Contribution à l'étude des solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires.

Par

TADYA PEYOVITCH.

1. Considérons un système d'équations

$$1) \qquad \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k = f_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

où $a_{ik}(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$, tendant vers des limites finies et déterminées,

$$\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik};$$

$f_i(t)$ étant des fonctions continues pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. Les produits $f_i(t)\, e^{-\lambda t}$ sont continus pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$ et tendent vers des limites finies et déterminées

$$\lim_{t=\infty} f_i(t)\, e^{-\lambda t} = l_i ,$$

λ étant un nombre réel;

2°.

$$\lim_{t=\infty} \frac{f'_i(t)}{f_i(t)} = \lambda;$$

3°.

$$\lim_{t=\infty} \frac{f_i(t)}{f_1(t)} = a_i \neq 0 \quad (i=2, 3, \ldots, n)$$

où a_i est une constante finie et différente de zéro; c'est-à-dire toutes les fonctions $f_i(t)$ sont du même ordre infinitésimal.

Nous appelerons les conditions 1°., 2°., 3°.: conditions (A).

Soient r_i les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}+r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+r \end{vmatrix} = 0 ,$$

dont les parties réelles ρ_i sont distinctes et satisfont aux relations

$$(2) \qquad \rho_1-\lambda>\rho_2-\lambda>\dots>\rho_n-\lambda>0 .$$

Dans cet article nous allons démontrer que les équations (1), sous les conditions ci-dessus, admettent un système de solutions x_i tel que l'on ait

$$\lim_{t=\infty}\frac{x_i'}{x_i}=\lambda \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

2. Considérons d'abord les équations (1), où $a_{ik}(t)$ sont des constantes, c'est-à-dire les équations

$$(3) \qquad \frac{d\bar{x}_i}{dt}+\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ik}\,\bar{x}_k = f_i(t).$$

Si l'on pose

$$(4) \qquad \bar{x}_i=\bar{y}_i\,e^{\lambda t}$$

les équations (3) deviennent

$$(5) \qquad \frac{d\bar{y}_i}{dt}+(\bar{a}_{ii}+\lambda)\,\bar{y}_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\bar{a}_{ik}\,\bar{y}_k=f_i(t)\,e^{-\lambda t} .$$

Les parties réelles $\rho_i'=\rho_i-\lambda$ des racines $r_i'=r_i-\lambda$ de l'équation caractéristique du système (5) satisfont, d'après l'hypothèse admise, aux conditions (2).

En posant

$$(6) \qquad \bar{u}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \bar{y}_k \text{ [1]},$$

les équations (5) deviennent alors

$$(7) \qquad \frac{d\bar{u}_i}{dt} = (r_i - \lambda)\, \bar{u}_i + \varphi_i(t)$$

où les fonctions

$$(8) \qquad \varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, f_k(t)\, e^{-\lambda t}$$

sont continues et tendent vers des limites finies et déterminées, lorsque t augmente indéfiniment. Les fonctions $\varphi_i(t)$, d'après les conditions (A), satisfont aux relations

$$(9) \quad \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{b_{i1} + b_{i2} \lim\limits_{t=\infty} \dfrac{f_2(t)}{f_1(t)} + \ldots + b_{in} \lim\limits_{t=\infty} \dfrac{f_n(t)}{f_1(t)}}{b_{11} + b_{12} \lim\limits_{t=\infty} \dfrac{f_2(t)}{f_1(t)} + \ldots + b_{1n} \lim\limits_{t=\infty} \dfrac{f_n(t)}{f_1(t)}} = b_i \neq 0 \text{ [2]},$$

$$(10) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_i'(t)}{\varphi_i(t)} = \lim_{t=\infty} \frac{b_{i1} f_1'(t) + \ldots + b_{in} f_n'(t)}{b_{i1} f_1(t) + \ldots + b_{in} f_n(t)} - \lambda = 0 \text{ [3]},$$

b_i étant une constante finie et différente de zéro. Par conséquent, les expressions

$$\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)}, \quad \frac{\varphi_i'(t)}{\varphi_i(t)}$$

sont bornées pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand.

