CARACTÉRISATION DES CLASSES DE FONCTIONS DE LIPSCHITZ, ZYGMUND ET B. SZ. NAGY

S. ALJANČIĆ (Belgrade)

1. *INTRODUCTION.* Soit $f(x)$ continue, périodique de période 2π, à valeur moyenne nulle et soit

$$F \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$$

sa série de Fourier.

Il est connu ([4], Ch. VIII, Misc. th. and ex. 14) que $f \in {}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$,[1] si et seulement si

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu B_\nu(x) = O(n^{1-\alpha}) \quad (B_\nu(x) = a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)$$

uniformément en x.[2]

De même pour que la fonction conjuguée $\tilde{f} \in {}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, il est nécessaire et suffisant que

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu A_\nu(x) = O(n^{1-\alpha})$$

uniformément en x.[2]

Dans cette note nous allons généraliser les conditions (1) et (2) (en y introduisant un paramètre arbitraire) et nous allons caractériser d'une manière analogue la classe ${}^2\Lambda_\alpha$ de Zygmund et la classe $W^r(0)$, $r > 0$, introduite par B. Sz. Nagy [2]. Cette dernière on peut definir (Stečkin [3])

---

[1]) Les classes de Lipschitz et de Zygmund, définies par $|f(x+h)-f(x)| \leqslant M|h|^\alpha$ et par $|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \leqslant M|h|^\alpha$ respectivement, nous allons noter par ${}^1\Lambda_\alpha$ respectivement par ${}^2\Lambda_\alpha$. Quoique ${}^2\Lambda_\alpha = {}^1\Lambda_\alpha$ si $0 < \alpha < 1$, il est quelquefois commode d'utiliser, même dans ce cas, les deux notations.

[2]) Étant donné que pour $0 < \alpha < 1$, $f \in {}^1\Lambda_\alpha \implies \tilde{f} \in {}^1\Lambda_\alpha$, les conditions (1) et (2) sont équivalentes si $0 < \alpha < 1$.

par: $f \in W^r(0)$ si f admet la représentation

(3) $$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, \psi_r(x-t;\, 0)\, dt,$$

où

$$\psi_r(x;\, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx - \beta\pi/2)}{n^r}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0, \quad \sup_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \mathrm{ess}\, |\varphi(x)| \leqslant M.$$

Nous remarquons que si r est un entier positif, $W^r(0)$ se réduit à la classe de fonctions f telles que $f^{(r-1)}$ respectivement $\tilde{f}^{(r-1)} \in {}^1\Lambda_1$ suivant que r est pair respectivement impair.

THÉORÈME. *Soit* $0 < \mu < \lambda$ *et posons*[3])

$$k = -[\mu - \lambda] - 1 \quad et \quad \alpha = \lambda - \mu + [\mu - \lambda] + 1,$$

de sorte que

$$\lambda - \mu = k + \alpha \quad avec \quad k = 0, 1, \ldots \quad et \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Alors

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \nu^{\lambda} A_{\nu}(x) = \begin{cases} o(1) \Longrightarrow f \equiv 0, \\ O(1) \Longleftrightarrow f \in W^{\lambda}(0), \\ O(n^{\mu}) \Longleftrightarrow f^{(k)} \in {}^2\Lambda_{\alpha}. \end{cases}$$

En particulier, si $\lambda = 1$, la deuxième affirmation du théorème se réduit à (2) avec $\alpha = 1$. De même, si $\lambda = 1$ et par conséquent $0 < \mu < 1$ (alors $k = 0$ et $\alpha = 1 - \mu$), la troisième partie du théorème n'est que (2) avec $0 < \alpha < 1$.

Du théorème résulte qu'on ne peut pas caractériser la classe ${}^2\Lambda_1$ par une moyenne du type (2); c'est possible seulement par une moyenne du type figurant dans le théorème avec λ *au moins* > 1.

