SUR LA SOMMABILITÉ DES DÉVELOPPEMENTS PROCÉDANT SUIVANT LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE L'OPÉRATEUR DE LAPLACE

MANOJLO MARAVIĆ (Sarajevo)

1. Soit D un domaine ouvert et borné dans l'espace euclidien $E_n (n \geqslant 2)$. Soient $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deux points dans D, à distance r, c. à. d.

$$r^2 = |Q-P|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2.$$

Supposons que la frontière B de D est suffisamment régulière de sorte que le problème aux limites

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u = 0 \quad & \text{dans } D \\ u = 0 \quad & \text{sur } B, \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$u(Q) \equiv u(x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

admet une infinité de valeurs caractéristiques positives

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_\nu \leqslant \cdots \to \infty, \ \nu \to \infty,$$

avec les fonctions caractéristiques correspondantes

$$\Phi_1(Q), \Phi_2(Q), \ldots, \Phi_\nu(Q), \ldots. \tag{2}$$

Nous allons supposer que $\{\Phi_\nu(Q)\}$ forme un système orthonormé et complet dans l'espace (L^2) des fonctions $f(Q)$ dont le carré est intégrable dans D.

Soit $f(Q) \in L^2(D)$ et soit

$$f(Q) \sim \sum a_\nu \Phi_\nu(Q), \tag{3}$$

où

$$a_\nu = \int_D f(Q)\, \Phi_\nu(Q)\, dV_Q,$$

dV_Q désignant l'élément de volume dans E_n.

2. Plusieurs auteurs ont récemment appliqué au développement (3) le procédé de sommabilité de Riesz (Bochner, Minakshisundaram, Titchmarsh, Levitan et Avadhani), respectivement le procédé $G_\theta^\varkappa$ (Avakumović et Maravić) défini par

$$G_\theta^\varkappa(\lambda; x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \{1 - \exp[(\lambda_\nu - x)\, x^{-\theta}]\}^\varkappa a_\nu$$

$$(0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to \infty,\ n \to \infty),$$

avec

$$0 < \theta < 1 \quad \text{et} \quad \varkappa > 0,$$

ou bien par

$$G_\theta^\varkappa(x) = \int_0^x \{1 - \exp[(t - x)\, x^{-\theta}]\}^\varkappa d\{A(t)\},$$

où $A(t)$ est une fonction à variation bornée dans tout intervalle fini.

Ainsi, Minakshisundaram [7] a montré que si $f(Q) \in L^2(D)$ et $k > n/2$ la moyenne de Riesz (λ, k) (du type λ et d'ordre k) de (3) au point $P \in D$ ne dépend que du comportement de la fonction f au point P. Titchmarsh [9] a démontré, que cela est vrai déjà pour $k \geqslant n/2$, et Levitan [3] et Avadhani [1] même pour $k \geqslant (n-1)/2$.

Dans le même ordre d'idées Avakumović [2] a montré que si $f(Q) \in L^1(D)$ et $n = 2$, la sommabilité-$G_\theta^\varkappa$ de (3) est une propriété locale lorsque $1/2 < \theta < 1$ et $\varkappa > \frac{3}{2}(2\theta - 1)^{-1}$.

3. D'abord quelques notations et résultats dont nous avons besoin dans ce qui suit:

(i) $\sigma^k(x)$ est la moyenne de Riesz d'ordre k de $A(t)$ $(A(0) = 0)$, à savoir

$$\sigma^k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\{A(t)\}.$$

(ii) $f_P(r)$ est la moyenne sphérique de $f(Q)$ sur la sphère du rayon r et du centre P, à savoir

$$f_P(r) = \frac{1}{2}\Gamma(n/2)\pi^{-n/2}\int_S f(P+\xi r)\,d\sigma_\xi, \tag{4}$$

où

$$P+\xi r = (x_1^0+\xi_1 r, x_2^0+\xi_2 r, \ldots, x_n^0+\xi_n r),$$

S étant la sphère unité

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = 1,$$

et $d\sigma_\xi$ étant l'élément de volume de S à $(n-1)$ dimensions.