Les solutions des équations (7), tendant vers des limites finies et déterminées pour $t = \infty$, sont

---

[1]) d'où l'on obtient $\bar{y}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} d_{ik} \bar{u}_k$.

[2]) Sous l'hypothèse que les fonctions

$$b_{i1} + b_{i2} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} + \ldots + b_{in} \frac{f_n(t)}{f_1(t)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sont finies et ne s'annulent pas identiquement pour toutes les valeurs de la variable réelle $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand.

[3]) Car on a, d'après 2°., $f_i'(t) = \lambda f_i(t) + \varepsilon_i(t)\, f_i(t)$ avec $\lim\limits_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0$.

$$(11) \qquad \overline{u}_i = e^{(r_i - \lambda)\,t} \int_{\infty}^{t} e^{-(r_i - \lambda)\,t} \varphi_i(t)\, dt \text{ [1]}\,.$$

Considérons maintenant l'expression

$$\lim_{t=\infty} \frac{\overline{u}_i}{\overline{u}_1} = \lim_{t=\infty} \frac{e^{(r_i - \lambda)\,t} \int_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)\,t} \varphi_i(t)\, dt}{e^{(r_1-\lambda)t} \int_{\infty}^{t} e^{-(r_1-\lambda)\,t} \varphi_1(t)\, dt}\,,$$

ou sous la forme

$$\lim_{t=\infty} \frac{\overline{u}_i}{\overline{u}_1} = \lim_{t=\infty} \frac{e^{(r_i-r_1)\,t} \int_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)\,t} \varphi_i(t)\, dt}{\int_{\infty}^{t} e^{-(r_1-\lambda)\,t} \varphi_1(t)\, dt}\,,$$

qui, d'après la règle de L'Hospital, devient [2])

$$(12) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\overline{u}_i}{\overline{u}_1} = (r_i - r_1) \lim_{t=\infty} \frac{\int_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)\,t} \varphi_i(t)\, dt}{e^{-(r_i-\lambda)\,t} \varphi_1(t)} + \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)}\,.$$

En appliquant de nouveau la règle de L'Hospital à l'expression

---

[1]) Voir mon Mémoire: *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires (Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, t. I, 1932).*

[2]) En supposant que les fonctions $\varphi_i(t)$ ($i=1, 2, \ldots n$) soient telles que l'on peut appliquer la règle de L'Hospital, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi_i(t)$ ne changent pas de signe pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand.

$$\lim_{t=\infty} \frac{\int\limits_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)t}\varphi_i(t)\,dt}{e^{-(r_i-\lambda)t}\varphi_1(t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{e^{-(r_i-\lambda)t}\varphi_1(t)}{\int\limits_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)t}\varphi_i(t)\,dt}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)}}{\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{\varphi_1'(t)}{\varphi_1(t)} - (r_i - \lambda)},$$

la relation (12) devient

$$\lim_{t=\infty} \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_1} = (r_i - r_1) \frac{\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)}}{\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{\varphi_1'(t)}{\varphi_1(t)} - (r_i - \lambda)} + \lim \frac{\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)}$$

d'où, d'après (9) et (10),

$$(13) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_1} = \frac{r_1-\lambda}{r_i-\lambda}\, b_i \neq 0 \quad \cdot \quad (i=2, 3, \ldots, n).$$

