Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit.

Par

NICOLAS SALTYKOW.

1. *Equation de J. Bertrand.* — Pour expliquer la méthode d'intégration dont il s'agit appliquons la, d'abord, à l'équation [1])

$$x^2r+2xys+y^2t+xp+yq=n^2z, \tag{1}$$

où l'on désigne respectivement par p, q, v, s, t les dérivées partielles:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Groupons les termes de l'équation donnée (1) de la manière qu'elle devienne

$$x\frac{\partial}{\partial x}(xp+yq)+y\frac{\partial}{\partial y}(xp+yq)=n^2z.$$

Si l'on pose l'expression en parenthèses égale à la nouvelle variable u, l'équation considérée va être remplacée par le système de deux équations, comme il suit:

$$\left\{\begin{aligned} &x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=u, \\ &x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n^2z. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

[1]) *J. Bertrand.* — Traité de Calcul Différentiel. Paris 1864, p. 223.

Les équations différentielles de la forme citée portent le nom de système de Charpit [2]). Leur distinction caractéristique consiste dans ce-ci:

1⁰ Le nombre d'équations est égal à celui des fonctions inconnues;

2⁰ Les équations sont linéaires par rapport aux dérivées partielles du premier ordre des fonctions inconnues, chacune des équations ne contenant que les dérivées partielles d'une seule fonction;

3⁰ Les coefficients auprès des dérivées, qui sont prises par rapport aux mêmes variables indépendantes, sont identiques dans toutes les équations du système considéré.

L'intégrale générale du système de Charpit est représentée par autant de fonctions arbitraires qu'il y a des fonctions inconnues, les arguments des fonctions arbitraires étant définis par les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires·

Ce dernier système devient, dans le cas considéré:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{n^2 z}.$$

Les intégrales du système écrit sont définies par les formules suivantes:

$$\frac{y}{x}=C_1, \quad n^2z^2-u^2=C_2, \quad (nz\pm u)\,x^{\mp n}=C_3,$$

C_1, C_2 et C_3 désignant trois constantes arbitraires.

Par conséquent, l'on obtient l'intégrale générale requise sous la forme, comme suit:

$$n^2z^2-u^2=f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad uz\pm u=x^{\pm n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

à deux fonctions arbitraires f et φ.

En éliminant, des deux derniéres équations, la fonction auxilaire introduite u, on a l'intégrale générale demandée de l'équation de J. Bertrand:

$$z=\frac{1}{2n}\left[x^{\pm n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{\mp n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

---

[2]) *N. Saltykow.* — Étude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit (*Bulletin des Sciences mathématiques 2 série, t. LIV, août 1930*).

ψ désignant une fonction arbitraire qui est égale au rapport des deux fonctions précédentes f et φ. Il est évident qu'il suffirait de conserver l'un de deux signes dans la formule obtenue, car les deux termes se permutent.

2. *La forme générale des équations linéares intégrables par la méthode étudiée.* — Abordons, à présent, la problème général, en cherchant à définir toutes les équations linéaires:

$$Ar + 2Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0 \tag{3}$$

réductibles à un système de Charpit, les cinq coefficients A, B, C, D et E représentant les fonctions de x et de y; quant au coefficient F, il dépend, en général, de x, y et z.

Il s'agit, donc, d'établir le système correspondant de Charpit sous la forme suivante:

$$\left\{\begin{aligned} &K\frac{\partial z}{\partial x} + L\frac{\partial z}{\partial y} = U, \\ &K\frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial u}{\partial y} = M, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

K, L et M désignant trois coefficients inconnus à déterminer, u étant la fonction auxilaire que l'on introduit.