(iii)

$$\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\} = z^\nu J_{\nu-1}(z), \tag{5}$$

où $J_\nu(z)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre ν [10].

(iv) Si $z > 0$ et si n est un entier nonnégatif, alors [8]

$$J_{n+1/2}(z) = \sqrt{2}\,(\pi z)^{-1/2}\{P_n(1/z)\sin(z-n\pi/2)+Q_n(1/z)\cos(z-n\pi/2)\}, \tag{6}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes en $1/z$ d'ordre au plus n tels que

$$P_n \to 1, \quad Q_n \to 0, \text{ lorsque } z \to \infty.$$

(v)

$$I_s(z) = J_s(iz)\exp\left(-\frac{1}{2}\pi si\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{s+2m}}{m!\,(s+m)!}. \tag{7}$$

(vi) Si s est un entier nonnégatif, alors la fonction modifiée de Bessel d'ordre s [10] admet la représentation

$$K_s(z) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{s-1}\frac{(-1)^m(s-m-1)!}{m!\,(z/2)^{s-2m}} +$$

$$+(-1)^{s+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{s+2m}}{m!\,(s+m)!}\left\{\log\left(\frac{1}{2}z\right)-\frac{1}{2}\psi(m+1)-\frac{1}{2}\psi(s+m+1)\right\}, \tag{8}$$

où ψ désigne la dérivée logarithmique de la fonction gamma.

(vii) Si $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, alors [10]

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\pi}\,(2z)^{-1/2} e^{-z} \left\{1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!\,8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\,(8z)^2} + \ldots\right\}. \tag{9}$$

(viii) ρ_P est la distance du point P de la frontière B, et ρ est un nombre satisfaisant à $0 < \rho < \rho_P$.

Ω_ρ est l'intérieur de la sphère du rayon ρ dont le centre est au point P.

(ix) Par définition

$$\alpha_0(t) = 2^{1-n/2}\{\Gamma(n/2)\}^{-1} t^{n/4} \int_0^\rho r^{n/2-1} J_{n/2}(r\sqrt{t})\,\{f_P(r) - f(P)\}\,dr. \tag{10}$$

(x) Soit

$$g(Q) = \begin{cases} 0, \text{ si } |Q-P|^2 = r^2 > \rho^2 \\ 2^{\mu-n/2}\pi^{-n/2}\Gamma(\mu+1)\, r^{\mu-n/2} t^{n/4-\mu/2} J_{\mu+n/2}(r\sqrt{t}), \\ \qquad\qquad \text{si } |Q-P|^2 = r^2 \leqslant \rho^2 \text{ et } \mu > -1/2 \end{cases} \tag{11}$$

et soit $f(Q) \in L^2(D)$. (11) et (4) donnent [1]

$$\int_D f(Q)\,g(Q)\,dV_Q =$$

$$= 2^{\mu+1-n/2}\Gamma(\mu+1)\{\Gamma(n/2)\}^{-1} t^{n/4-\mu/2} \int_0^\rho r^{-\mu-1+n/2} J_{\mu+n/2}(r\sqrt{t})\,f_P(r)\,dr. \tag{12}$$

(xi) LEMME A [5]. *De*

$$\sigma^k(x) = o(x^{-\delta}), \quad x \to \infty \tag{13}$$

résulte

$$\sigma^{k'}(x) = o(x^{-\delta}), \quad x \to \infty \tag{14}$$

où $0 < k < k'$ *et* $0 < \delta < 1 + k$.

(xii) THÉORÈME A [5]. *De*

$$\sigma^k(x) = o\{x^{-k(1-\theta)}\}, \quad x \to \infty \tag{15}$$

résulte

$$G_\theta^\varkappa(x) = o(1), \quad x \to \infty$$

pour tout $\varkappa > k$, k *étant un nombre naturel.*

(xiii) Levitan [3, 4] a démontré que

$$\sigma^k(x) \equiv \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d_t \left\{ \sum_{\lambda_\nu \leqslant t} a_\nu \Phi_\nu(P) - \int_D f(Q)\,(2\pi)^{-n/2} t^{n/4} r^{-n/2} J_{n/2}(r\sqrt{t})\, dV_Q \right\} =$$

