Une propriété du déplacement parallèle d'après M. Levi-Civita.

Par

RICHARD ZUPANČIČ.

Dans un espace euclidien à N dimensions, considérons rapporté à un système cartésien le vecteur:

$$(v_1, v_2, \ldots v_i, \ldots v_N),$$

attaché au point P. Transportons ce vecteur parallèlement à luimême au point $\bar{P}$, nous obtenons le vecteur „équipollent":

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_N)$$

en choisissant les composantes:

$$\bar{v}_i = v_i$$

et l'on aura évidemment:

$$\sum_{i=1}^{N} (\bar{v}_i - v_i)^2 = 0. \tag{1}$$

Ce procédé suppose essentiellement qu'on puisse choisir arbitrairement les composantes des vecteurs qu'on attache au point $\bar{P}$. Or, si ces composantes sont assujetties à certaines conditions, on n'aura pas toujours la possibilité de satisfaire à l'équation (1) par aucun choix des $\bar{v}_i$. Dans ce cas suivons les idées de la méthode des moindres carrés et, par conséquent, rendons *minimum* la somme des carrés des écarts $(\bar{v}_i - v_i)$, c'est-à-dire la somme:

$$\sum_{i=1}^{N} (\bar{v}_i - v_i)^2. \tag{2}$$

De cette façon encore nous obtiendrons, attaché au point P un vecteur bien défini $(\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_N)$, duquel nous voulons dire qu'il soit des tous les vecteurs soumis aux conditions données *le mieux parallèle au premier dans le sens de la méthode des moindres carrés.*

Assujettons maintenant les vecteurs $(v_1, \ldots v_N)$ et $(\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_N)$ précisément à la condition d'être vecteurs d'une *multiplicité* métrique à n dimensions:

$$u_1, u_2, \ldots u_n, \qquad n<N.$$

Supprimant, comme on a l'habitude, les signes Σ, nous écrirons le carré de l'élément linéaire de la multiplicité:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$$

la sommation sur les indices grecs portant de 1 à n. Les $g_{\alpha\beta}$ sont, nous le supposons, des fonctions dérivables des $u_1, \ldots u_n$.

Admettons que cette multiplicité soit immergée *) dans un espace euclidien à N dimensions, rapporté à un système cartésien: $x_1, x_2, \ldots x_N$. Dans ce cas la multiplicité sera encore donnée par les coordonnées cartésiennes:

$$x_i = x_i\,(u_1, u_2, \ldots u_n), \qquad i = 1, 2, \ldots N$$

et les $g_{\alpha\beta}$ par:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}$$

la sommation sur les indices latins portant de 1 à N.

Un point quelconque P de la multiplicité étant donnée par les valeurs correspondants des $u_1, \ldots u_n$, nous écrirons pour abréger:

$$x_i = x_i(P).$$

Rappelons la définition des symboles de Christoffel:

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u_\alpha}\right).$$

Puisque nous avons

*) *Levi-Civita, Tullio,* Lezioni di calcolo differenziale assoluto, pag 140,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\gamma}\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}, \quad \ldots \text{ etc.},$$

nous aurons encore:

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}.$$

Attachons maintenant au point P de la multiplicité des $u_1, \ldots u_n$ un vecteur, appartenant à cette multiplicité, par le choix de n nombres:

(3) $$\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n$$

qui se transforment comme les différentielles: $du_1, du_2, \ldots du_n$. Pour rappeler le point d'application nous écrirons encore: $\xi^1(P)$, $\xi^2(P), \ldots \xi^n(P)$. Si nous procédons de cette manière en chaque point de la multiplicité, les $\xi^1(P), \ldots \xi^n(P)$ deviennent fonctions du point P.

A chaque point on attache d'une manière bien connue en outre n vecteurs fondamentaux de la multiplicité qui dans l'espace ambiant euclidien sont donnés par:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_2}{\partial u_\alpha}, \ldots \frac{\partial x_N}{\partial u_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n,$$

et auquels on rapporte le vecteur (3), de sorte que les composantes cartésiennes de ce vecteur deviennent:

$$v_i = \frac{\partial x_i(P)}{\partial u_\sigma}\xi^\sigma(P).$$

Au point $\bar{P}$ nous aurons de même:

$$\bar{v}_i = \frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\sigma}\xi^\sigma(\bar{P}).$$

Choisissons maintenant les nombres $\xi^\sigma(P)$ de manière à satisfaire à la condition du *minimum* de l'expression (2) qui devient:

(4) $$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\sigma}\xi^\sigma(\bar{P}) - \frac{\partial x_i(P)}{\partial u_\sigma}\xi^\sigma(P)\right)^2.$$

Pour cela il est nécessaire que les dérivées partielles de la somme (4) par rapport aux $\xi^1(\bar{P}), \ldots \xi^\tau(\bar{P}), \ldots \xi^n(\bar{P})$

s'annulent:

$$\left(\frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\sigma}\xi^\sigma(\bar{P}) - \frac{\partial x_i(P)}{\partial u_\sigma}\xi^\sigma(P)\right)\frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\tau} = 0 \tag{5}$$

ou bien:

$$g_{\sigma\tau}(\bar{P})\,\xi\,(P) - v_i\,\frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\tau} = 0\,. \tag{6}$$

Dans le cas que nous considérons le tenseur métrique étant identiquement:

$$g_{\alpha\beta}\;du_\alpha\;du_\beta > 0$$

et par conséquent le déterminant:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ g_{n1} & & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

les équations (6) donnent bien les valeurs $\xi^1(\bar{P}), \ldots \xi^n(\bar{P})$.

