Sur les séries de polynomes de même degré.

Par

MICHEL PETROVITCH.

Considérons la série

$$S(x)=P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)+\ldots \tag{1}$$

de polynomes de même degré p, s'annulant pour $x=0$ et ayant leurs coefficients nombres algébriques.

Nous allons montrer que:

Lorsque dans le polynome $P_n(x)$ le produit du coefficient de x^k par n^{2k} ne varie qu'avec k, la somme $S(x)$ sera, pour tout nombre x algébrique, un polynome de degré p en π^2, à coefficients nombres algébriques.

En effet, soit

$$P_n(x)=\alpha_{n,1}x+\alpha_{n,2}x^2+\ldots+\alpha_{n,p}x^p\ ; \tag{2}$$

comme le produit

$$n^{2k}\alpha_{n,k}$$

ne varie qu'avec k, en le désignant par a_k on aura

$$\begin{aligned} P_1(x)&=\frac{a_1}{1^2}x+\frac{a_2}{1^4}x^2+\ldots+\frac{a_p}{1^{2p}}x^p\ ,\\ P_2(x)&=\frac{a_1}{2^2}x+\frac{a_2}{2^4}x^2+\ldots+\frac{a_p}{2^{2p}}x^p\ ,\\ P_3(x)&=\frac{a_1}{3^2}x+\frac{a_2}{3^4}x^2+\ldots+\frac{a_p}{3^{2p}}x^p\ .\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Il s'en suit que

$$S(x) = a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \ldots + a_p s_p x^p , \tag{4}$$

où

$$s_k = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2k}} . \tag{5}$$

Or d'après une formule connue on a

$$s_k = A_{2k} B_{2k} \pi^{2k}, \tag{6}$$

où B_2, B_4, $B_6 \ldots$ sont les nombres de Bernoulli, et A_{2k} le nombre rationnel

$$A_{2k} = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} .$$

La somme $S(x)$ s'écrit donc

$$S(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_p x^p , \tag{7}$$

où

$$C_k = A_{2k} B_{2k} a_k \pi^{2k} = M_k \pi^{2k}, \tag{8}$$

M_k étant un nombre algébrique, ce qui démontre la proposition.

Il s'en suit également que l'équation algébrique en x

$$S(x) = 0$$

n'a aucune racine égale à un nombre algébrique.

Pour $x = 1$ on a

$$S(1) = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_p s_p = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n ,$$

où

$$u_n = \frac{a_1}{n^2} + \frac{a_2}{n^4} + \ldots + \frac{a_p}{n^{2p}} , \tag{9}$$

d'où la proposition suivante:

La somme d'une série convergente

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{10}$$

dont le terme général u_n est un polynome fixe de degré p en $\frac{1}{n^2}$, à coefficients nombres algébriques, est un polynome de degré p en π^2 à coefficients nombres algébriques.

La somme de la série (10) est donc différente de zéro quels que soient les coefficients nombres algébriques a_n.

La formule connue

$$\frac{1}{n^{2k}} \quad \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^\infty e^{-nt}\, t^{2k-1}\, dt$$

conduit alors à un resultat analogue relatif à l'intégrale définie

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{Q(xt^2)}{e^t - 1}\,\frac{dt}{t},$$

où $Q(z)$ est un polynome en z:

Quel que soit le polynome Q à coefficients nombres algébriques, s'annulant pour $z = 0$, la valeur que prend $I(x)$ pour x égal à un nombre algébrique quelconque, est un polynome en π^2 à coefficients nombres algébriques.