$$= o\left\{x^{-\frac{(k-(n-1)/2)}{2}}\right\}, \quad x \to \infty. \tag{16}$$

4. *RÉSULTATS:*

LEMME 1. *Si la fonction* $\alpha_0(t)$ *est sommable-*$G_\theta^\varkappa$ *vers zéro pour un* ρ $(0 < \rho < \rho_P)$, *alors*

$$H_1 = \int_0^x \{1 - \exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^\varkappa (2\pi)^{-n/2} \cdot$$

$$\cdot\, d_t \left\{ \int_{\Omega_\rho} f(Q)\, t^{n/4} r^{-n/2} J_{n/2}(r\sqrt{t})\, dV_Q \right\} = o(1), \quad x \to \infty. \tag{17}$$

LEMME 2. *Si* s *est un entier nonnégatif et* $r > 0$, *alors*

$$F(r;x) = (2\pi)^{-s-1} r^{-2s-2} \int_0^x \{1 - \exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^\varkappa d_t \{(r\sqrt{t})^{s+1} J_{s+1}(r\sqrt{t})\} =$$

$$= o(1), \quad x \to \infty \tag{18}$$

pour tout

$$1/2 < \theta < 1 \;\; et \;\; \varkappa > \frac{1}{2}(2s+1)(2\theta-1)^{-1}. \tag{19}$$

LEMME 3. *Si* s *est un entier positif et* $r > 0$, *alors*

$$T(r;x) = (2\pi)^{-s-1/2} r^{-2s-1} \int_0^x \{1 - \exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^\varkappa d_t \{(r\sqrt{t})^{s+1/2} J_{s+1/2}(r\sqrt{t})\} =$$

$$= o(1), \quad x \to \infty \tag{20}$$

pour tout

$$1/2 < \theta < 1 \quad et \quad \varkappa > (s+1)(2\theta-1)^{-1}. \tag{21}$$

En appliquant le résultat de Levitan (16), le lemme A, le théorème A et les lemmes 1, 2 et 3 j'ai démontré le théorème suivant sur la sommabilité-$G_\theta^\varkappa$ du développement (3).

THÉORÈME. *Soit* $f(Q) \in L^2(D)$ *et soit*

$$1/2 < \theta < 1 \text{ et } \varkappa > \frac{1}{2}(n+1)(2\theta-1)^{-1}. \tag{22}$$

Pourque la série $\Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$ *soit sommable-*$G_\theta^\varkappa$ *vers* $f(P)$, *il est nécessaire et suffisant que pour un* $\rho\,(0 < \rho < \rho_P)$ *la fonction* $\alpha_0(t)$ *soit sommable-*$G_\theta^\varkappa$ *vers zéro.*

Donc, si θ et $\varkappa$ satisfont à (22), la sommabilité-$G_\theta^\varkappa$ du développement (3) au point $P \in D$ est une propriété locale de la fonction $f(Q) \in L^2(D)$. Cette propriété locale de la fonction $f(Q)$ est ici exprimée par

$$\int_0^x \{1 - \exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^\varkappa \, d\alpha_0(t) = o(1), \quad x \to \infty.$$

Ce théorème j'ai déjà démontré dans [6] en s'appuyant sur les résultats d'Avadhani [1] sur la sommabilité de Riesz de (3). Ici, je part des résultats de Levitan, ces derniers étant plus commode pour déterminer les intervalles (22) pour θ et $\varkappa$, car dans ce cas on peut faire l'usage du lemme A.

5. *Démonstration du lemme* 1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $f(P) = 0$. Pour $\mu = 0$ de (11) et (12) suit

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_\rho} f(Q)\, t^{n/4} r^{-n/2} J_{n/2}(r\sqrt{t})\, dV_Q =$$

$$= 2^{1-n/2} \{\Gamma(n/2)\}^{-1} t^{n/4} \int_0^\rho r^{n/2-1} J_{n/2}(r\sqrt{t})\, f_P(r)\, dr = \alpha_0(t).$$

En tenant compte de l'hypothèse faite sur la fonction $\alpha_0(t)$, résulte l'affirmation.

