Zum Mechanismus der Polverlagerungen.

Von

ANTON BILIMOVITCH.

In meiner der königl. serbichen Akademie am 26. Dezember 1933 vorgelegten Abhandlung „Ueber die Drehung der Erde, diese als ein System von sechs Freiheitsgraden aufgefasst“ habe ich zwecks Untersuchung der Drehbewegung der Erde ein exakt umschriebenes Modell, bestehend aus einem Kern und einer Schale, aufgestellt und bin mit Hilfe desselben zum Resultat gekommen, wie sich die Erdpole in ihren säkularen Verlagerungen auf der Erdoberfläche bewegen müssen. Aus diesem Ergebnis tolgt nach einigen Vereinfachungen die Hauptlösung des Problems in Form des Theorems von Milankovitch, welches mein verehrter Kollege vor mir und auf einem anderen Wege abgeleitet hat [1]). In der vorangehenden Abhandlung der vorliegenden Zeitschrift teilt nun Milankovitch eine neue Ableitung seines Theorems mit, wobei er sich der Polfuchtkräfte bedient. Der Zweck dieser Zeilen ist, den Zusammenhang zwischen der Lösung von Milankovitch und der meinigen aufzudecken und zu beweisen, dass die von Milankovitch benutzten Polfluchtkräfte dieselbe Rolle spielen wie die von mir benutzten während der Drehung auftretenden Zentrifugalkräfte, welche automatisch durch die Eulerschen Gleichungen erfasst erscheinen und die auf die

---

[1]) *Milankovitch*, Säkulare Verlagerungen der Erdpole. (serbisch). Berichte der königl. serbischen Akademie. Bd. CLII. (1932). — In deutscher Sprache vollständig veröffentlicht im Abschnitt VII „Säkulare Polverlagerungen“ des ersten Bandes des Gutenbergschen Handbuches der Geophysik. Berlin 1933.

Schale wirkenden Gravitationskräfte, welche im vorliegenden Falle zu den äusseren Kräften zu zählen sind. Durch diese Klarlegung erscheint die wissenschaftliche Wahrheit der gewonnenen Ergebnisse gesichert, zu welcher wir nach langer Arbeit und mehrfachen Aussprachen gelangt sind.

Man denke sich ein orthogonales Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ mit der Erdkruste fest verbunden; der Ursprung O desselben liege im Erdmittelpunkt und die Achse $O\zeta$ falle mit der einer bestimmten Epoche zugehörigen Rotationsachse der Erde zusammen und sei dabei gegen Norden gerichtet. Das Koordinatensystem sei ein rechtes mit einem positiven Drehsinn von rechts nach links.

Die Koordinaten der nachstehend zu benützenden Vektoren bezüglich des obigen Koordinatensystems seien wie folgt bezeichnet:

jene der Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit p, q, r,

jene des Drehimpulses $\vec{G}$, d. h. des Moments der Quantitäten der Bewegung, mit G_1, G_2, G_3.

Dem Trägheitstensor entspreche das nachstehende Koordinatenschema:

$$\begin{matrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C, \end{matrix}$$

so dass die lebendige Kraft T der Erdrinde durch den nachstehenden Ausdruck darstellt erscheint:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dqr + 2Erp + 2Fpq\,.$$

Die Koordinaten des Drehimpulses $\vec{G}$ können nach den soeben festgelegten Bezeichnungen folgenderweise veranschaulicht werden:

$$G_1 = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap + Fq + Er\,,$$

$$G_2 = \frac{\partial T}{\partial q} = Fp + Bq + Dr\,,$$

$$G_3 = \frac{\partial T}{\partial r} = Ep + Dq + Cr\,.$$

Setzen wir voraus, dass auf die Schale äussere Kräfte einwirken, deren Drehmoment bezüglich des Koordinatenursprunges mit $\vec{N}$ bezeichnet werden möge, so erfolgt die Drehbewegung der Schale im Sinne der nachstehenden vektoriellen Differentialgleichung:

