

Théorème sur les intégrales curvilignes.

Par

MICHEL PETROVITCH

1. D'après le théorème bien connu de Darboux, l'intégrale

$$(1) \quad I = \int_L f(z) dz$$

prise le long d'un chemin L sur lequel $f(z)$ est holomorphe, peut s'écrire

$$(2) \quad I = \lambda \cdot f(\xi) \cdot s,$$

s étant la longueur du chemin, ξ l'affixe d'un point de ce chemin et λ l'affixe d'un point à l'intérieur du cercle de rayon 1 ayant l'origine comme centre.

Je me propose de montrer que, certaines conditions étant remplies, *le facteur λ de Darboux peut être remplacé par un facteur plus précis μ , représentant l'affixe d'un point à l'intérieur de la couronne circulaire comprise entre deux cercles de rayons fixes, ayant l'origine comme centre.*

On aura ainsi, non seulement une limite *supérieure* (celle de Darboux), mais aussi une limite *inférieure* pour l'intégrale I , non fournie par aucun théorème actuellement connu. De plus, les deux bords de la couronne circulaire sont effectivement atteints dans des cas particuliers.

Supposons d'abord le chemin d'intégration L tel que le long de ce chemin l'élément intégral $f(z) dz$ ¹⁾ ne change pas

¹⁾ Autrement dit l'argument du nombre $f(z) \frac{dz}{ds}$.

de quadrant délimité par les axes orthogonaux des coordonnées xOy dans le plan de la variable z .

Soit

$$z = x + yi, \quad f(z) = f(x + yi) = P + Qi,$$

$$f(z) dz = M + Ni,$$

où

$$(3) \quad \begin{aligned} M &= Pdx - Qdy, \\ N &= Qdx + Pdy. \end{aligned}$$

Posons, pour abréger

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} M &= \int_{\mathcal{L}} (Pdx - Qdy) = U, \\ \int_{\mathcal{L}} N &= \int_{\mathcal{L}} (Pdy + Qdx) = V \end{aligned}$$

et désignons par M' , N' , U' , V' les valeurs absolues respectives des quantités réelles M , N , U , V . On aura

$$(5) \quad \begin{aligned} |f(z) dz| &= |M + Ni| = \sqrt{M^2 + N^2} = \\ &= \sqrt{M'^2 + N'^2} = \lambda(M' + N') \end{aligned}$$

où λ est un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1. Par suite on aura

$$(6) \quad \int_{\mathcal{L}} |f(z) dz| = \int_{\mathcal{L}} \lambda(M' + N'),$$

et, M' , N' étant réels et positifs, le théorème commun de la moyenne fournit

$$(7) \quad \int_{\mathcal{L}} |f(z) dz| = \theta \left[\int_{\mathcal{L}} M' + \int_{\mathcal{L}} N' \right],$$

où θ est un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1.

D'autre part, on aura

$$\begin{aligned}
 |I| &= \left| \int_L (M+Ni) \right| = \left| \int_L M + i \int_L N \right| = \\
 (8) \quad &= |U+iV| = \sqrt{U^2+V^2} = \\
 &= \sqrt{U'^2+V'^2} = \theta'(U+V),
 \end{aligned}$$

où θ' est également un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1.

Comme M et N ne changent pas de signe le long de l'arc L , on a

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \int_L M' &= \int_L \text{val. abs. } M = \text{val. abs. } \int_L M, \\
 \int_L N' &= \int_L \text{val. abs. } N = \text{val. abs. } \int_L N,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad U' &= \text{val. abs. } U = \text{val. abs. } \int_L M = \int_L M', \\
 V' &= \text{val. abs. } V = \text{val. abs. } \int_L N = \int_L N',
 \end{aligned}$$

et par suite, d'après (8)

$$(11) \quad |I| = \theta' \left(\int_L M' + \int_L N' \right).$$

Divisant (11) par (7) on trouve

$$\frac{|I|}{\int_L |f(z) dz|} = \frac{\theta'}{\theta} = \theta'',$$

ou bien

$$(12) \quad \left| \int_L f(z) dz \right| = \theta'' \int_L |f(z) dz|,$$

θ'' étant un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$. Or, comme le premier membre de (12) ne surpasse jamais la valeur

$$\int_L |f(z) dz|,$$

on peut écrire

$$(13) \quad \left| \int_L f(z) dz \right| = r_1 \int_L |f(z) dz|,$$

où r_1 est compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1.

