Zwei Konvergenzkriterien für reelle Zahlenfolgen.

Von

H. WENDELIN.

 $K_{1})_{0} \begin{cases} \text{Sei } \{a_{n}\} \text{ eine nach oben beschränkte, reelle} \\ \text{Zahlenfolge. } \{a_{n}\} \text{ ist dann und nur dann konvergent,} \\ \text{wenn sich (wenigstens) einer positiven Nullfolge } \{\epsilon_{n}\} \\ \text{eine reelle Zahlenfolge } \{\Lambda_{n}\} \text{ derart zuordnen lässt,} \\ \text{dass} \\ \text{(l)} \qquad a_{n} \leq a_{\lambda} + \epsilon_{n} \text{ für alle } \lambda \geq \Lambda_{n} \text{ und } n = 1, 2, \dots \\ \text{gilt.} \end{cases}$

Beweis.

A) Ich zeige zunächst, dass (I) eine notwendige Bedingung für die Konvergenz darstellt 1).

Sei lim $a_n=a$. Ich setze zunächst voraus, das für alle a_n gelte

$$a_n \neq a$$
.

(Diese Einschränkung soll unter β) wieder aufgehoben werden). Die Glieder der Folge seien im abgeschlossenen Intervall

$$\left[a-\frac{L}{2}, a+\frac{L}{2}\right]$$
 enthalten.

¹) Der Beweis lässt sich auf mehrere Arten führen; die hier gegebene ist nicht die knappste, erleichtert aber m. E. ein anschauliches Erfassen des Kriteriums.

Mit I_v , ν = 1, 2, 3, . . . , seien dann abgeschlossene Intervalle gemäss

1)
$$\left[a-\frac{L}{2^{v}}, a+\frac{L}{2^{v}}\right], v=1, 2, 3, \ldots, \text{ bezeichnet.}\right]$$

Ferner definiere ich Mengen A_v , $v=1, 2, 3, \ldots$, durch

2)
$$A_v$$
 enthält genau alle a_n ,

welche in $I_v - I_{v+1}$ liegen, $v = 1, 2, 3, \ldots$

(1)
$$a_n \leq a_{\lambda} + \frac{L}{2^{\rho-1}}$$
 für alle $a_n \subset A_{\rho}$ und alle $a < I_{\rho}$,

wobei zunächst o festgehalten sei. Daraus ergibt sich weiter

(1')
$$a_n \leq a_{\lambda} + \frac{L}{2^{p-1}}$$
 für alle $a_n \subset A_p$ und $\lambda \geq \Lambda_n$;

hierin bedeute Λ_n das Maximum der Indizes der (endlich vielen) a_n aus $I_1 - I_p$.

Ich definiere nun eine Funktion ϕ auf der Menge der natürlichen Zahlen in folgender Weise

3)
$$\varphi(n) = \rho \quad \text{für} \quad a_n \subset A_0.$$

Offenbar gilt

und stelle fest

(2)
$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = \infty.$$

Ferner sei eine reelle Zahlenfolge $\{ \varepsilon_n \}$ definiert durch

$$\varepsilon_n = \frac{L}{2^{\varphi(n)-1}}.$$

 $\{ \varepsilon_n \}$ ist ersichtlich eine Nullfolge mit positiven Gliedern. Jetzt kann man (1') — und zwar gleich für alle a_n — in der Form schreiben

(I')
$$\begin{cases} a_n \leq a_{\lambda} + \epsilon_n & \textit{für alle} \quad \lambda \geq \Lambda_n \;; \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \text{wobei } \Lambda_n \; \text{das Maximum der Indizes der } a_n \; \text{aus } I_1 - I_{\phi(n)} \\ \text{bedeutet.} \end{cases}$$

(l') besitzt die Gestalt von (l).

β). Für endlich oder unendlich viele Glieder der Folge gelte $a_n = a$.