$$\dot{G} = \vec{N},$$

worin der oben angebrachte Punkt die Ableitung des darunterstehenden Vektors nach der Zeit bedeutet. Aus der obigen Vektorgleichung folgen nach durchgeführter Projizierung auf die Achsen des beweglichen Koordinatensystems $O\xi\eta\zeta$ die nachstehenden skalaren Gleichungen:

$$(1) \qquad G'_1 - G_2 r + G_3 q = N_1,$$

$$(2) \qquad G'_2 - G_3 p + G_1 r = N_2,$$

$$G'_3 - G_1 q + G_2 p = N_3,$$

wobei die Striche die Ableitungen der zugehörigen Skalare nach der Zeit und N_1, N_2, N_3 die Koordinaten des Vektors $\vec{N}$ bezüglich des gewählten Koordinatensystems bedeuten.

Für uns sind von den obigen drei Gleichungen nur die ersten zwei vom Interesse. Aus denselben folgen mittels den Anfangsbedingungen

$$p_0 = q_0 = 0, \quad r = r_0 = \text{Const.}$$

die nachstehenden Gleichungen:

$$G'_1 - Dr^2 = N_1, \quad G'_2 + Er^2 = N_2$$

oder

$$(3) \qquad G'_1 = L_1, \quad G'_2 = L_2,$$

wobei L_1 und L_2 die Koordinaten eines Vektors $\vec{L}$ bedeuten und

$$(4) \qquad \begin{aligned} L_1 &= Dr^2 + N_1, \\ L_2 &= -Er^2 + N_2 \end{aligned}$$

ist.

Wir wollen jetzt das resultierende Drehmoment $\vec{N}$ der äusseren auf die Elemente der Erdschale wirkenden Kräfte berechnen. Als Folge der Anziehung der gesamten Erde auf das Massenelement $d\mu$ der Erdschale wirkt auf dieses Element die Kraft $\vec{P}$. Diese Kraft sei in zwei Komponenten zerlegt: die eine, $\vec{P}_1$, wirke in der Richtung der Normale auf das Flächenelement des Simaspiegels, auf welchem die Schale schwimmt, die andere $\vec{Q}$ wirke in der Richtung der Normale auf die Drehachse der Erde. Die erste Komponente $\vec{P}_1$ steht im Gleichgewicht mit der Reaktion der Simaunterlage, weshalb diese Kräfte kein Drehmoment bezüglich des Punktes O ergeben. Die zweite Komponente, die Kraft $\vec{Q}$, welche zu den äusseren Kräften zu zählen ist, kann längs des in Betracht gezogenen Teiles der Normale $\vec{n}$ als von konstanter Grösse und gleich jenem Wert angenommen werden, welcher dem an der Grenze des Simas und des Sials liegenden Punkt M entspricht.

Im Punkte M an der Begrenzungsfläche des Simas muss die Kraft $\vec{Q}$ gleich und entgegengesetzt gerichtet der zugehörigen Fliehkraft sein. Die Kraft $\vec{Q}$ besitzt also die folgende skalare Grösse:

$$Rr^2 \operatorname{Cos} \varphi \, d\mu \, ,$$

worin R den Halbmesser der Simaoberfläche und φ die Breite des in Betracht gezogenen Punktes bedeutet. Bezeichnet man mit z_0 die Entfernung des Massenelementes $d\mu$ von der Simaoberfläche und mit $\vec{s}$ den Einheitsvektor der Normale auf die Ebene $OM\zeta$, so ist das Drehmoment der Kraft $\vec{Q}$ hinsichtlich des Koordinatenursprunges dargestellt durch:

$$-Rr^2 (R+z_0) \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi \, . \, d\mu \, . \, \vec{s} \, .$$

Bei der Bildung der Gesamtsumme dieser Drehmomente möge folgendes berücksichtigt werden. Wenn man von jedem elementaren Drehmoment das Drehmoment der im Punkte M befindlichen Masse $d\mu$ in Abzug bringt, wird dadurch die Gesamt summe der Drehmomente keine Veränderung erfahren, weil die Simaoberfläche eine Rotationsfläche, also symmetrisch zu der Drehachse gestaltet ist. Deshalb ist die Summe dieser in Abzug gebrachten Momente gleich Null. Man hat deshalb bei der Bildung der erwähnten Gesamtsumme nur die Drehmomente

$$-Rr^2\, z_0 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi \,.\, d\mu \,.\, \vec{s} \tag{5}$$

zu berücksichtigen und ihre über die Erdoberfläche sich erstreckende Summe zu ermitteln.