D'autre part, on a

$$|f(z) dz| = |f(z)| \cdot |dz| = |f(z)| ds,$$

où ds est l'élément de l'arc L . On aura donc

$$\int_L |f(z) dz| = \int_0^s |f(z)| ds$$

et l'intégrale du second membre de (13) s'écrit, en vertu du théorème commun de la moyenne

$$(14) \quad \int_L |f(z)| ds = |f(\xi)| s,$$

où ξ est l'affixe d'un point situé sur l'arc L entre ses deux extrémités (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , s étant la longueur de L entre ces extrémités.

Si l'on désigne alors par α l'argument de l'intégrale I , on aura, en vertu de (13)

$$(15) \quad I = |I| e^{\alpha i} = r_1 e^{\alpha i} \int_L |f(z) dz|.$$

De même, en désignant par β l'argument de $f(\xi)$, on aura

$$f(\xi) = |f(\xi)| e^{\beta i},$$

$$|f(\xi)| = f(\xi) e^{-\beta i},$$

donc, d'après (15)

$$I = \mu f(\xi) \cdot s,$$

$$\mu = \eta e^{(\alpha - \beta) i}.$$

Or, μ est l'affixe d'un point compris dans la région annulaire (C) limitée par les deux cercles de rayons respectifs $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1, ayant l'origine comme centre. On arrive ainsi au théorème suivant:

Toutes les fois que le long de l'arc d'intégration L l'élément intégrale $f(z) dz$ ne change pas de quadrant délimité par les axes des coordonnées orthogonaux dans le plan des z , l'intégrale

$$I = \int_L f(z) dz,$$

a pour valeur

$$(16) \quad I = \mu \cdot |f(\xi)| s,$$

où s est la longueur de L , ξ l'affixe d'un point situé sur L , et μ l'affixe d'un point situé à l'intérieur de la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1, ayant l'origine comme centre.

2. La condition du théorème précédent, c'est-à-dire la condition que l'élément intégral ne change pas de quadrant des axes des coordonnées, sera toujours remplie par un arc L le long duquel les variations de x sont monotones et qui, son équation étant $y = \varphi(x)$, ne coupe entre ses extrémités (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ni l'une ni l'autre des deux courbes

$$(17) \quad \begin{aligned} P(x, y) - \varphi'(x) Q(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) + \varphi'(x) P(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Cette condition sera, par exemple, remplie par le segment de droite (z_1, z_2) ne coupant entre z_1 et z_2 ni l'une ni l'autre des deux courbes

$$(18) \quad \begin{aligned} P(x, y) - a Q(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) + a P(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

la constante a avant pour valeur

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Considérons le chemin L composé de deux segments de droites, le premier parallèle à Ox , passant par l'extrémité z_1 , le second parallèle à Oy , passant par l'extrémité z_2 de L . Le long du premier segment on a

$$M = P(x, y_1),$$

$$N = Q(x, y_1)$$

et le long du second

$$M = -Q(x_2, y),$$

$$N = P(x_2, y).$$

Par suite, un tel chemin satisfera à la condition du théorème toutes les fois:

1° que ni $P(x, y_1)$ ni $Q(x, y_1)$ ne changent de signe lorsque x varie de x_1 à x_2 ;

2° que ni $P(x_2, y)$ ni $Q(x_2, y)$ ne changent de signe lorsque y varie de y_1 à y_2 .

On trouve de même que la même condition sera remplie par le chemin L composé de deux segments de droites, le premier parallèle à Ox passant par z_2 , le second parallèle à Oy passant par z_1 , toutes les fois:

1° que ni $P(x_1, y)$ ni $Q(x_1, y)$ ne changent de signe lorsque y varie de y_1 à y_2 ;

2° que ni $P(x, y_2)$ ni $Q(x, y_2)$ ne changent de signe lorsque x varie de x_1 à x_2 .

Une condition suffisante pour qu'un chemin L soit de la nature supposée par le théorème, peut s'énoncer sous la forme géométrique suivante:

Considérons, dans le plan POQ de la fonction $f(z)$, la courbe G symétrique, par rapport à l'axe OQ , de la courbe représentant $f(z)$ (en supposant le système orthogonal POQ orienté de manière que l'axe OP soit parallèle à l'axe Ox du système xOy).

L'angle α du rayon vecteur en un point (P, Q) de la courbe G , et l'angle β de la direction perpendiculaire à ce rayon vecteur sont donnés par

$$(19) \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{Q}{P}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{P}{Q}.$$

Pour que M ne s'annule pas le long de L , il suffit que le long de cet arc la dérivée $\frac{dy}{dx}$ diffère constamment de $\frac{P}{Q}$, c'est à-dire que la direction de la tangente en chaque point de L diffère de la direction perpendiculaire au rayon vecteur au point correspondant de la courbe G .