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) es gibt ausserdem nur endlich viele Glieder $a_n \neq a$.
- b) es gibt ausserdem unendlich viele Glieder $a_n \neq a$.

ad a

In diesem Falle kann man zunächst eine natürliche Zahl N angeben, derart, dass $a_n=a$ für alle $n\geq N$ ausfällt. Versteht man dann unter d das Maximum der endlich vielen Werte $|a_v-a_\mu|$ $(v, \mu=1, 2, \ldots)$, so wähle man als $\{\epsilon_n\}$ - Folge etwa

 $\varepsilon_n = d$ für alle n < N und die übrigen ε_n beliebig, so zwar, dass $\{\varepsilon_n\}$ eine positive Nullfolge wird.

Für Λ_n darf man setzen

$$\Lambda_n = N$$
 für $n=1, 2, \ldots$

Offenbar ist dann die Bedingung

$$a_n \le a_{\lambda} + \varepsilon_n$$
 für alle $\lambda \ge \Lambda_n$ und $n = 1, 2, ...$

erfüllt.

ad b

Für die Menge der Glieder a_1, a_2, \ldots , ich bezeichne sie mit $\{a_1, a_2, \ldots\}$, gelte

$$\{a_1, a_2, \ldots\} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\} + \{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots\}^2\},$$

wobei

$$a_{n_{\sigma}} \neq a$$
, $n_{\sigma} < n_{\sigma+1}$, für $\sigma = 1, 2, 3, ...$, $a_{m_{\rho}} = a$, $m_{\rho} < m_{\rho+1}$, für $\rho = 1, 2, 3, ...$

Nun werde $\varphi(n)$ folgendermassen definiert

²⁾ Die Menge $\{a_{m_i}\}$ muss nicht unendlichviel Glieder der Folge enthalten

3')
$$\begin{cases} \text{für } n \text{ aus } \{n_1, n_2, \dots\} \text{ sei } \varphi(n) \text{ durch 3) bestimmt; ist dagegen } n \subset \{m_1, m_2, \dots\}^3\} \text{ und etwa } n_k < m_\mu < n_{k+1}^4\}, \\ \text{so sei } \varphi(m_\mu) = \varphi(n_{k+1}). \end{cases}$$

Man erkennt dass auch in diesem Falle (2) gilt. Definiert man jetzt $\{ \varepsilon_n \}$ wie unter 4) so gilt auch im Falle b) wieder (l').

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (I) für die Konvergenz dargetan.

B) Ich zeige, dass (I) für die Konvergenz auch hinreicht.

Wegen (I), mit n=1, ist die Folge $\{a_n\}$ auch nach unten beschränkt. Also liegen alle ihre Häufungswerte im Endlichen. Hätte nun $\{a_n\}$ (mindestens) zwei Häufungswerte a' und a'', (a' < a'') und seien $\{a'_n\}$, $\{a''_n\}$ nach resp. diesen konvergente Teilfolgen von $\{a_n\}$, so lässt sich nun keiner positiven Nullfolge $\{\epsilon_n\}$ eine $\{\Lambda_n\}$ -Folge derart zuordnen, dass (I) erfüllbar wäre. Bezeichnet man mit a' die Differenz a'-a'' und greift irgend eine positive Nullfolge $\{\epsilon_n\}$ heraus, so gilt:

Ist $\varepsilon_n \leq \frac{d}{3}$ für $n \geq N$, so bleibt stets $a''_n > a'_{\lambda} + \varepsilon_n$, soferne

1.) $n \ge N$ und ausserdem so gross gewählt wird, dass

$$a''_{\mathfrak{n}} \subset \left(a'' - \frac{d}{3}, \quad a'' + \frac{d}{3}\right);$$

2.) λ so gross gewählt wird, dass $a' \subset \left(a' - \frac{d}{3}, a' + \frac{d}{3}\right)$, was etwa für $\lambda \geq \Lambda$ der Fall sei.

Dann könnte aber (I) nicht gelten. Es kann also $\{a_n\}$ bloss ein en Häufungspunkt besitzen, das heisst, $\{a_n\}$ muss konvergent sein.