Es soll nun gezeigt werden, dass dieses resultierende Drehmoment durch einen Vektor veranschaulicht ist, dessen Koordinaten gleich sind:

$$-\frac{1}{2} Dr^2, \quad \frac{1}{2} Er^2.$$

Die Koordinate des Vektors (5) bezüglich einer der Achsen, etwa der Achse $O\xi$, ist durch den Ausdruck

$$Rr^2\, z_0 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \psi \, d\mu \tag{6}$$

veranschaulicht, worin ψ die Länge des in Betracht gezogenen Punktes M bedeutet.

Anderseits hat die Grösse D den Wert der über die gesamte Erdschale sich erstreckenden Summe der Elemente

$$\eta\xi \, d\mu \,.$$

Weil

$$\eta = (R+z_0) \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \psi \,,$$

$$\zeta = (R+z_0) \operatorname{Sin} \varphi$$

ist, so erscheint ein solches Element dargestellt durch

$$(R+z_0)^2 \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \, d\mu = (R^2+2Rz_0+z_0^2) \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \, d\mu,$$

d. h. es besteht aus drei Gliedern. Die Summe der ersten Glieder

$$R^2 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \psi \, d\mu$$

ist wegen der erwähnten symmetrischen Form der Simaoberfläche gleich Null. Das dritte Glied kann als von höherer Kleinheitsordnung vernachlässigt werden, weil z_0 sehr klein im Verhältnis zu R ist. Aus diesem Grunde ist nur die Summe der zweiten Glieder

$$2Rz_0 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \psi \, d\mu$$

zu bilden.

Wenn nun das obige Element mit jenem für die Berechnung von N_1 verglichen wird, so ergibt es sich, dass das erstere mit $-\frac{1}{2} r^2$ zu multiplizieren ist, um das letztere zu erhalten. Es ist also:

$$N_1 = -\frac{1}{2} D r^2$$

und ebenfalls:

$$N_2 = \frac{1}{2} E r^2.$$

Alles vorstehende in Betracht ziehend, gelangen wir zu den nachstehenden endgültigen Werten der Koordinaten des Vektors $\vec{L}$:

$$\vec{L}\left(\frac{1}{2} D r^2, -\frac{1}{2} E r^2\right).$$

Es soll nun gezeigt werden, dass dieses Moment $\vec{L}$ aequivalent ist dem Drehmoment $\mathfrak{M}$ von Milankovitch, welches er mittels der Polfluchtkräfte abgeleitet hat. Das Drehmoment ist nach den Resultaten von Milankovitch (Formel 19) durch den nachstehenden vektoriellen Ausdruck veranschaulicht

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{4}(g_p - g_a)\,[\mathfrak{k}, \operatorname{grad} \Omega],$$

worin g_p und g_a die Schwerebeschleunigungen am Pole bzw. am Aequator veranschaulichen, $\mathfrak{k}$ den Einheitsvektor der Richtung $O\zeta$ bezeichnet und Ω das Trägheitsmoment der Sialdecke in dem Sinne bedeutet, dass um diesen Betrag das Trägheitsmoment des Erdkörpers durch das Auftauchen der Sialschollen aus der Simaunterlage grösser geworden ist als jenes, welches sich bei dem mit kondensierter Sialdecke bedeckten Erdkörper ergeben würde. Fügen wir diesem Trägheitsmoment noch jenes der unter der Sialschale bis zu einer bestimmten Tiefe (über deren Ausmass wir keine besondere Voraussetzung zu machen brauchen) liegenden Massen, so erhalten wir das Trägheitsmoment I der in dem von mir benutzten Modell angenommenen Erdschale. Weil nun diese bei der kondensiert gedachten Sialdecke als eine Schale von gleicher Mächtigkeit aufgefasst werden kann, so folgt daraus, dass

$$\text{grad}\ \Omega = \text{grad}\ I$$

ist.