Démonstration du lemme 2. Or, d'après (5)

$$\frac{d}{dt}\{(r\sqrt{t})^{s+1}J_{s+1}(r\sqrt{t})\} = \frac{1}{2}r^2(r\sqrt{t})^s J_s(r\sqrt{t}), \tag{23}$$

de sorte que

$$F(r;x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-s-1}r^{-2s}\int_0^x\{1-\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(r\sqrt{t})^s J_s(r\sqrt{t})\,dt. \tag{24}$$

Pour évaluer (24), nous envisageons l'intégrale curviligne dans le plan complexe w,

$$H = (2\pi i)^{-1}(2\pi)^{-s-1}r^{-2s}\oint_{|w|=x}\{1-\exp[(w-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(r\sqrt{-w})^s K_s(r\sqrt{-w})dw. \tag{25}$$

En tenant compte de (7) et (8) on obtient

$$z^s K_s(z) = (-1)^{s+1}\exp(-\frac{1}{2}s\pi i)\,z^s J_s(iz)\log z + C_1(z^2), \tag{26}$$

où $C_1(z^2)$ est une fonction entière. En introduisant $z = r\sqrt{-w}$ dans (26), résulte

$$(r\sqrt{-w})^s K_s(r\sqrt{-w}) = -\frac{1}{2}(r\sqrt{-w})^s J_s(r\sqrt{w})\log(-w) + C(w), \tag{27}$$

$C(w)$ étant une fonction entière.

En utilisant (27), (25) prend la forme

$$H = -(4\pi i)^{-1}(2\pi)^{-s-1}r^{-2s}\oint_{|w|=x}\{1-\exp[(w-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(r\sqrt{w})^s J_s(r\sqrt{w})\log(-w)dw.$$

En intégrant le long du circle $|w| = x$ et la partie positive de l'axe réelle t, on obtient

$$H = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-s-1}r^{-2s}\int_0^x\{1-\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(r\sqrt{t})^s J_s(r\sqrt{t})\,dt = -F(r;x). \tag{28}$$

Par conséquent, l'évaluation de l'intégrale (24) est ramenée à celle de (25). En posant $w = x e^{\varphi i}$ dans (25), il suit

$$H = (2\pi)^{-s-2} r^{-s} x^{1+s/2} \exp(-\frac{1}{2} s\pi i) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \{1 - \exp[x^{1-\theta}(\exp(\varphi i) - 1)]\}^{\varkappa} \exp[(1+s/2)\varphi i] K_s(r\sqrt{-x\exp(\varphi i)})\, d\varphi. \quad (29)$$

En tenant compte de (9), résulte

$$|K_s(r\sqrt{-x\exp(\varphi i)})| \leqslant M r^{-1/2} |x \exp(\varphi i)|^{-1/4} \exp\{-r\Re(\sqrt{-x\exp(\varphi i)})\} =$$
$$\leqslant M r^{-1/2} x^{-1/4} \exp\{-r\sqrt{x}\sin(\varphi/2)\},$$

où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

Or, [2]

$$|1 - \exp\{x^{1-\theta}[\exp(\varphi i) - 1]\}| \leqslant 6 x^{1-\theta} \sin(\varphi/2),$$

de sorte que

$$|H| \leqslant M_1 r^{-s-1/2} x^{s/2+3/4+(1-\theta)\varkappa} \int_0^{2\pi} \sin^{\varkappa}(\varphi/2) \exp\{-r\sqrt{x}\sin(\varphi/2)\}\, d\varphi =$$

$$\leqslant 4 M_1 r^{-s-1/2} x^{s/2+3/4+(1-\theta)\varkappa} \left(\int_0^{1/\sqrt{2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{1}\right) \{u^{\varkappa} \exp(-r\sqrt{x}\,u)(1-u^2)^{-1/2}\}\, du =$$

$$\leqslant Q_1 + Q_2. \quad (30)$$

D'abord

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} u^{\varkappa} \exp(-r\sqrt{x}\,u)(1-u^2)^{-1/2}\, du \leqslant \sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} u^{\varkappa} \exp(-r\sqrt{x}\,u)\, du =$$