Substituons, d'abord, la valeur de u définie par la première équation (4), dans la seconde équation du même système. En supposant, de suite, que les termes d'équation obtenue soient proportionnels respectivement à ceux de l'équation donnée (3), on a, en désignant par ϑ le coefficient correspondant de la proportionnalité, les relations:

$$\left\{\begin{aligned} &K^2 = A\vartheta, \quad KL = B\vartheta, \quad L^2 = C\vartheta, \\ &K\frac{\partial K}{\partial x} + L\frac{\partial K}{\partial y} = D\vartheta, \quad K\frac{\partial L}{\partial x} + L\frac{\partial L}{\partial y} = E\vartheta, \\ &M = -F\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Les deux premières et la dernière égalité (5) définissent les valeurs de ϑ, de L et M, comme fonctions du coefficient K, par les formules suivantes:

$$\vartheta = \frac{K^2}{A}, \quad L = \frac{BK}{A}, \quad M = -\frac{FK^2}{A}. \tag{6}$$

En supposant K distinct de zéro, la quatrième relation (5) définit K moyennant l'équation écrite sous la forme

$$A\frac{\partial K}{\partial x}+B\frac{\partial K}{\partial y}=DK. \tag{7}$$

Enfin, les deux autres égalités (5) (la troisième et la cinquième) définissent les conditions que doivent vérifier les coefficients de l'équation étudiée (3), pour qu'elle soit réductible au système de Charpit, à savoir:

$$B^2-AC=0\,, \tag{8}$$

$$A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right)+B\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right)+D\frac{B}{A}=E\,, \tag{9}$$

D'après la première condition établie (8), l'équation linéaire (3) doit être de la forme parabolique.

Enfin, la relation (9) impose la seconde condition que doivent vérifier les coefficients de l'équation (3) pour qu'elle soit sujette à la méthode d'intégration étudiée.

Les conditions (8) et (9) ayant lieu, on prend pour la valeur du coefficient K une solution quelconque de l'équation linéaire (7 par rapport à K.

Les deux dernières formules (6) définissent immédiatement les valeurs des deux autres coefficients, L et M, du système de Charpit (4), qui devient complètement déterminé.

3 *Intégration de l'équation étudiée.* — Il est bien aisé d'effectuer le calcul nécessaire encore d'une autre manière que l'on va exposer.

En substituant, effectivement, les expressions (6) de L et de M, on met le système (4) sous la forme suivante:

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+B\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u}{K}$$

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}=-FK,$$

que l'on forme sans aucune difficulté, d'après l'équation donnée (3).

Remarquons, à présent, qu'en joignant à ces deux dernières équations la (7)-ième, on a un système de Charpit des trois équations à trois fonctions inconnues K, u et z.

Le système équivalent d'équations différentielles ordinaires devient, donc,

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{dK}{DK}=\frac{du}{-FK}=\frac{dz}{\frac{u}{K}}.$$

Les deux premiers termes du système obtenu, étant intégrables indépendamment des autres équations du système considéré, admettent une intégrale que l'on va écrire de la manière suivante:

$$\varphi(x, y)=\alpha,$$

α désignant une constante arbitraire. Il est, donc, évident que la forme générale pour l'expression de K devient

$$K=e^{\theta(x,\,\varphi)}\,\psi(\varphi),$$

θ étant obtenue par une quadrature et ψ désignant une fonction arbitraire.

On va choisir, pour ψ, une expression particulière de la sorte pour simplifier le plus possible le calcul des deux autres intégrales du système étudié.

Supposons qu'elles soient trouvées sous la forme comme il suit:

$$\varphi_i\,(x, v, z, u)=\beta_i\,, \qquad i=1, 2,$$

β_i désignant deux constantes arbitraires d'intégration.

Cela étant, l'intégrale générale du système de Charpit primitif va devenir

$$\varphi_i\,(x, y, z, u)=f_i\,(\varphi), \qquad i=1, 2,$$

f_i désignant deux fonctions arbitraires. L'intégrale de l'équation (3) en découle par l'élimination de la variable auxiliaire u, et va contenir deux fonctions arb traires d'un argument.

Il arrive fréquemment, dans les applications, que le résultat de cette dernière élimination se présente sous la forme d'une seule équation, d'une manière analogue au cas de l'équation (1) de J. Bertrand.

4. *Signification des conditions obtenues d'intégrabilité.* — Il est important d'insister sur la nature de la condition exprimée par la formule (9).

Grâce à la première condition (8), l'équation étudiée (3) va être mise sous la forme comme suit:

$$(11) \qquad A^2r+2ABs+B^2t+A(Dp+Eq)+AF=0 .$$

La relation (3) ne représente rien d'autre que la condition d'involution du système linéaire de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre de la méthode de Monge-Ampère appliquée à l'équation (11).