Wir berechnen nun den Wert von grad I. Das Trägheitsmoment I der Erdschale bezüglich einer durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse, welche die Erdoberfläche in einem Punkte mit den Koordinaten ξ, η, ζ durchdringt, ist durch die Gleichung gegeben:

$$R^2 I = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta\,,$$

wobei

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

ist. Befindet sich der Punkt ξ, η, ζ in der Nähe des Poles, so kann die obige Gleichung durch die nachstehende ersetzt werden:

$$R^2 I = (A - C)\,\xi^2 + (B - C)\,\eta^2 + 2DR\eta + 2ER\xi + 2F\xi\eta + \text{Const.}$$

Es ist also am Pole, wo $\xi = \eta = 0$ zu setzen ist,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \xi}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = \frac{2E}{R}\,, \qquad \left(\frac{\partial I}{\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = \frac{2D}{R}\,,$$

so dass hier der Gradient dargestellt ist durch

$$\text{grad}\ I = \frac{2E}{R}\vec{i} + \frac{2D}{R}\vec{j},$$

worin $\vec{i}$ und $\vec{j}$ die Einheitsvektoren der Richtungen $O\xi$ bzw. $O\eta$ bedeuten.

Es besteht weiter die Gleichung:

$$g_p - g_a = Rr^2,$$

weil der Unterschied der obigen Schwerebeschleunigungen von der am Aequator auftretenden Fliehkraftbeschleunigung herrührt und diese gleich ist dem Quadrat der linearen Geschwindigkeit Rr dividiert durch den Radius R.

Setzt man die erhaltenen Werte in den Ausdruck für das Drehmoment $\mathfrak{M}$ ein, so gelangt man zu den nachstehenden Gleichungen:

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{4} \cdot Rr^2 \cdot \frac{2}{R} [\mathfrak{k}, \overrightarrow{Ei} + \overrightarrow{Dj}]$$

$$= \frac{1}{2} r^2 (\overrightarrow{Di} - \overrightarrow{Ej}) = \overrightarrow{L}$$

und diese beweisen die Aequivalenz der Drehmomente $\mathfrak{M}$ und $\overrightarrow{L}$.

Milankovitch setzt weiters voraus, dass wegen der ausserordentlichen Langsamkeit der Bewegung das Drehmoment $\mathfrak{M} = \overrightarrow{L}$ eine Drehung der Erdschale um die Achse dieses Moments zur Folge hat und, weil diese Bewegung mit Ueberwindung von Widerständen erfolgt, die Rotationsgeschwindigkeit derselben proportional dem Drehmoment sein muss. Auf diese Weise gelangt er zu seiner Grundgleichung:

$$\overrightarrow{v} = n \text{ grad } I, \tag{7}$$

worin

$$n = mR\,(g_p - g_a)$$

ist. Diesem Koeffizient der Proportionalität kann man, die dynamischen Effekte berücksichtigend, die nachstehende Form und Deutung geben:

$$n = mR^2r^2 = \frac{1}{4} \cdot f \cdot \frac{1}{A} \cdot R^2r^2 \cdot (t - t_0), \tag{8}$$

worin f den Widerstandskoeffizient und $t - t_0$ das Zeitintervall bedeutet, während welchem die Geschwindigkeit bis zu ihrem gleichmässigen Schwellenwert gelangt.