D'autre part on aura, d'après (7) et (10),

$$\lim_{t=\infty} \frac{\bar{u}_i'}{\bar{u}_i} = r_i - \lambda + \lim_{t=\infty} \frac{e^{-(r_i-\lambda)t}\varphi_i(t)}{\int\limits_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)t}\varphi_i(t)\,dt} = \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_i'(t)}{\varphi_i(t)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\bar{u}_i'}{\bar{u}_i} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Les transformations (6) donnent

$$\lim_{t=\infty} \frac{\bar{y}_i'}{\bar{y}_i} = \lim_{t=\infty} \frac{d_{i1}\bar{u}_1' + d_{i2}\bar{u}_2' + \ldots + d_{in}\bar{u}_n'}{d_{i1}\bar{u}_1 + d_{i2}\bar{u}_2 + \ldots + d_{in}\bar{u}_n}.$$

En vertu des relations

$$(14') \qquad \frac{\bar{u}_i'}{\bar{u}_i} = \varepsilon_i(t), \quad \bar{u}_i' = \bar{u}_i\, \varepsilon_i(t) \quad \text{avec} \lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0,$$

on obtient

$$\lim_{t=\infty} \frac{\bar{y}_i'}{\bar{y}_i} = \lim_{t=\infty} \frac{d_{i1}\bar{u}_1\, \varepsilon_1(t) + d_{i2}\bar{u}_2\, \varepsilon_2(t) + \ldots + d_{in}\bar{u}_n\, \varepsilon_n(t)}{d_{i1}\bar{u}_1 + d_{i2}\bar{u}_2 + \ldots + d_{in}\bar{u}_n},$$

ou

$$\lim_{t=\infty} \frac{\bar{y}_i'}{\bar{y}_i} =$$

$$= \frac{d_{i1} \lim\limits_{t=\infty} \varepsilon_1(t) + d_{i2} \lim\limits_{t=\infty} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} \varepsilon_2(t) + \ldots + d_{in} \lim\limits_{t=\infty} \frac{\bar{u}_n}{\bar{u}_1} \varepsilon_n(t)}{d_{i1} + d_{i2} \lim\limits_{t=\infty} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + \ldots + d_{in} \lim\limits_{t=\infty} \frac{\bar{u}_n}{\bar{u}_1}}$$

d'où, d'après (13) et (14'),

$$(15) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\bar{y}_i'}{\bar{y}_i} = 0\ ^{1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il en résulte, d'après (4),

$$(16) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\bar{x}_i'}{\bar{x}_i} = \lim_{t=\infty} \frac{\bar{y}_i' + \lambda \bar{y}_i}{\bar{y}_i} = \lambda \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Par conséquent, on a le théorème suivant:

I. Les équations (3) admettent, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, un système de solutions $\bar{x}_i$ satisfaisant, sous les conditions (A) et (2), à la relation (16).

3. Considérons maintenant les équations

$$(17) \qquad \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k = f_i(t),$$

$a_{ik}(t)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t \geq t_0 \geq 0$, qui tendent vers des limites finies et déterminées,

$$\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}.$$

---

[1]) En supposant que l'expression $d_{i1} + d_{i2} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + \ldots + d_{in} \frac{\bar{u}_n}{\bar{u}_1}$ soit finie et ne s'annule pas identiquement pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand.

Si l'on pose

$$x_i = y_i e^{\lambda t}, \tag{18}$$

les équations (17) deviennent

$$\frac{dy_i}{dt} + (a_{ii}(t) + \lambda)\, y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik}(t)\, y_k = f_i(t)\, e^{-\lambda t} \tag{19}$$

et peuvent s'écrire

$$\frac{dy_i}{dt} + (\bar{a}_{ii} + \lambda)\, y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \bar{a}_{ik}\, y_k = f_i(t)\, e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, y_k\,,$$

où l'on a

$$\delta_{ik}(t) = \bar{a}_{ik} - a_{ik}(t)\,, \qquad \lim_{t=\infty} \delta_{ik}(t) = 0\,.$$