Nous remarquons qu'en remplaçant dans le théorème $A_{\nu}(x)$ par $B_{\nu}(x)$, on obtient des énoncés analogues pour la fonction conjuguée. Or, la classe ${}^2\Lambda_{\alpha}$ étant reflexive au point de vue de la conjuguéité, c'est seulement la deuxième partie du théorème qui est interéssante.

2. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.* La démonstration du théorème repose sur un résultat sur l'approximation des fonctions continues et périodiques f par les moyennes typiques de leur série de Fourier,

$$R_n^{\lambda}(f) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu^{\lambda}}{n^{\lambda}}\right) A_{\nu}(x), \quad \lambda > 0,$$

3) $[x]$ est le plus grand entier contenu dans x.

à savoir (Aljančić [1])

$$(4)\qquad f-R_n^\lambda(f)=\begin{cases} o(n^{-\lambda}) \implies f\equiv 0,\\ O(n^{-\lambda}) \iff f\in W^\lambda(0),\\ O(n^{-k-\alpha}) \iff f^{(k)}\in {}^2\Lambda_\alpha \end{cases}\qquad \begin{pmatrix} k=0,1,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant 1;\\ \lambda>k+\alpha\end{pmatrix},$$

et sur les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit* $0<\beta<2\lambda$ *et soient* $U\equiv\sum u_n$, $U_\lambda\equiv\sum n^\lambda u_n$, *des séries numériques. Alors*

$$(5)\qquad R_n^\lambda(U_\lambda)=O(n^{\lambda-\beta}) \iff R_n^\lambda(U)-s=O(n^{-\beta}),$$

s étant la somme géneralisée de U.

Dans cet énoncé on peut remplacer O par o.

LEMME 2. *Soit* $\lambda>0$, $\varkappa>\operatorname{Max}(-1,-\lambda)$, *et soit* $U\equiv\sum u_n$ *uné série numérique. Alors*

$$(6)\qquad R_n^1(U)=O(n^\varkappa) \iff R_n^\lambda(U)=O(n^\varkappa).$$

On a un énoncé analogue avec o au lieu de O.

En effet, la moyenne qui figure dans le théorème n'est que $R_n^1(F_\lambda)$ et, d'après le lemme 2 (avec $U=F_\lambda$ et $\varkappa=0$ respectivement $\varkappa=\mu$), on peut la remplacer par $R_n^\lambda(F_\lambda)$. Or, dans cette nouvelle forme le théorème est une conséquence immédiate du lemme 1 (avec $U_\lambda=F_\lambda$ et $\beta=\lambda$ respectivement $\beta=\lambda-\mu$) et de (4).

Nous remarquons qu'on peut démontrer la deuxième partie du théorème en utilisant (2) avec $\alpha=1$. Cela découle du fait, qu'on peut définir la classe $W^r(0)$, dans le cas le plus interessant lorsque $0<r<1$, aussi par[4]

$$(7)\qquad \left(f\cos\frac{r\pi}{2}+\tilde f\sin\frac{r\pi}{2}\right)_{1-r}\in {}^1\Lambda_1,$$

où g_r désigne l'intégrale fractionelle d'ordre r de g.

En effet, si f admet la représentation (3), alors $f\cos r\pi/2+\tilde f\sin r\pi/2=\varphi$, d'où $(f\cos r\pi/2+\tilde f\sin r\pi/2)_{1-r}=\varphi_1$. Or, φ_1 étant l'intégrale d'une fonction bornée p.p., résulte (7).