Während nun K₁)₀ genau alle konvergenten, reellen Folgen erfasst, genügen dem folgenden Kriterium, das aus dem vorigen durch eine kleine Abänderung hervorgeht, genau alle Folgen, deren Grenzwert zugleich obere Schranke für sämtliche Folge-

³⁾ Die Definition 3) versagt auf dieser Menge, da $a_{\mathrm{in_j}}$ in keinem A_{p}

⁴⁾ Ist $m_{\mu}=1$, so setze man $n_{\bf k}=0$ (Es muss dann übrigens $m_{\mu}=m_1$ sein).

glieder ist. Ich nenne solche Folgen kurz "nach oben grenzwertbeschränkt".

$$\begin{cases} \text{Sei } \{ \ a_n \ \} \text{ eine nach oben beschränkte reelle Zahlenfolge. } \{ \ a_n \ \} \text{ ist nach oben grenzwertbeschränkt, wenn sich jeder Nullfolge } \{ \ \epsilon_n \ \} \text{ mit wesentlich positiven } \\ \text{Gliedern }^5 \text{) eine reelle Zahlenfolge } \{ \ \Lambda_n \ \} \text{ (die nun im allgemeinen von der Wahl der verwendeten Nullfolge abhängen wird) derart zuordnen lässt, dass } \\ \text{(I)} \qquad a_n \leq a_\lambda + \epsilon_n \quad \text{für alle} \quad \lambda \geq \Lambda_n \ , \quad n=1, \ 2, \dots \\ \text{gilt.} \end{cases}$$

An dieser Stelle möchte ich Hernn J. Karamata (Beograd) dafür danken, dass er mich nach Einsendung meines Manuskripts n liebenswürdiger Weise auf eine viel früher erschienene Arbeit des Herrn G. Hardy 6) aufmerksam gemacht hat, in welcher die grenzwertbeschränkte Folge unter dem Namen "quasi-monotonic sequence" auftritt. In der zitierten Abhandlung wird, unter Heranziehung der Ordnungsbeziehungen zwischen den Gliedern einer Folge, erst eine Charakterisierung der quasi-monotonics sequences, sodann der konvergenten Folgen überhaupt gegeben.

Beweis von K_2 ₀.

Dass zunächst die in K₂)₀ ausgesprochenen Bedingungen die Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ gewährleisten, folgt wie unter B), wenn man bedenkt, dass dort zum Nachweis der Konvergenz bereits die Existenz einer einzigen $\{ \varepsilon_n \}$ - und $\{ \Lambda_n \}$ - Folge genügte. Dass K₂)₀ aber genau alle nach oben grenzwertbeschränkten Folgen umfasst, sieht man etwa so ein:

Es sei
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
.

A) Die Bedingungen unter K₂)₀ sind notwendig. Ist nämlich stets $a_n \leq a$, so gilt sogar $a_n \leq a_\lambda$ für $\lambda \geq \Lambda_n$ und geeignet gewähltes Λ_n , umsomehr also $a_n \leq a_\lambda + \epsilon_n$ für $\lambda \geq \Lambda_n$ und jedes beliebige $\varepsilon_n > 0$.

die Anwendbarkeit von K_2 0 nicht gefördert.

6) The ordinal relations of the terms of a convergent sequence. Lond. Math. Soc. Proc. (2), 8, pag. 295 dff. (1909).

⁵⁾ Es genügte, zu fordern: mit positiven Gliedern, doch wird dadurch

B) Die Bedingungen unter K_2 ₀ sind hinreichend. Denn wäre etwa $a_k > a$, so gälte sicher $a_k > a_\lambda + \epsilon_k$ für etwa $\epsilon_k < \frac{a_k - a}{2}$ und $\lambda \ge \Lambda_k$, soferne nur Λ_k genügend gross gewählt wird. Dann könnte (I) aber nicht erfüllt sein, was zu einem Widerspruch führt.

Durch die folgende Vereinfachung geht aus K_2)₀ ein Kriterium hervor, das genau alle konvergenten, monoton-zunehmenden Folgen erfasst:

$$K_{3})_{0} \begin{cases} \text{Sei } \{a_{n}\} \text{ nach oben beschränkt. } \{a_{n}\} \text{ ist konvergent und monoton-zunehmend, wenn für jede Nullfolge } \{\epsilon_{n}\} \text{ mit wesentlich positiven Gliedern }^{7}\text{) gilt} \\ (II) \qquad a_{n} \leq a_{\lambda} + \epsilon_{n} \quad \text{für } \lambda \geq n \,, \quad n=1,\,2,\,\ldots \end{cases}$$

Der Beweis liegt auf der Hand.