$$\leqslant \sqrt{2}(r\sqrt{x})^{-\varkappa-1} \int_0^{r\sqrt{x/2}} t^{\varkappa} \exp(-t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}(r\sqrt{x})^{-\varkappa-1} \int_0^{\infty} t^{\varkappa} \exp(-t)\, dt =$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,\Gamma(\varkappa+1)\, r^{-\varkappa-1} x^{-(\varkappa+1)/2},$$

de manière que

$$Q_1 \leqslant M_2 r^{-s-\varkappa-3/2} x^{s/2+1/4-(\theta-1/2)\varkappa}.$$

Donc, $r>0$ entraîne

$$Q_1 = o(1), \quad x \to \infty \tag{31}$$

pour tout θ et $\varkappa$ satisfaisant à (19).

Ensuite

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} u^{\varkappa} \exp(-r\sqrt{x}\, u)(1-u^2)^{-1/2}\, du < \exp(-r\sqrt{x}/\sqrt{2}) \int_0^1 (1-u^2)^{-1/2}\, du =$$

$$< \frac{1}{2}\pi \exp(-r\sqrt{x}/\sqrt{2}).$$

Étant donné qu'on peut toujours déterminer un $x_0 = x_0(r)$ de sorte que

$$\exp(-r\sqrt{x}/\sqrt{2}) < r^{-\varkappa-1} x^{-(\varkappa+1)/2} \quad \text{pour tout } x \geqslant x_0,$$

on a

$$Q_2 < M_3 r^{-s-\varkappa-3/2} x^{s/2+1/4-\varkappa(\theta-1/2)}, \quad \text{pour tout } x \geqslant x_0$$

d'où

$$Q_2 = o(1), \quad x \to \infty \tag{32}$$

pour tout θ et $\varkappa$ satisfaisant à (19).

De (30), (31) et (32) résulte alors

$$H = -F(r; x) = o(1), \quad x \to \infty \tag{33}$$

pour tout θ et $\varkappa$ satisfaisant à (19), ce qui démontre le lemme 2.

Démonstration du lemme 3. Afin d'évaluer

$$G_\theta^{\varkappa}(A; x) = \int_0^x \{1 - \exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa}\, d\{A(t)\}, \tag{34}$$

où

$$A(t) = (r\sqrt{t})^{s+1/2} J_{s+1/2}(r\sqrt{t}),$$

nous allons évaluer

$$\sigma^k(A; x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\{A(t)\}. \tag{35}$$

En intégrant (35) k fois par parties et en appliquant chaque fois la formule (23), on obtient

$$\sigma^{k}(A\,;x=(2r^{-2})^{k-1}k!\,x^{-k}\int_{0}^{x}(r\sqrt{t})^{s+k-1/2}J_{s+k-1/2}(r\sqrt{t})\,dt. \tag{36}$$

De (6) résulte que l'évaluation de (36) se ramène à l'èvaluation des intégrales de la forme

$$S(r;x)=x^{-k}\int_{0}^{x}(r\sqrt{t})^{s+k-1}\sin(r\sqrt{t})\,dt, \tag{37}$$

et

$$C(r;x)=x^{-k}\int_{0}^{x}(r\sqrt{t})^{s+k-1}\cos(r\sqrt{t})\,dt. \tag{37'}$$

Or, il est facile à voir que

$$S(r;x)=2r^{-2}(s+k)!\,x^{-k}(r\sqrt{x})^{s+k}\left\{-\frac{\cos(r\sqrt{x})}{(s+k)!}+\frac{\sin(r\sqrt{x})}{(s+k-1)!\,(r\sqrt{x})}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(r\sqrt{x})}{(s+k-2)!\,(r\sqrt{x})^{2}}--++\cdots\begin{cases}-\dfrac{\cos(r\sqrt{x})}{(r\sqrt{x})^{s+k}}, & \text{si } s+k \text{ est pair}\\[2ex] +\dfrac{\sin(r\sqrt{x})}{(r\sqrt{x})^{s+k}}, & \text{si } s+k \text{ est impair.}\end{cases}\right\}$$

Donc,

$$S(r;x)=O(x^{-(k-s)/2});\quad C(r;x)=O(x^{-(k-s)/2}),\quad x\to\infty.$$

Par conséquent,

$$\sigma^{k}(A\,;x)=O(x^{-(k-s)/2})=o(x^{-(k-s-\varepsilon)/2}),\quad x\to\infty \tag{38}$$

pour tout $\varepsilon>0$.