Inversement si

$$(8)\qquad \left(f\cos\frac{r\pi}{2}+\tilde f\sin\frac{r\pi}{2}\right)_{1-r}=\sum n^{r-1}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$$

---

[4]) Nous remarquons que la classe de fonctions $f\in{}^2\Lambda_r$ est equivalente à la classe de de fonctions f telles que $(f\cos r\pi/2+\tilde f\sin r\pi/2)_{1-r}\in{}^2\Lambda_1$. Donc, d'après (7), nous avons l'inclusion stricte $W^r(0)\supset{}^2\Lambda_r$.

est l'intégrale d'une fonction φ bornée p. p., alors ([4], Ch. II, Th. 2. 1)

$$\varphi \sim \sum n^r (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx .$$

Les fonctions φ et $\psi_r(x; 0) = \sum n^{-r} \cos nx$ étant intégrables, la série de Fourier de f

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum n^{-r} \alpha_n \cos nx + n^{-r} \beta_n \sin nx$$

est, d'après [4], Ch. II, Th. 1.5, aussi la série de Fourier de la fonction

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \psi_r(x-t; 0)\, dt .$$

Par conséquent, on a (3).

3.1. *DÉMONSTRATION DU LEMME* 1. Soit

(9) $$\overline{R}_n^\lambda(U) = n^{-\lambda}(n+1)^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} [(\nu+1)^\lambda - (\nu-1)^\lambda] \nu^\lambda R_\nu^\lambda(U) .$$

Alors

$$\overline{R}_n^\lambda(U) = n^{-\lambda}(n-1)^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} [(\nu+1)^\lambda - (\nu-1)^\lambda] \sum_{\mu=1}^{\nu} (\nu^\lambda - \mu^\lambda)\, u_\mu$$

$$= n^{-\lambda}(n+1)^{-\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} [(\nu+1)^\lambda - (\nu-1)^\lambda] (\nu^\lambda - \mu^\lambda)$$

$$= n^{-\lambda}(n+1)^{-\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \left\{ \sum_{\nu=\mu}^{n} [(\nu+1)^\lambda \nu^\lambda - \nu^\lambda (\nu-1)^\lambda] - \mu^\lambda \sum_{\nu=\mu}^{n} [(\nu+1)^\lambda - (\nu-1)^\lambda] \right\},$$

et, par conséquent,

(10) $$\overline{R}_n^\lambda(U) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\mu^\lambda}{n^\lambda}\right) \left(1 - \frac{\mu^\lambda}{(n+1)^\lambda}\right) u_\mu .$$

En utilisant cette dernière expression pour $\overline{R}_n^\lambda(U)$ il est facile à verifier les deux identités suivantes:

(11) $$(n+1)^\lambda [R_n^\lambda(U) - \overline{R}_n^\lambda(U)] = R_n^\lambda(U_\lambda) ,$$

(12) $$\overline{R}_n^\lambda(U) - \overline{R}_{n-1}^\lambda(U) = \frac{(n+1)^\lambda - (n-1)^\lambda}{(n^2-1)^\lambda} R_n^\lambda(U_\lambda) .$$

L'équivalence des conditions (5g) et (5d) qui figurent à gauche respectivement à droite dans (5), est une conséquence immédiate de ces identités:

(i) (5d) $\Longrightarrow$ (5g). D'abord nous remarquons que

$$(5d) \Longrightarrow \overline{R}_n^\lambda(U) - s = O(n^{-\beta}). \tag{13}$$

En effet, en utilisant (9), on obtient

$$\overline{R}_n^\lambda(U) - s = n^{-\lambda}(n+1)^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} [(\nu+1)^\lambda - (\nu-1)^\lambda]\, \nu^\lambda [R_n^\lambda(U) - s]$$

$$= n^{-\lambda}(n+1)^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} O(\nu^{2\lambda-\beta-1}) = O(n^{-\beta})$$

lorsque $2\lambda > \beta$.

En se rappelant de l'identité (11), de (5d) et (13) résulte (5g).