Mutatis mutandis folgt sofort, dass auch das folgende Kriterium alle konvergente Folgen erfasst:

$$K_{_{1}})_{u} \begin{cases} \text{Alles wie in } K_{_{1}})_{_{0}} \text{, jedoch } \{a_{n}\} \text{ nach unten beschränkt,} \\ \text{und statt (I):} \\ \hline (\overline{I}) \quad a_{n} + \epsilon_{n} \geq a_{\lambda} \quad \textit{für alle} \quad \lambda \geq \Lambda_{n} \text{ ,} \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

dass das folgende alle nach unten grenzwertbeschränkte Folgen erfasst:

$$K_2)_u \ \begin{cases} \text{Alles wie in } K_2)_0 \text{, jedoch } \{a_n\} \text{ nach unten beschränkt} \\ \text{und statt (I);} \\ \hline (\overline{I}) \quad a_n + \epsilon_n \geq a_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \geq \Lambda_n \text{,} \quad n=1,\,2,\,\ldots \end{cases}$$

und das folgende alle konvergenten monoton-abnehmenden Folgen erfasst:

$$K_{\rm g})_u \left\{ \begin{array}{l} \mbox{Alles wie in } K_{\rm g})_o \mbox{, jedoch } \{\ a_n\ \} \ \mbox{nach unten beschränkt} \\ \mbox{und statt (II):} \\ \hline (II) \quad \ a_n \ + \ \epsilon_n \ \geq \ a_\lambda \quad \mbox{f\"ur alle} \quad \lambda \geq n \ , \quad n=1, \ 2, \ \ldots \end{array} \right.$$

⁷⁾ Auch hier gilt Anmerkung 5).

Von den drei grossen Klassen konvergenter Folgen, nämlich der Gesamtheit aller konvergenten, der Gesamtheit aller nach oben bzw. unten grenzwertbeschränkten und der Gesamtheit aller konvergenten, monoton-zunehmenden, bzw. abnehmenden Folgen — jede folgende Klasse ist in der vorangehenden enthalten — wird somit die erste durch K_1)0 bzw. K_1 1, die zweite durch K_2 10 bzw. K_2 1 und die dritte durch K_3 3 bzw. K_3 1 erfasst K_3 1.

Die Kriterien K_1 ₀ bzw. K_1 ₁_u und K_2 ₀ bzw. K_2 ₁_u lassen sich manchmal mit Vorteil verwenden. Ich führe für K_2 ₀ ein Beispiel an.

Es soll gezeigt werden, dass sich K₂)₀ unmittelbar auf die sogenannten "ausgezeichneten unteren Darboux'schen Summenfolgen" ⁹) (abgekürzt: ausg. u. D. S. Folgen) anwenden lässt, wodurch dann zugleich nachgewiesen wird, dass diese nach oben grenzwertbeschränkt, also insbesondere konvergent sind. Und unter Beachtung, dass jede Mischfolge ¹⁰) aus zwei ausg. u. D. S. Folgen wieder eine ausg. u. D. S. Folge ergibt, folgt daraus weiter sofort die Konvergenz sämtlicher ausg. u. D. S. Folgen nach demselben Grenzwert, dem sogenannten unteren Integral ¹¹). Das werde nun kurz skizziert.

Ich schicke einige Erklärungen voraus:

 $\{Z_n\}$ bedeute eine sogenannte ausgezeichnete Zerlegunsfolge des abgeschlossenen Intervalles $[\alpha, \beta]$. Sie ist folgendermassen definiert:

 Z_n sei eine Zerlegung des Intervalles $[\alpha, \beta]$, welche die Teilungspunkte besitzt:

$$\alpha$$
, $x_{1,n}$, $x_{2,n}$, ... $x_{N_n,n}$, β $(\alpha = x_0, \beta = x_{N_n+1,n})$

⁸) Man kann übrigens in allen Kriterien Ki), i=1, 2, 3, auch die Forderung der einseitigen Beschänktheit auslassen. Die so erhaltenen Kriterien Ki)₀ bzw. Ki)_u erfassen dann auch die bestimmt-divergenten Folgen mit lim $a_n=+\infty$, bzw. lim $a_n=-\infty$.