Soit $\bar{y}_i = y_i^0$ un système de solutions bornées des équations (5) pour $t \geq t_0 \geq 0$. En partant du système $\bar{y}_i = y_i^0$ de solutions des équations (5), on peut déterminer les suites des fonctions

$$y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^m, \ldots$$

comme les solutions successives des équations

$$\frac{dy_i^m}{dt} + (\bar{a}_{ii} + \lambda)\, y_i^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \bar{a}_{ik}\, y_k^m = f_i(t)\, e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, y_k^{m-1}$$

ou, en posant

$$z_i^0 = y_i^0,\ z_i^1 = y_i^1 - y_i^0,\ \ldots,\ z_i^m = y_i^m - y_i^{m-1},\ \ldots,$$

on obtient des fonctions z_i^m $(m = 1, 2, \ldots)$ comme les solutions successives des équations

$$\frac{dz_i^m}{dt} + (\bar{a}_{ii} + \lambda)\, z_i^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \bar{a}_{ik}\, z_k^m = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, z_k^{m-1}. \tag{20}$$

Les équations ci-dessus, après la substitution

$$u_i^m = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, z_k^m, \tag{21}$$

deviennent

$$\frac{du_i^m}{dt} = (r_i - \lambda)\, u_i^m + \varphi_i^m(t) \tag{22}$$

où l'on a posé

$$\varphi_i^m(t) = b_{i1} \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t)\, z_k^{m-1} + \ldots + b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t)\, z_k^{m-1}, \tag{23}$$

$$\lim_{t=\infty} \varphi_i^m(t) = 0\,.$$

Les solutions des équations (22), tendant vers zéro pour $t=\infty$, sont

$$u_i^m = e^{(r_i-\lambda)\,t} \int_{\infty}^{t} e^{-(r_i-\lambda)\,t} \varphi_i^m(t)\, dt\,. \tag{23'}$$

La série

$$y_i = \bar{y}_i + \sum_{m=1}^{\infty} z_i^m \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

converge uniformément pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, et représente un système de solutions des équations (19) satisfaisant à la relation

$$\lim_{t=\infty} y_i = \lim_{t=\infty} \bar{y}_i\ ^{1)}.$$

De même la série dérivée

$$y_i' = \bar{y}_i' + \sum_{m=1}^{n} z_i'^m$$

converge uniformément et satisfait à la relation

$$\lim_{t=\infty} y_i' = \lim_{t=\infty} \bar{y}_i'.$$

Considérons la limite du quotient

$$\frac{y_i'}{y_i} = \frac{\bar{y}_i' + \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_i'^m}{\bar{y}_i + \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_i^m} = \frac{\dfrac{\bar{y}_i'}{\bar{y}_i} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{z_i'^m}{\bar{y}_i}}{1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{z_i^m}{\bar{y}_i}} \tag{a}$$

---

[1]) Voir mon article: *Sur la valeur des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires* (*Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 61, 1933).*

lorsque t augmente indéfiniment.

Considérons d'abord les solutions successives $\frac{z_1^m}{y_1}$ ($m=$ $=1, 2, \ldots,$) pour $t=\infty$. On aura, d'après (6) et (21),

$$
(24) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{z_1^m}{y_1} = \frac{\lim\limits_{t=\infty} \frac{z_1^m}{\varphi_1(t)}}{\lim\limits_{t=\infty} \frac{y_1}{\varphi_1(t)}} =
$$

$$
= \frac{d_{11} \lim\limits_{t=\infty} \frac{u_1^m}{\varphi_1(t)} + \ldots + d_{1n} \lim\limits_{t=\infty} \frac{u_n^m}{\varphi_1(t)}}{d_{11} \lim\limits_{t=\infty} \frac{\bar{u}_1}{\varphi_1(t)} + \ldots + d_{1n} \lim\limits_{t=\infty} \frac{\bar{u}_n}{\varphi_1(t)}}.
$$