Ce résultat est évident *à priori*, puisque il s'agit des intégrales générales qui s'expriment au moyen d'équations impliquant deux fonctions arbitraires dont les arguments représentent les fonctions de variables indépendantes.

Ch. Riquier avait obtenu la condition analogue à la (9)-ième dans son étude, *Sur la recherche des cas d'intégrabilité complète ou incomplète de l'équation aux dérivées partielles du second orde à deux variables indépedantes* [3]. En cherchant l'intégrale particulière, analogue à celle de Cauchy, Ch. Riquier avait obtenue la condition de la forme (9) pour les équations linéaires paraboliques. Dans les exemples du n° 12, Ch. Riquier retrouve même les équations aux dérivées partielles du premier ordre de la méthode de Monge-Ampère. Cela provient de ce que Ch. Riquier part de l'hypothèse que l'équation étudiée s'obtient, par la différentiation, d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

5. *Applications.* — Les cas les plus simples, où la méthode exposée permet d'effectuer l'intégration, s'offrent dans la théorie des surfaces reglées.

Considérons, par exemple, l'équation différentielle des surfaces reglées, à plan directeur, qui est parallèle à l'axe de cotes, à savoir:

$$B^2r-2ABs+A^2t=0 ,$$

A et B représentant des coefficients constants.

L'équation écrite est bien parabolique, la condition (9) étant identiquement satisfaite.

Le système correspondant de Charpit devient, donc,

[3]) Bulletin de la Société Mathématique de France t. LVI, Paris 1928, p. 174.

$$B\frac{\partial z}{\partial x}-A\frac{\partial z}{\partial y}=u\,,\quad B\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial y}=0\,,$$

en admettant l'intégrale générale

$$u=f(Ax+By)\,,\quad Bz-xu=\varphi(Ax+By)\,,$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires.

L'élimination, entre les deux dernières équations éctites, de la fonction auxilaire u produit l'intégrale générale cherchée:

$$Bz=xf(Ax+By)+\varphi(Ax+By)\,,$$

représentant les surfaces reglées en question.

Le second exemple donne l'équation aux dérivées partielles des surfaces reglées à directrice rectiligne. Si l'on prend cette dernière pour l'axe de z, l'équation en question va s'écrire

$$x^2r+2xys+y^2t=0\,,$$

ne représentant que les trois premiers termes de l'équation (1).

Le système de Charpit correspondant devient

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=u\,,\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

et l'intégrale générale s'écrit:

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\,,$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires.

Comme troisième exemple citons l'équation à coefficients constants de la forme:

$$A^2r+2ABs+B^2t+D(Ap+Bq)+AF=0\,,$$

A, B, D et F représentant quatre constantes arbitraires quelconques. Cette dernière équation s'obtient de celle (11) grâce à la condition (9), d'où l'on tire:

$$E=\frac{B}{A}D\,.$$

6. *Équations linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre.* — En considérant l'équation

$$(12) \qquad Ar+2Bs+Ct+E(x, y, z, p, q)=0\,,$$

A, B et C désignant des fonctions de x et y, il est aisé de l'écrire de la manière suivante

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ap+Bq)+\frac{\partial}{\partial y}(Bp+Cq)+E'(x, y, z, p, q)=0\,,$$

où l'on à posé

$$E'\equiv E-\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)p-\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\right)q.$$

Supposons que l'équation (12) soit parabolique, c'est-à-dire que l'on ait:

$$(13) \qquad B^2-AC=0\,, \quad \text{ou bien} \quad \frac{B}{A}=\frac{C}{B}\equiv a\,,$$

a étant une fonction de variables x et y.