Pour que N ne s'annule pas le long de L , il suffit que le long de cet arc $\frac{dy}{dx}$ diffère constamment de $-\frac{Q}{P}$, c'est-à-dire que la direction de la tangente en chaque point de L diffère de la direction du rayon vecteur au point correspondant de G . Par suite:

L'élément intégral ne changera pas de quadrant le long de tout arc L le long duquel aucune tangente et aucune normale à cet arc ne soient parallèles au rayon vecteur du point correspondant de la courbe G .

3. Je rappelle maintenant que dans un travail antérieur ¹⁾ j'ai démontré l'inégalité analogue relative aux sommes finies, à savoir:

Lorsque les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont tous situés dans une même quadrant des axes des coordonnées, on a

$$(20) \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \eta \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

où η est un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1.

Il est évident que de cette relation l'on déduit la relation analogue à (13) en prenant

$$(21) \quad a_k = f(\xi_k) (z_k - z_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

où z_k et ξ_k sont des affixes des points repartis sur le chemin L , de telle sorte que ξ_k se trouve entre z_{k-1} et z_k . Il suffit de faire tendre n vers l'infini de manière que toutes les distances $|z_k - z_{k-1}|$ tendent vers zéro.

¹⁾ *Module d'une somme* (Enseignement mathématique XIX, p. 53—56, Genève 1917).

Cependant, la relation (20) se prête à la généralisation suivante qui permet de généraliser la relation (13):

Lorsque tous les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont situés dans un angle d'ouverture $\lambda < \pi$, ayant son sommet à l'origine, on a la double inégalité

$$(22) \quad \cos \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

La seconde de ces inégalités est évidente. Pour démontrer la première, posons

$$a_j = \rho_j e^{\theta_j i} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

et cherchons le minimum de l'expression

$$T = \frac{|\rho_1 e^{\theta_1 i} + \rho_2 e^{\theta_2 i} + \dots + \rho_n e^{\theta_n i}|}{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n}$$

lorsque

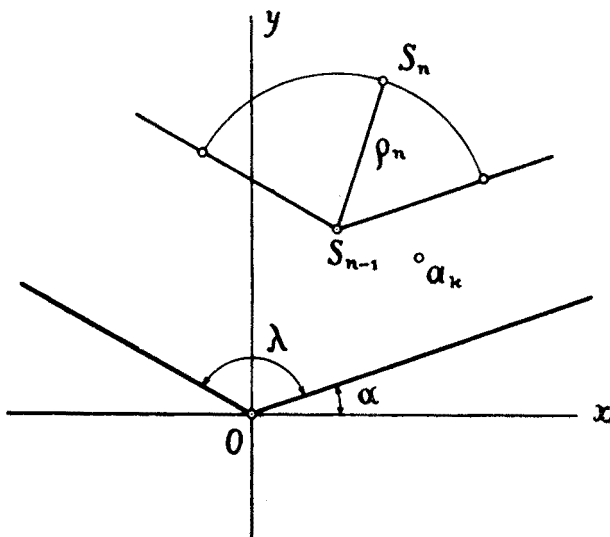
$$\rho_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

et

$$(23) \quad \alpha \leq \theta_j \leq \alpha + \lambda \leq \alpha + \pi \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

En supposant d'abord les ρ_j fixes, pour que l'expression T , et par suite l'expression

$$|S_n| = \left| \sum_{j=1}^n \rho_j e^{\theta_j i} \right|$$



prenne sa plus petite valeur sous les conditions (23), il faut que les θ_j soient égaux à α , ou bien à $\alpha + \lambda$. En effet, comme on le montre facilement:

1° l'argument de S_n est également compris entre α et $\alpha + \lambda$;

2° S_{n-1} étant un point d'affixe situé dans ce même angle, l'expression

$$|S_n| = |S_{n-1} + \rho_n e^{i\theta_n}|$$

ne peut prendre sa plus petite valeur que pour

$$\theta_n = \alpha \quad \text{ou} \quad \theta_n = \alpha + \lambda.$$

Il s'en suit que, si l'on désigne dans ce minimum par ρ' , resp. ρ'' la somme des modules des éléments a_j dont les arguments sont égaux à α , resp. à $\alpha + \lambda$, l'expression T peut s'écrire

$$T = \frac{|\rho' e^{i\alpha} + \rho'' e^{i(\alpha+\lambda)}|}{\rho' + \rho''} = \frac{|\rho' + \rho'' e^{i\lambda}|}{\rho' + \rho''} = \frac{|1 + \rho e^{i\lambda}|}{1 + \rho},$$

où l'on a posé

$$\rho = \frac{\rho''}{\rho'}.$$

Par suite on aura

$$T^2 = \frac{1 + 2\rho \cos \lambda + \rho^2}{(1 + \rho)^2}$$

et l'on s'assure facilement que cette expression prend sa plus petite valeur (pour les ρ positifs) lorsque $\rho = 1$, ce minimum étant $\cos^2 \frac{\lambda}{2}$.