⁹⁾ Die Erklärung für diesen hier verwendeten Begriff folgt sogleich. 10) Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei Folgen, so heisse $\{c_n\}$ eine Mischfolge der beiden, wenn $\{c_n\}$ alle Glieder aus $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ enthält, jedes nur einmal.

¹¹⁾ Die üblichen, diesbezüglichen Beweise bedürfen weiterer Vorbereitungen.

mit resp. den Intervallängen

$$\Delta_{1,n}$$
, $\Delta_{2,n}$, ..., $\Delta_{N_n+1,n}$.

 δ_n sei die Maximallänge der $\Delta_{v,n}$ tür $v=1,2\ldots,N_n+1;$ $\{Z_n\}$ ist dann ausgezeichnete Zerlegungsfolge, wenn $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ ist.

 $(Z_{n+1}$ braucht nicht durch Weilerteilung aus Z_n hervorzugehen).

g bedeute die untere, G die obere Grenze der in $[\alpha, \beta]$ beschränkten Funktion f(x): $g_{v,n}$ die untere Grenze von f(x) im abgeschlossenen Intervall $[x_{v,n}, x_{v,n+1}]$.

 s_n heisse die zu $\{Z_n\}$ gehörige untere Darboux'sche Summe, definiert durch $s_n \equiv \sum_{v=1}^{N_n+1} g_{v,n} \cdot \Delta_{v,n}$.

 $\{s_n\}$ heise dann die zu $\{Z_n\}$ gehörige ausg. u. D. S. Folge.

Nun zeige ich, dass die ausg. u. D. S. Folgen der in $[\alpha, \beta]$ beschränkten Funktion f(x) nach oben grenzwertbeschränkt sind. Zum Beweise vergleiche ich irgend ein s_n mit irgendeinem s_{λ} derselben ausg. u. D. S. Folge $\{s_n\}$.

Gehöre s_n zu Z_n , s_λ zu Z_λ ; es ist dann nach Definition von s_n

$$s_n \equiv \sum_{v=1}^{N_n+1} g_{v,n} \cdot \Delta_{v,n}$$
 and $s_{\lambda} \equiv \sum_{v=1}^{N_{\lambda}+1} g_{v,\lambda}, \Delta_{v,\lambda}$.

Eine Verkleinerung von s_{λ} gegenüber s_n , — ich bezeichne sie mit $v_{v,n}^{12}$) — kann höchstens von jenen Summanden aus s_{λ} herrühren, deren, die $\Delta_{v,\lambda}$ bestimmenden, Teilintervalle Teilungspunkte von Z_n in ihrem Inneren enthalten. Solcher kritischer Teilungspunkte gibt es in Z_n höchstens N_n an der Zahl. Daher gilt die Abschätzung

$$0 \leq \nu_{\lambda,n} \leq N_n \cdot (G-g) \cdot \delta_{\lambda}$$

oder mit der Abkürzung N_n . $(G-g)=c_n$

¹²⁾ $v_{\lambda,n} \ge 0$

1)
$$s_n \leq s_{\lambda} + c_n \cdot \delta_n$$
 und zwar für alle n und λ .

Sei nun $\{\epsilon_n\}$ irgend eine Nullfolge mit wesentlich positiven Gliedern, so lässt sich zu jedem ϵ_n eine reelle Zahl Λ_n derart bestimmen, dass

2)
$$c_n \cdot \delta_{\lambda} \leq \epsilon_n$$
 für alle $\lambda \geq \Lambda_n$ bleibt.

Dies in 1) eingesetzt ergibt schliesslich

$$s_n \leq s + \varepsilon_n$$
 für alle $\lambda \geq \Lambda_n$ und $n=1, 2, \ldots$

und das ist genau die im Kriterium K_2 ₀ formulierte Bedingung, ihr genügt also die Folge $\{s_n\}$.