{\beta\gamma},$$

$$\underset{\beta\gamma}{\overset{2\mu}{c^+}} + \underset{\beta\gamma}{\overset{2\mu}{c^-}} = \underset{\beta\gamma}{\overset{1\mu}{c^+}} + \underset{\beta\gamma}{\overset{1\mu}{c^-}}.$$

c) Nous pouvons, dans l'espace X_n, definir quatre sortes de coefficients de rotation de Ricci, relativement à un n-tuple donné de congruences, c'est-à-dire

$$\overset{1}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{1}{\nabla}_\nu \underset{+}{\lambda^\alpha_\mu} \cdot \lambda^\mu_\beta \cdot \lambda^\nu_\gamma, \qquad \overset{2}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{1}{\nabla}_\nu \underset{-}{\lambda^\alpha_\mu} \cdot \lambda^\mu_\beta \cdot \lambda^\nu_\gamma,$$

$$\overset{3}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{2}{\nabla}_\nu \underset{+}{\lambda^\alpha_\mu} \cdot \lambda^\mu_\beta \cdot \lambda^\nu_\gamma, \qquad \overset{4}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{2}{\nabla}_\nu \underset{-}{\lambda^\alpha_\mu} \cdot \lambda^\mu_\beta \cdot \lambda^\nu_\gamma.$$

De ces relations et de (6.5) nous déduisons:

$$\overset{1}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \quad \overset{2}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta}, \quad \overset{3}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \quad \overset{4}{\gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta}.$$

(Reçu le 18.X.1960)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. A. Schouten — Ricci Calculus, Springer-Verlag, Berlin (1954).
[2] St. Petrescu — Considérations intrinsèques dans les espaces X_n à connexion métrique, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie* **1** (49), (1957), 195—221.