Donc, avec les conditions imposées aux nombres a_j , T ne peut pas prendre une valeur plus petite que $\cos \frac{\lambda}{2}$, ce qui démontre la première des inégalités (22).

Si l'on prend alors pour les a_j les expressions (21), et en faisant le même passage à la limite que précédemment, on arrive au théorème suivant:

Théorème: *Toutes les fois quz, le long de l'arc d'intégration L , l'élément intégral $f(z) dz$ ¹⁾ ne sort pas d'un angle*

1) Autrement dit l'argument du nombre $f(\bar{x}) \frac{dz}{ds}$.

d'ouverture $\lambda < \pi$ ayant son centre à l'origine, l'intégrale

$$I = \int_L f(z) dz$$

a pour valeur

$$I = \mu \cdot |f(\xi)| \cdot s,$$

où s est la longueur de L , ξ l'affixe d'un point situé sur L , et μ l'affixe d'un point situé à l'intérieur de la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons respectifs

$$\cos \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad 1$$

ayant l'origine comme centre.

4. Les cas limites du théorème, à l'égard du facteur μ , sont ceux où le point d'affixe μ se trouve

A) ou bien sur le cercle de rayon 1;

B) ou bien sur le cercle de rayon $\cos \frac{\lambda}{2}$.

Dans le cas particulier où l'élément intégral $f(z) dz$ ne change pas de quadrant, on a $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et le cercle limite du cas

B a pour rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ces cas limites peuvent-ils être effectivement atteints, et dans quelles conditions?

Pour le voir, remarquons que, a et b étant positifs, le rapport

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \lambda + b^2}}{a + b}$$

se réduit à 1 pour $b = 0$, et à $\cos \frac{\lambda}{2}$ pour $a = b$. Par conséquent, le cas A) se présentera toutes les fois qu'on aura soit $M' = 0$, soit $N' = 0$, c'est-à-dire *toutes les fois que l'arc d'intégration satisfera à l'une ou l'autre des équations différentielles du premier ordre*

$$(23) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Il en sera, par exemple, ainsi lorsque, l'arc étant le segment (x_1, x_2) de l'axe réel Ox , ou bien le segment (y_1, y_2) de l'axe imaginaire Oy , la fonction $f(z)$ est réelle ou purement imaginaire le long de ce segment.

Le long du segment (x_1, x_2) on a

$$(22) \quad M = P(x, 0) dx, \quad N = Q(x, 0) dx,$$

et le long du segment (y_1, y_2)

$$(23) \quad M = -Q(0, y) dy, \quad N = P(0, y) dy;$$

l'une ou l'autre des valeurs M et N , et par suite aussi des valeurs M' et N' , est nécessairement nulle.

Il en sera de même lorsque, l'arc étant un segment (z_1, z_2) de l'une ou l'autre bissectrice $y = x$, $y = -x$ des angles des axes Ox et Oy , la fonction $f(z)$ a le long de ce segment sa partie réelle P et sa partie imaginaire Q égales en valeur absolue. Le long du segment (z_1, z_2) on a, ou bien

$$(24) \quad dy = dx, \quad M = (P - Q) dx, \quad N = (P + Q) dx$$

ou bien

$$(25) \quad dy = -dx, \quad M = (P + Q) dx, \quad N = (Q - P) dx$$

et l'une des valeurs M , N , et par suite aussi M' , N' , est nulle.

Le cas B) se présentera toutes les fois qu'on aura $M' = N'$, c'est-à-dire *toutes les fois que l'arc d'intégration satisfera à l'une ou l'autre des équations différentielles du premier ordre*

$$(26) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y) - Q(x, y)}{P(x, y) + Q(x, y)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{Q(x, y) - P(x, y)}.$$

Il en sera, par exemple, ainsi lorsque, l'arc étant le segment (x_1, x_2) de l'axe Ox , ou bien le segment (y_1, y_2) de l'axe Oy , la partie réelle P et la partie imaginaire Q de $f(z)$ sont, le long de ce segment égales en valeur absolue; on a alors le long du segment $M' = N'$.