Par conséquent, l'équation considérée devient

$$\frac{\partial}{\partial x}[A\,(p+aq)]+\frac{\partial}{\partial y}[B\,(p+aq)]+E'(x, y, z, p, q)=0.$$

L'équation obtenue, grâce à l'expression introduite de E' et aux formules (13), sera remplacée par le système

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} &A\,\frac{\partial z}{\partial x}+B\,\frac{\partial z}{\partial y}=Au,\\ &A\,\frac{\partial u}{\partial x}+B\,\frac{\partial u}{\partial y}=E'',\end{aligned}\right.$$

où l'on a pose

$$E''\equiv Qq-E\,, \quad Q\equiv A\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right)+B\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right).$$

Introduisons, à présent, la seconde hypothèse que la fonction E'' implique les deux variables p et q sous forme du binome u, de sorte que l'on ait

$$E''\equiv E'''(x, y, z, u)\,.$$

Dans cette condition le système (14) devient celui de Charpit, et le problème d'inégration de l'équation (12) s'achève par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Ch. Riquier, à la page 191 de son Mémoire cité, traite un cas particulier de l'équation (12), où les coefficients A, B, C et a représentent des quantités constantes.

7. *Équations linéaires à trois variables indépendantes.* — Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z à trois variables indépendantes x_1, x_2, x_3, que l'on va écrire de la manière suivante:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &Ap_{11}+A'p_{22}+A''p_{33}+\\ &\qquad +2Bp_{23}+2B'p_{13}+2B''p_{12}+\\ &\qquad\qquad +Cp_1+C'p_2+C''p_3+F=0\,, \end{aligned}\right.$$

en désignant respectivement:

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\,,\quad p_{ii}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\,,\quad p_{ik}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\,,$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices i et k, à partir de 1 jusqu'à 3, les coefficients A, A', A'', B, B', B'', C, C' et C'' étant les fonctions de variables indépendantes x_1, x_2 et x_3; quant à F c'est une fonction de x_1, x_2, x_1 et z.

Pour réduire l'équation (15) à un système de Charpit, posons:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &K\frac{\partial z}{\partial x_1}+L\frac{\partial z}{\partial x_2}+M\frac{\partial z}{\partial x_3}=u\,,\\ &K\frac{\partial u}{\partial x_1}+L\frac{\partial u}{\partial x_2}+M\frac{\partial u}{\partial x_3}=N\,, \end{aligned}\right.$$

où les quatre coefticients K, L, M et N sont à déterminer de telle manière que le système (16) soit équivalent à l'équation (15).

Il faut pour cela que l'on ait les conditions:

$$(17)\qquad K^2=A\vartheta\,,\quad L^2=A'\vartheta\,,\quad M^2=A''\vartheta\,,$$

$$(18)\qquad LM=B\vartheta\,,\quad KM=B'\vartheta\,,\quad KL=B''\vartheta\,,$$

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &K\frac{\partial K}{\partial x_1}+L\frac{\partial K}{\partial x_2}+M\frac{\partial K}{\partial x_3}=C\vartheta\,,\\ &K\frac{\partial L}{\partial x_1}+L\frac{\partial L}{\partial x_2}+M\frac{\partial L}{\partial x_3}=C'\vartheta\,,\\ &K\frac{\partial M}{\partial x_1}+L\frac{\partial M}{\partial x_2}+M\frac{\partial M}{\partial x_3}=C''\vartheta\,, \end{aligned}\right.$$

$$N = -F\vartheta, \tag{20}$$

où ϑ représente le coefficient auxilaire de proportionalité.

Cela posé, la première relation (17), les deux dernières (18) et la (20)-ième définissent les valeurs de ϑ, L, M et N comme de fonctions de K, à savoir:

$$\vartheta = \frac{K^2}{A}, \quad L = \frac{B''K}{A}, \quad M = \frac{B'K}{A}, \quad N = -\frac{FK^2}{A}. \tag{21}$$

Grâce à ces dernières formules, les deux dernières relations (17) et la première (18) produisent trois conditions que doivent, d'abord, vérifier les coefficients de l'équation (15), pour que cette dernière soit intégrable par la méthode considérée, à savoir:

$$B^2 = A'A'', \quad B'^2 = AA'', \quad B''^2 = AA'. \tag{22}$$

En substituant les expressions (21) de ϑ, L et M dans la première relation (19), elle va définir l'équation pour calculer la valeur requise de K, sous la forme suivante:

$$A\frac{\partial K}{\partial x_1} + B''\frac{\partial K}{\partial x_2} + B'\frac{\partial K}{\partial x_3} = CK. \tag{23}$$