Le quotient

$$
\frac{\bar{u}_1}{\varphi_1(t)},
$$

d'après (11), donne

$$
\lim_{t=\infty} \frac{\bar{u}_1}{\varphi_1(t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t=\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\bar{u}_1}} = \frac{1}{\lim\limits_{t=\infty} \frac{e^{-(r_1-\lambda)t}\varphi_1(t)}{\int_\infty^t e^{-(r_1-\lambda)t}\varphi_1(t)\,dt}},
$$

d'où l'on a

$$
\lim_{t=\infty} \frac{e^{-(r_1-\lambda)t}\varphi_1(t)}{\int_\infty^t e^{-(r_1-\lambda)t}\varphi_1(t)\,dt} = \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_1'(t) - (r_1-\lambda)\,\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)}
$$

ou, d'après (9) et (10),

$$
\lim_{t=\infty} \frac{e^{-(r_1-\lambda)t}\varphi_1(t)}{\int_\infty^t e^{-(r_1-\lambda)t}\varphi_1(t)\,dt} = -\frac{r_1-\lambda}{\lim\limits_{t=\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)}} = -\frac{r_1-\lambda}{b_1}.
$$

l s'ensuit

$$\lim_{t=\infty} \frac{\bar{u}_i}{\varphi_1(t)} = -\frac{b_i}{r_i - \lambda} = c_i \neq 0\,,$$

c_i étant une constante finie et différente de zéro. Par conséquent, on aura, d'après (24),

$$\lim \frac{\bar{y}_i}{\varphi_1(t)} = d_i \neq 0\ ^{1})$$

d'où l'on a, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand,

$$0 < \left|\frac{\bar{y}_i}{\varphi_1(t)}\right| < A \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A} < \frac{1}{\left|\frac{\bar{y}_i}{\varphi_1(t)}\right|} < B\,, \tag{25}$$

A et B étant des nombres positifs et finis.

Le quotient

$$\frac{u_i^m}{\varphi_1(t)}\,,$$

d'après (23'), devient

$$\lim_{t=\infty} \frac{u_i^m}{\varphi_1(t)} = \lim_{t=\infty} \frac{\int_\infty^t e^{-(r_i-\lambda)t} \varphi_i^m(t)\, dt}{e^{-(r_i-\lambda)t} \varphi_1(t)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{e^{-(r_i-\lambda)t} \varphi_1(t)}{\int_\infty^t e^{-(r_i-\lambda)t} \varphi_i^m(t)\, dt}}$$

ou, en appliquant la règle de L'Hospital [2]),

$$\lim_{t=\infty} \frac{u_i^m}{\varphi_1(t)} = -\frac{1}{r_i - \lambda} \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_i^m(t)}{\varphi_1(t)} \tag{26}$$

---

[1]) En supposant que l'expression $d_{i1} \frac{\bar{u}_1}{\varphi_1(t)} + \ldots + d_{in} \frac{\bar{u}_n}{\varphi_1(t)}$ soit finie et ne s'annule pas identiquement pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand.

[2]) En supposant que les fonctions $\varphi_i^m(t)$ soient telles que l'on puisse appliquer la règle de L'Hospital, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas de signe, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand.

où l'on a, d'après (23),

$$(27)\qquad \lim_{t=\infty}\frac{\varphi_i^m(t)}{\varphi_1(t)}=b_{i1}\lim_{t=\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_{1k}(t)\lim_{t=\infty}\frac{z_k^{m-1}}{\varphi_1(t)}+\dots$$

$$\dots+b_{in}\lim_{t=\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_{nk}(t)\lim_{t=\infty}\frac{z_k^{m-1}}{\varphi_1(t)}\,.$$

Il faut chercher les limites ci-dessus en posant successivement $m=1,2,\dots$ Pour $m=1$ on aura

$$\lim_{t=\infty}\frac{\varphi_i^1(t)}{\varphi_1(t)}=b_{i1}\lim_{t=\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_{1k}(t)\lim_{t=\infty}\frac{z_k^0}{\varphi_1(t)}+\dots$$

$$\dots+b_{in}\lim_{t=\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_{nk}(t)\lim_{t=\infty}\frac{z_k^0}{\varphi_1(t)}\,.$$