(ii) (5g) $\Longrightarrow$ (5d). De l'identité (12) résulte d'abord

$$\overline{R}_n^\lambda(U) - \overline{R}_{n-1}^\lambda(U) = O(n^{-\beta-1}),$$

et, par conséquent $(m > n)$,

$$\overline{R}_m^\lambda(U) - \overline{R}_n^\lambda(U) = \sum_{\nu=n}^{m} [\overline{R}_\nu^\lambda(U) - \overline{R}_{\nu-1}^\lambda(U)] < \sum_{\nu=n}^{\infty} O(\nu^{-\beta-1}) = O(n^{-\beta})$$

lorsque $\beta > 0$. En faisant $m \to \infty$ dans cette inégalité on obtient (5d).

On démontre d'une manière analogue le o-énoncé du lemme 1.

3.2. *DÉMONSTRATION DU LEMME* 2. (i) (6g) $\Longrightarrow$ (6d). De $n R_n^1(U) = \Sigma_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu)\, u_\lambda$ résulte

$$n R_n^1 - (n-1) R_{n-1}^1 = \sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu.$$

et

$$u_n = (n+1) R_{n+1}^1 - 2n R_n^1 + (n-1) R_{n-1}^1 \; (n = 1, 2, \ldots;\; R_0^1 = R_1^1 = 0).$$

Par conséquent

$$R_n^\lambda(U) = \frac{n^\lambda - (n-1)^\lambda}{n^\lambda} n R_n^1(U) - \frac{1}{n^\lambda} \sum_{\nu=1}^{n-1} [(\nu-1)^\lambda - 2\nu^\lambda + (\nu+1)^\lambda]\, \nu R_\nu^1(U).$$

Si $R_n^1(U) = O(n^\varkappa)$ on obtient

$$R_n^\lambda(U) = O(n^\varkappa) + n^{-\lambda} \sum_{\nu=1}^{n-1} O(\nu^{\lambda+\varkappa-1}) = O(n^\varkappa)$$

lorsque $\varkappa > -\lambda$.

(ii) (6d) $\Longrightarrow$ (6g). De $n^\lambda R_n^\lambda(U)=\Sigma_{\nu=1}^{n-1}(n^\lambda-\nu^\lambda)\,u_\nu$ résulte

$$n^\lambda R_n^\lambda-(n-1)^\lambda R_{n-1}^\lambda=[n^\lambda-(n-1)^\lambda]\sum_{\nu=1}^{n-1}u_\nu$$

et

$$u_n=\frac{(n+1)^\lambda R_{n+1}^\lambda-n^\lambda R_n^\lambda}{(n+1)^\lambda-n^\lambda}-\frac{n^\lambda R_n^\lambda-(n-1)^\lambda R_{n-1}^\lambda}{n^\lambda-(n-1)^\lambda}\quad(n=1,2,\ldots;\ R_0^\lambda=R_1^\lambda=0).$$

Par conséquent,

$$R_n^1(U)=\frac{n^{\lambda-1}}{n^\lambda-(n-1)^\lambda}R_n^\lambda(U)+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(\nu-1)^\lambda-2\nu^\lambda+(\nu+1)^\lambda}{[\nu^\lambda-(\nu-1)^\lambda][(\nu+1)^\lambda-\nu^\lambda]}\nu^\lambda R_\nu^\lambda(U).$$

Si $R_n^\lambda(U)=O(n^\varkappa)$ on obtient

$$R_n^1(U)=O(n^\varkappa)+n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}O(\nu^\varkappa)=O(n^\varkappa)$$

lorsque $\varkappa>-1$.

On démontre d'une manière analogue le o-énoncé du lemme 2.

(Reçu le 3.III.1960)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aljančić, S. — Approximation of continuous functions by typical means of their Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.* (sous presse).

[2] Nagy, B. Sz. — Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier. *Hungarica Acta math.* **1** (1948), 14—52

[3] Stečkin, S. B. — Sur la meilleure approximation de quelques classes de fonctions par polynômes trigonométriques (en russe). *Izvestia* **20** (1956), 643—648.

[4] Zygmund, A. — Trigonometric series, sec. ed., Cambridge 1959