Par la même raison les conditions nécessaires pour le *minimum* sont encore suffisantes, puisque les dérivées partielles du second ordre de la somme (4) par rapport aux $\xi^1(\bar{P}), \ldots \xi^n(P)$ sont précisément les $g_{\sigma\tau}$.

Nous donnons pour les formules (6) une interprétation très simple que nous étudions, pour plus de netteté, dans le cas de 2 dimensions.

Transportons par un déplacement parallèle élémentaire le vecteur v_1, v_2, v_3 du point d'application P au point $\bar{P}$, ces deux points étant des points quelconques de la surface (multiplicité) u_1, u_2; projetons alors le vecteur transporté sur le plan tangent de la surface au point $\bar{P}$. Appelons n_1, n_2, n_3 le vecteur normal de la surface en $\bar{P}$, et soit λ un facteur scalaire, le vecteur qui donne cette projection, aura la forme:

$$v_i - \lambda n_i$$

et il sera possible, en outre, de le rapporter à l'aide de deux nombres $\xi^1(\bar{P})$ et $\xi^2(\bar{P})$ aux vecteurs fondamentaux liés au point $\bar{P}$; partant on aura:

$$\nu_i - \lambda n_i = \xi_\sigma(\bar{P}) \frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\sigma}.$$

Multiplions cette expression par $\frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\tau}$, nous aurons:

$$n_i \frac{\partial x_i(\bar{P})}{\partial u_\tau} = 0,$$

et, par conséquent, nous retombons sur les équations (6). Ènonçons:

*) *Étant donné un vecteur de surface, c'est-à-dire un vecteur lié à un point d'une surface donnée et situé dans le plan tangent correspondant, nous obtenons attaché à un autre point de cette surface le vecteur de surface le mieux parallèle dans le sans de la méthode des moindres carrés par la projection du premier vecteur, appliqué au second point, sur le plan tangent de la surface en ce point.*

Considérons maintenant dans la multiplicité des $u_1, u_2, \ldots u_n$ une courbe quelconque passant par P et $\bar{P}$, et donnée par les équations paramétriques:

$$u_\nu = u_\nu(s)$$

et telles qu'à la valeur s corresponde le point P et à $\bar{s}$ le point $\bar{P}$. Nous écrirons par conséquent $x_i(s)$ pour $x_i(P)$, ou bien $\xi_\sigma(\bar{s})$ pour $\xi_\sigma(\bar{P}) \ldots$ etc., ces quantités étant devenues des fonctions du paramètre s.

Transcrivons encore une fois les équations (5):

$$\frac{\partial x_i(\bar{s})}{\partial u_\sigma} \frac{\partial x_i(\bar{s})}{\partial u_\tau} \xi^\sigma(\bar{s}) - \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\sigma} \frac{\partial x_i(\bar{s})}{\partial u_\tau} \xi_\sigma(s) = 0 .$$

Considérons en outre les identités:

$$\frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\sigma} \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\tau} \xi_\sigma(s) - \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\sigma} \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\tau} \xi_\sigma(s) = 0 .$$

Faisons la différence de ces deux expressions, divisée par $\bar{s} - s$ et passons à la limite:

$$\lim (\bar{s} - s) = 0$$

*) Cette interprétation m'a été signalée par M. Antoine Vakselj.

nous aurons:

$$\frac{\partial^2 x_i(s)}{\partial u_\sigma \partial u_\rho} \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\tau} \frac{du_\rho}{ds} \xi^\sigma(s) + \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\sigma} \frac{\partial x_i(s)}{\partial u_\tau} \frac{d\xi^\sigma(s)}{ds} = 0$$

ou bien, à l'aide des propriété des symboles de Christoffel, rappelées plus haut:

$$g_{\sigma\tau} \frac{d\xi^\sigma}{ds} + \Gamma_{\tau,\sigma\rho} \frac{du_\rho}{ds} \xi^\sigma = 0$$

et enfin:

$$\frac{d\xi^\sigma}{ds} + \Gamma^{\ \sigma}_{\rho\tau} \xi^\rho \frac{du_\tau}{ds} = 0 .$$

Ces équations étant les équations différentielles du déplacement parallèle d'apréd M. Levi-Civita le long de la courbe $u_\nu = u_\nu(s)$, nous avons le théorème que voici:

Le déplacement parallèle d'après M. Levi-Civita le long d'une courbe tracée dans une multiplicité métrique fait correspondre à un vecteur de cette multiplicité, appliqué à un point de la courbe, parmi les vecteurs de cette multiplicité appliqués à un point de la courbe, infiniment voisin toujours le vecteur qui est le mieux parallèle du premier au sens de la méthode des moindres carrés.

Le théorème inverse est vrai aussi.