La substitution de mêmes valeurs (21), dans la seconde et dans la troisiéme relation (19), produit deux dernières conditions qui s'imposent aux coefficients de l'équation donnée (15),

$$\left\{\begin{aligned} &A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B''}{A}\right) + B''\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B''}{A}\right) + B'\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B''}{A}\right) + C\frac{B''}{A} = C', \\ &A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B'}{A}\right) + B''\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B'}{A}\right) + B'\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B'}{A}\right) + C\frac{B'}{A} = C''. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

8, *Intégration de l'équation étudiée.* — Les équations de Charpit (16) deviennent, grâce aux formules (21):

$$\left\{\begin{aligned} &A\frac{\partial z}{\partial x_1} + B''\frac{\partial z}{\partial x_2} + B'\frac{\partial z}{\partial x_3} = \frac{u}{K}, \\ &A\frac{\partial u}{\partial x_1} + B''\frac{\partial u}{\partial x_2} + B'\frac{\partial u}{\partial x_3} = -FK. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

L'ensemble des équations (23) et (25) constitue de même un système de Charpit, dont l'intégration revient à celle du système équivalent des équations différentielles ordinaires suivantes:

$$\frac{dx_1}{A} = \frac{dx_2}{B''} = \frac{dx_3}{B'} = \frac{dK}{CK} = \frac{du}{-FK} = \frac{dz}{\frac{u}{K}} . \tag{26}$$

Les trois premiers rapport (26) produisant deux intégrales distinctes de la forme:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \alpha , \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \beta ,$$

α et β désignant deux constantes arbitraires. Il s'en suit l'expression générale de la fonction K, à savoir:

$$K = e^{\theta(x, \varphi, \psi)} \Psi(\varphi, \psi),$$

où θ s'obtient, évidemment, par une quadrature, Ψ désignant une fonction arbitraire.

Attribuons à cette dernière fonction une valeur particulière qui soit la plus favorable pour obtenir les deux dernières intégrales du système (26).

Écrivons les sous la forme comme il suit:

$$\varphi_i (x_1, x_2, x_3, z, u) = \alpha_i ,$$
$$i = 1, 2 .$$

Cela étant, l'intégrale générale du système de Charpit (25) va devenir:

$$\varphi_i (x_1, x_2, x_3, z, u) = f_i [\varphi(x_1, x_2, x_3) , \quad \psi(x_1, x_2, x_3)]$$
$$i = 1, 2,$$

f_1 et f_2 désignant deux fonctions arbitraires.

Le résultat de l'élimination de la variable auxiliaire u, entre les deux dernières équations, va représenter l'intégrale générale de l'équation donnée (13).

9. *Signification des conditions d'intégrabilité obtenues* — Les égalités (22) représentent, d'abord, le généralisation de la notion des équations paraboliques sur le cas des trois variables indépendantes. Elles démontrent, en même temps, que, grâce à elles, la condition classique Eulerienne, exprimée par le déterminant du troisième ordre, est identiquement satisfaite (*L. Euleri, Institutiones Calculi Intégralis*, Vol. III. p. 359).

Il résulte des formules (22) les expressions de A', A'' et B'':

$$A' = \frac{AB^2}{B'^2}, \quad A'' = \frac{B'^2}{A}, \quad B'' = \frac{AB}{B'}.$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation (15), introduisons les désignations suivantes:

$$AB' \equiv a, \quad AB \equiv b, \quad B'^2 = c.$$

Il est aisé de mettre l'équation considérée (15) comme il suit:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2p_{11} + b^2p_{22} + c^2p_{33} + \\ & \qquad + 2bcp_{23} + 2acp_{13} + 2abp_{12} + \\ & \qquad\qquad + C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 + f = 0, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients a, b c, C_1, C_2, C_3 et f sont complétement arbitraires.

Quant aux conditions (24), elles vont devenir:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & a\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{b}{a}\right) + b\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{b}{a}\right) + c\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a^2}C_1 = \frac{1}{a}C_2, \\ & a\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{a}{c}\right) + b\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{a}{c}\right) + c\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{a}{c^2}C_3 = \frac{1}{c}C_1. \end{aligned} \right.$$

Or, ces dernières conditions sont précisément celles que doivent vérifier les coefficients de l'équation (27), pour qu'elle soit intégrable par la méthode des intégrales intermédiaires [4]).