Il en sera de même lorsque, l'arc étant un segment (z_1, z_2) de l'une ou l'autre bissectrice $y = x$, $y = -x$, la fonction $f(z)$ est réelle ou purement imaginaire le long du segment.

Les conditions rattachées à l'une ou l'autre paire d'équa-

tions différentielles (21) et (26) se laissent encore présenter sous la forme géométrique suivante:

Envisageons la courbe G considérée dans ce qui précède (la symétrique de la courbe $f(z)$ par rapport à l'axe OQ) et la symétrique G' de la courbe $(1+i)f(z)$ par rapport à OQ . Les deux rapports

$$-\frac{Q}{P} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Q}$$

sont les coefficients angulaires respectifs du rayon vecteur du point (P, Q) sur la courbe G , et celui de sa direction perpendiculaire. Les deux rapports

$$\frac{P+Q}{Q-P} \quad \text{et} \quad \frac{P-Q}{P+Q},$$

sont les coefficients angulaires respectifs du rayon vecteur (P', Q') sur la courbe G' et de sa direction perpendiculaire.

Les équations (21), s'excluant mutuellement, expriment que, le long de l'arc d'intégration, ou bien la tangente, ou bien la normale à cet arc, est constamment parallèle au rayon vecteur du point correspondant de la courbe G .

Les équations (26), s'excluant aussi mutuellement, expriment que, le long de cet arc, ou bien la tangente, ou bien la normale, est parallèle au rayon vecteur du point correspondant de la courbe G' . Par conséquent:

L'un ou l'autre des cas limites A) et B) se présentera toutes les fois que tout le long du chemin d'intégration ou bien la tangente, ou bien la normale à ce chemin, est parallèle au rayon vecteur du point correspondant de l'une ou l'autre des deux courbes G et G' .

5. Les équations différentielles (21) et (26) fournissant les cas limites du théorème du § 1. *s'intègrent toutes par quadratures.*

1° Pour intégrer l'équation

$$(27) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q},$$

posons pour abrégé

$$P^2 + Q^2 = \Delta$$

et introduisons une nouvelle variable t telle que (27) se décompose en deux équations simultanées

$$\frac{dy}{dt} = \frac{P}{\Delta}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{Q}{\Delta}.$$

On en tire

$$\frac{dx+idy}{dt} = \frac{Q+iP}{\Delta} = i \frac{P-Qi}{\Delta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dt} = \frac{i}{f(z)},$$

d'où l'on tire

$$(28) \quad t = -i \int f(z) dz + \text{const.}$$

Comme t est essentiellement réel, la partie imaginaire du second membre de (28) doit être nulle. L'intégrale générale de (27) s'obtient donc en égalant à une constante arbitraire la partie imaginaire de l'intégrale

$$i \int f(z) dz,$$

c'est-à-dire la partie réelle de l'intégrale

$$(29) \quad \int f(z) dz.$$

2° Pour intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{P},$$

posons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P}{\Delta}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{Q}{\Delta},$$

d'où

$$\frac{dx+idy}{dt} = \frac{P-Qi}{\Delta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{f(z)},$$

d'où l'on tire

$$t = \int f(z) dz + \text{const.}$$

L'intégrale générale s'obtient donc en égalant à une constante arbitraire réelle la partie imaginaire de l'intégrale (29).

3° Pour intégrer l'équation

$$(30) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P-Q}{P+Q},$$

il suffit de remplacer dans le cas 1° la fonction $f(z)$ par

$$\varphi(z) = (1+i)f(z) = (P-Q) + i(P+Q).$$

4° Pour intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P+Q}{Q-P},$$

il suffit de remplacer dans le cas 1° la fonction $f(z)$ par

$$\psi(z) = (1-i)f(z) = (P+Q) + i(Q-P).$$

Les chemins le long desquels la valeur de l'intégrale I atteindra effectivement l'une ou l'autre des limites assignées par le théorème du § 1, s'obtiennent donc en égalant à une constante réelle la partie réelle ou la partie imaginaire d'une certaine intégrale

$$\int \Phi(z) dz.$$

Comme il faut encore que le chemin passe une extrémité z_1 de l'arc d'intégration, ce chemin sera fourni par l'équation exprimant que la partie réelle resp. la partie imaginaire de l'intégrale

$$\int_{z_1}^z \Phi(z) dz,$$

est nulle. Pour que le chemin passe aussi par l'autre extrémité z_2 de L , et par suite pour que la limite soit effectivement at-

teinte, il faut et il suffit que la partie réelle, resp. la partie imaginaire de l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_2} \Phi(z) dz$$

soit nulle.

Cartwright, (Labrador). Juillet 1933.