Afin que de (38) résulte

$$G_{\theta}^{\varkappa}(A\,;x)=o(1),\quad x\to\infty,\ \text{pour tout } \varkappa>k, \tag{39}$$

il faut, d'après le théorème A, que

$$\frac{1}{2}(k-s-\varepsilon)=k(1-\theta),\ \text{c.à.d.}\quad k=(s+\varepsilon)\cdot(2\theta-1).^{-1} \tag{40}$$

Or, il est toujours possible de déterminer $\varepsilon=\varepsilon(\theta)$ dans $(0,1)$ de sorte que k soit un entier. Alors on a (39) pour tout θ et $\varkappa$ satisfaisant à (21) ce qui démontre le lemme 3.

Démonstration du théorème. Sans restreindre la généralité soit $f(P)=0$. D'une part, d'après le lemme A,

$$\sigma^k(x)=o\{x^{-(k-(n-1)/2)/2}\}, \quad x\to\infty \tag{41}$$

entraîne

$$\sigma^{[k]+1}(x)=o\{x^{-(k-(n-1)/2)/2}\}, \quad x\to\infty \tag{42}$$

et, d'autre part, d'après le théorème A, de

$$\sigma^{[k]+1}(x)=o\{x^{-([k]+1)(1-\theta)}\}, \quad x\to\infty$$

résulte

$$G_\xi^\varkappa(x)=o(1), \quad x\to\infty \text{ pour tout } \varkappa>[k]+1. \tag{43}$$

Par conséquent, afin que (42) entraîne (43), il faut que

$$\frac{1}{2}\{k-(n-1)/2\}=([k]+1)(1-\theta), \text{ d'où } \theta=1-\frac{k-(n-1)/2}{2([k]+1)}. \tag{44}$$

Etant donné que $k>(n-1)/2$, de (44) résulte que

$$1/2<\theta<1. \tag{45}$$

En posant $k=[k]+\delta$, où $0\leqslant\delta<1$, on obtient

$$[k]+1=\frac{1}{2}(n+1-2\delta)(2\theta-1)^{-1}.$$

Donc,

$$[k]+1\leqslant\frac{1}{2}(n+1)(2\theta-1)^{-1}$$

de sorte qu'on a $\varkappa>[k]+1$, si

$$\varkappa>\frac{1}{2}(n+1)(2\theta-1)^{-1}. \tag{46}$$

D'après le théorème A et (16), on a pour tout θ et $\varkappa$ satisfaisant à (45) et (46)

$$\int_0^x\{1-\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^\varkappa d_t\Big\{\sum_{\lambda_\nu\leqslant t}a_\nu\Phi_\nu(P)-$$
$$-\int_D f(Q)(2\pi)^{-n/2}t^{n/4}r^{-n/2}J_{n/2}(r\sqrt{t})\,dV_Q\Big\}=o(1), \quad x\to\infty$$

c. à. d.

$$\sum_{\lambda_{\nu}\leqslant x}\{1-\exp[(\lambda_{\nu}-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}a_{\nu}\,\Phi_{\nu}(P)=$$

$$=\int_0^x\{1-\exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(2\pi)^{-n/2}d_t\left\{\int_D f(Q)\,t^{n/4}r^{-n/2}J_{n/2}(r\sqrt{t})\,dV_Q\right\}+o(1)=$$

$$=\int_0^x\{1-\exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(2\pi)^{-n/2}d_t\left\{\left(\int_{\Omega_\rho}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{D-\Omega_\rho}\right)f(Q)\,t^{n/4}r^{-n/2}J_{n/2}(r\sqrt{t})\,dV_Q\right\}+o(1)=H_1+H_2+o(1),\quad x\longrightarrow\infty. \tag{47}$$