10. *Applications.* — Le cas le plus simple se présente lorsque l'équation (27) est à coefficients constants.

Dans ces conditions, les relations (28) imposent les relations suivantes:

$$C_2 \equiv \frac{b}{a}C_1 \quad C_3 \equiv \frac{c}{a}C_1.$$

Par conséquent, les équations linéaires, à trois variables indépendantes, intégrables par la méthode étudiée, se présentent sous la forme générale suivante:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2p_{11} + b^2p_{22} + c^2p_{33} + \\ & \qquad + 2bcp_{23} + 2acp_{13} + 2abp_{12} + \\ & \qquad\qquad + d(ap_1 + bp_2 + cp_3) + f = 0, \end{aligned} \right.$$

---

[4]) *N. Saltykow.* — Méthodes de Monge-Ampère et de Darboux pour intégrer les équations aux dérivées partielles du second ordre; leur généralisation (*Mémoires de l'Institut Scientifique Russe à Belgrade.* t. 6, p. 1. Belgrade 1932, en russe).

où l'on a posé

$$d \equiv \frac{C_1}{a}\,.$$

Pour intégrer cette dernière équation, écrivons le système d'équations différentielles ordinaires correspondant (26):

$$\frac{dx_1}{a^2}=\frac{dx_2}{ab}=\frac{dx_3}{ac}=\frac{dK}{adK}=\frac{du}{-fK}=\frac{dz}{\frac{u}{K}}\,.$$

Les trois premiers rapports produisent deux intégrales:

$$bx_1-ax_2=\alpha\,,\quad cx_2-bx_3=\beta\,,$$

α et β désignant deux constantes arbitraires.

En posant $\Psi\equiv 1$, il est aisé de prendre pour K l'expression suivante:

$$K=e^{\frac{d}{a}x_1}\,.$$

Les deux dernières intégrales deviennent, donc,

$$u+\frac{f}{ad}e^{\frac{d}{a}x_1}=\gamma\,,\quad z+\frac{1}{ad}e^{-\frac{d}{a}x_1}u+\frac{f}{a^3d}x_1=\delta\,,$$

γ et δ étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Il s'en suit que l'intégrale générale de l'équation donnée (29) devient:

$$z=-\frac{f}{a^3d}x_1+\Phi_1(bx_1-ax_2\,,\quad cx_2-bx_3)+$$

$$+\frac{1}{ad}e^{-\frac{d}{a}x_1}\Phi_2(bx_1-ax_2\,,\quad cx_2-bx_3)\,,$$

Φ_1 et Φ_2 désignant deux fonctions arbitraires, chacune, des deux arguments indiqués.

Le résultat obtenu représente une généralisation de l'intégration classique d'Euler (Inst. Cal. Integr. t. III, p. 359) d'une équation homogène par rapport aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables indépendantes à coefficients constants.

11. *Équations linéaires par rapport aux secondes dérivées.* — Pour donner un second exemple, généralisons l'équation du n° 6.

Considérons, donc, l'équation

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} & Ap_{11}+A'p_{22}+A''p_{33}+ \\ & \quad +2Bp_{23}+2B'p_{13}+2B''p_{12}+ \\ & \qquad +E(x_1,\, x_2,\, x_3,\, z,\, p_1,\, p_2,\, p_3)=0\,, \end{aligned} \right.$$

les coefficients A, A', A'', B, B' et B'' désignant des fonctions à trois variables indépendantes x_1, x_2 et x_3, E étant une fonction quelconque des sept variables qui y figurent.