Puisque la relation (25) donne

$$\left|\frac{\bar{y}_i}{\varphi_1(t)}\right|=\left|\frac{z_i^0}{\varphi_1(t)}\right|<A\,,$$

pour $t\geq t_0>0$, t_0 étant assez grand, on aura

$$\left|\frac{\varphi_i^1(t)}{\varphi_1(t)}\right|\leq A\eta_i(t)\ \text{avec}\ \lim_{t=\infty}\eta_i(t)=0\,.$$

Il s'ensuit, d'après (26) pour $m=1$,

$$\left|\frac{u_i^1}{\varphi_1(t)}\right|\leq A\varepsilon_i(t)\quad\text{avec}\quad\lim_{t=\infty}\varepsilon_i(t)=0\,,$$

d'où l'on a, d'après (24), pour $m=1$,

$$(28)\qquad \left|\frac{z_i^1}{\varphi_1(t)}\right|\leq A\varepsilon(t)\leq A\varepsilon$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\varepsilon(t)=0\,,\qquad \varepsilon=\max_{t\geq t_0>0}\varepsilon(t)\,;$$

par conséquent, on aura finalement, d'après (24) et (25),

$$\left|\frac{z_i^1}{\bar{y}_i}\right|\leq AB\varepsilon(t)=C\varepsilon(t)\leq C\varepsilon\,.$$

pour $t\geq t_0>0$, t_0 étant assez grand.

Pour $m=2$ la relation (27), d'après (28), donne

$$\left|\frac{\varphi_i^2(t)}{\varphi_1(t)}\right| \leq A\varepsilon\eta_i(t)$$

et, par conséquent, d'après (26),

$$\left|\frac{u_i^2}{\varphi_1(t)}\right| \leq A\varepsilon\varepsilon_i(t)$$

d'où l'on a, d'après (24),

$$\left|\frac{z_i^2}{y_i}\right| \leq AB\varepsilon\varepsilon(t) = C\varepsilon\varepsilon(t) \leq C\varepsilon^2.$$

En procédant ainsi, on obtient

$$\left|\frac{z_i^m}{y_i}\right| \leq C\varepsilon^{m-1}\varepsilon(t) \leq C\varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon(t) = 0, \qquad \varepsilon = \max_{t \geq t_0 > 0} \varepsilon(t) < 1 .$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_i^m}{y_i}$$

converge uniformément, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, et satisfait à la condition

$$\lim_{t=\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_i^m}{y_i} = 0 .$$

De la même manière on démontre que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_i'^m}{y_i}$$

converge uniformément, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, et satisfait à la condition

$$\lim_{t=\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_i'^m}{y_i} = 0 .$$

Par conséquent, l'équation (a) donne

$$\lim_{t=\infty} \frac{y_i'}{y_i} = \lim_{t=\infty} \frac{\bar{y}'_i}{y_i} = 0$$

d'où l'on a, d'après (18),

$$\lim_{t=\infty} \frac{x_i'}{x_i} = \lim_{t=\infty} \frac{y_i' e^{\lambda t} + \lambda y_i e^{\lambda t}}{y_i e^{\lambda t}} = \lambda ,$$

c'est-à-dire, d'après (16),

$$\lim_{t=\infty} \frac{x_i'}{x_i} = \lim_{t=\infty} \frac{\bar{x}'_i}{\bar{x}_i} = \lambda \qquad (i=1, 2, \ldots, n) . \tag{29}$$

Nous avons donc le théorème suivant:

II. Soit, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, $\bar{x}_i$ un système de solutions des équations (3) satisfaisant à la relation (16). Il correspond au système $\bar{x}_i$ un système x_i de solutions des équations (17) satisfaisant, sous la condition $\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}$, à la relation (29).