Or, d'après le lemme 1,

$$H_1=o(1),\quad x\longrightarrow\infty. \tag{48}$$

Il reste à évaluer l'intégrale

$$H_2=\int_0^x\{1-\exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}(2\pi)^{-n/2}d_t\left\{\int_{D-\Omega_\rho}f(Q)\,t^{n/4}r^{-n/2}J_{n/2}(r\sqrt{t})\,dV_Q\right\}=$$

$$=\int_{D-\Omega_\rho}f(Q)\,dV_Q(2\pi)^{-n/2}r^{-n}\int_0^x\{1-\exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}d_t\{(r\sqrt{t})^{n/2}J_{n/2}(r\sqrt{t})\}=$$

$$=\int_{D-\Omega_\rho}f(Q)\,W(r;x)\,dV_Q, \tag{49}$$

où

$$W(r;x)=(2\pi)^{-n/2}r^{-n}\int_0^x\{1-\exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}d_t\{(r\sqrt{t})^{n/2}J_{n/2}(r\sqrt{t})\}.$$

Supposons d'abord que n est pair, c. à. d. $n=2s+2$, $s=0,1,2,\ldots$ Étant donné que $r>0$, du lemme 2 résulte

$$W(r;x)=(2\pi)^{-s-1}r^{-2s-2}\int_0^x\{1-\exp[(t-x)\,x^{-\theta}]\}^{\varkappa}d_t\{(r\sqrt{t})^{s+1}J_{s+1}(r\sqrt{t})\}=o(1),$$

$$x\longrightarrow\infty \tag{50}$$

pour tout

$$1/2<\theta<1 \quad \text{et} \quad \varkappa>\frac{1}{2}(2s+1)(2\theta-1)^{-1}=\frac{1}{2}(n-1)(2\theta-1)^{-1}.$$

Si n est impair, c. à. d. $n=2s+1$, $s=1,2,3,\ldots$, l'application du lemme 3 nous donne

$$W(r;x)=(2\pi)^{-s-1/2}r^{-2s-1}\int_0^x\{1-\exp[(t-x)x^{-\theta}]\}^{\varkappa}d_t\{(r\sqrt{t})^{s+1/2}J_{s+1/2}(r\sqrt{t})\}=$$
$$=o(1),\quad x\to\infty$$

pour tout

$$1/2<\theta<1 \quad \text{et} \quad \varkappa>(s+1)(2\theta-1)^{-1}=\frac{1}{2}(n+1)(2\theta-1)^{-1}. \tag{51}$$

De (49), (50) et (51) résulte

$$H_2=o(1),\quad x\to\infty \tag{52}$$

pour tout

$$1/2<\theta<1 \quad \text{et} \quad \varkappa>\frac{1}{2}(n+1)(2\theta-1)^{-1}.$$

Enfin (47), (48) et (52) donnent l'affirmation du théorème.

(Reçu le 1 octobre 1960)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Avadhani, T. V. — On the summability of eigenfunction expansions I, *J. Indian Math. Soc.* XVIII, 1(1954), 9–18.

[2] Avakumović, V. G. — Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung, *Math. Scand.* **4**(1956), 161—173.

[3] Левитан, Б. М. — О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, *Мат. сб.* **35(77)**: 2(1954), 267—316.

[4] Левитан, Б. М. — Приложение о суммировании по Риссу интегралов Стильтьеса, *Мат. сб.* **39(81)**: 1(1956).

[5] Maravić, M. — O jednom postupku zbirljivosti divergentnih redova, *Zbornik radova Mat. Inst. SAN* **6**(1957), 5—52.

[6] Maravić, M. — Über die G_{θ}^{χ}-Summierbarkeit der verallgemeinerten Fourier-Reihen *Publ. Inst. math. Acad. Serbe Sci.* XII (1958), 137-146.

[7] Minakshisundaram, S. — Notes on Fourier-expansions II (1946).

[8] Mitrinović, D. — Zbornik matematičkih problema II, Beograd 1958. str. 212—214.

[9] Titchmarsh, E. C. — Eigenfunction expansions associated with partial differential equations II, Oxford 1953.

[10] Watson, G. N. — A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1952.