Mettons l'équation donnée sous la forme:

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1}\left[A\left(p_1+\frac{B''}{A}p_2+\frac{B'}{A}p_3\right)\right]+ \\ & \quad +\frac{\partial}{\partial x_2}\left[B''\left(p_1+\frac{A'}{B''}p_2+\frac{B}{B''}p_3\right)\right]+ \\ & \qquad +\frac{\partial}{\partial x_3}\left[B'\left(p_1+\frac{B}{B'}p_2+\frac{A''}{B'}p_3\right)\right]+ \\ & \qquad\quad +E'(x_1,\, x_2,\, x_3,\, z,\, p_1,\, p_2,\, p_3)=0\,, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} E' = E-\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}+\frac{\partial B''}{\partial x_2}+\frac{\partial B'}{\partial x_3}\right)p_1-\left(\frac{\partial B''}{\partial x_1}+\frac{\partial A'}{\partial x_2}+\frac{\partial B}{\partial x_3}\right)p_2- \\ -\left(\frac{\partial B'}{\partial x_1}+\frac{\partial B}{\partial x_2}+\frac{\partial A''}{\partial x_3}\right)p_3\,. \end{aligned}$$

Supposons, à présent, que les relations suivantes aient lieu:

$$(32) \qquad \frac{B''}{A}=\frac{A'}{B''}=\frac{B}{B'}\,;$$

$$(33) \qquad \frac{B'}{A}=\frac{B}{B''}=\frac{A''}{B'}\,.$$

Ces dernières hypothèses démontrent que l'équation donnée, quant aux termes impliquant les dérivées secondes, vérifie les conditions d'être parabolique, car les égalités (32) et (33) sont équivalentes aux trois relations distinctes, à savoir:

$$B''^2=AA', \quad B'^2=AA'', \quad B^2=A'A''.$$

Cela étant, désignons les rapports (32) par m et ceux (33)

— par n. En introduisant la désignation

$$p_1+mp_2+np_3=u\,, \tag{34}$$

on met, alors, aisément l'équation (30) sous la forme suivante

$$A\frac{\partial u}{\partial x_1}+B''\frac{\partial u}{\partial x_2}+B'\frac{\partial u}{\partial x_3}=E'' \tag{35}$$

où l'on a posé, en vertu des relations (31) et (32),

$$E''\equiv P_2p_2+P_3p_3-E$$

$$P_2\equiv A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B''}{A}\right)+B''\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B''}{A}\right)+B'\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B''}{A}\right),$$

$$P_3\equiv A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B'}{A}\right)+B''\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B'}{A}\right)+B'\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B'}{A}\right).$$

Introduisons, enfin, l'hypothèse que la fonction E'' ne dépend de variables p_1, p_2, p_3 qu'en forme du trinome (34).

Cela posé, l'ensemble des égalités (34) et (35) produit un système d'équations de Charpit. En effet, remplaçons, d'abord, les valeurs des coefficients m et n, dans la formule (34), respectivement par leur premiers rapports (32) et (33). Les équations (34) et (35) deviennent, donc,

$$\left\{\begin{aligned}&A\frac{\partial z}{\partial x_1}+B''\frac{\partial z}{\partial x_2}+B'\frac{\partial z}{\partial x_3}=Au,\\ &A\frac{\partial u}{\partial x_1}+B''\frac{\partial u}{\partial x_2}+B'\frac{\partial u}{\partial x_3}=E'''(x_1,\,x_2,\,x_3,\,z,\,u)\,.\end{aligned}\right. \tag{36}$$

L'intégration de ce dernier système revient à celle du système des équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dx_1}{A}=\frac{dx_2}{B''}=\frac{dx_3}{B'}=\frac{dz}{Au}=\frac{du}{E''}\,. \tag{37}$$

Désignons les deux intégrales des trois premiers rapports (37) par

$$\varphi(x_1,\,x_2,\,x_3)=\alpha\,,\quad \psi(x_1,\,x_2,\,x_3)=\beta\,,$$

α et β désignant deux constantes arbitraires.

Les deux dernières intégrales du système (37) étant

$$\varphi_i\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,z,\,u)=\alpha_i\,,\qquad i=1,\,2,$$

α_i désignant des constantes arbitraires, l'intégrale générale du système de Charpit (36) se met sous la forme, comme il suit;

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i\,(x_1, x_2, x_3, z, u)=f_i\,[\varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \psi(x_1, x_2, x_3)]\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i=1,\,2, \end{array} \right.$$

f_i désignant deux fonctions arbitraires.

Enfin, le résultat de l'élimination de la variable auxiliaire u, entre les deux dernières équation (38), produit l'intégrale générale de l'équation donnée (30).