Die Formeln, welche ich in meiner erwähnten Abhandlung gegeben habe, lassen sich leicht aus den Gleichungen (3) ableiten, welche in der nachstehenden Form geschrieben werden können

$$\frac{d}{dt}(Ap + Fq) = \frac{1}{2} Dr^2,$$

$$\frac{d}{dt}(Fp + Bq) = -\frac{1}{2} Er^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgen die nachstehenden Integrale:

$$
(9) \qquad \begin{aligned} Ap+Fq &= \frac{1}{2} Dr^2 (t-t_0) \\ Fp+Bp &= -\frac{1}{2} Er^2 (t-t_0) . \end{aligned}
$$

Zieht man nun in Betracht, dass die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ des Rotationspoles in Bezug auf die Erdrinde durch den Ausdruck:

$$
\vec{v} = R [\vec{k}, \vec{\omega}]
$$

veranschaulicht ist, worin $\vec{k} = \mathfrak{k}$ den Einheitsvektor der Richtung $O\zeta$ bedeutet, so sind die Koordinaten v_1 und v_2 dieser Geschwindigkeit gleich:

$$
v_1 = -Rq , \quad v_2 = Rp .
$$

Es folgt aus (9)

$$
\begin{aligned} Av_2 - Fv_1 &= \frac{1}{2} RDr^2 (t-t_0) \\ Fv_2 - Bv_1 &= -\frac{1}{2} REr^2 (t-t_0) , \end{aligned}
$$

d. h. den Widerstandskoeffizient f der unfreien Bewegung berücksichtigend:

$$
\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} f \frac{Rr^2 (t-t_0)}{AB-F^2} (DF+EA) \\ v_2 &= \frac{1}{2} f \frac{Rr^2 (t-t_0)}{AB-F^2} (EF+DB) \end{aligned}
$$

oder

$$
(10) \qquad \begin{aligned} v_1 &= \gamma A \left(\frac{2E}{R} + \frac{2DF}{RA}\right) \\ v_2 &= \gamma B \left(\frac{2D}{R} + \frac{2EF}{RB}\right) , \end{aligned}
$$

wo

$$
\gamma = \frac{1}{4} f \frac{R^2 r^2 (t-t_0)}{AB-F^2}
$$

ist.

Soll die Drehbewegung um die Achse des Drehmomentes erfolgen, so muss gesetzt werden:

$$F=0, \quad A=B,$$

so dass man nach (8) bekommt:

$$\gamma = \frac{1}{4} \cdot f \cdot \frac{1}{A^2} \cdot R^2 r^2 . (t-t_0) = \frac{1}{A} n,$$

weshalb aus (10) folgt:

$$v_1 = n \cdot \frac{2E}{R}, \quad v_2 = n \cdot \frac{2D}{R}$$

oder in Vektorform:

$$\vec{v} = n \operatorname{grad} I,$$

was mit (7) übereinstimmt.

Benützt man die strengeren Formeln (10), so sieht man, dass im allgemeinen Falle die Geschwindigkeit $\vec{v}$ nicht mit grad I zusammenfällt. Sie weicht von dieser Richtung ab, aber diese Abweichung ist, wie wir gleich sehen werden, sehr gering.

Setzt man nur $F=0$ voraus oder, schärfer ausgedrückt, vernachlässigt man in (10) die Glieder

$$\frac{2DF}{RA} \quad \text{und} \quad \frac{2EF}{RB}$$

gegenüber $\frac{2E}{R}$ und $\frac{2D}{R}$, so gelangt man aus (10) zur Gleichung

$$(11) \qquad \frac{v_1}{A \operatorname{grad}_\xi I} = \frac{v_2}{B \operatorname{grad}_\eta I},$$

was mit $A=B$ abermals zum Ergebnis führt, dass die Vektoren $\vec{v}$ und grad I zusammenfallend sind.

Aus (11) folgt, dass der Abweichungswinkel α der Geschwindigkeit $\vec{v}$ vom grad I im Falle $F=0$ den nachstehenden

Wert aufweist:

$$\alpha = \frac{(A - B)\, ED}{\sqrt{E^2 + D^2}\,\sqrt{A^2E^2 + B^2D^2}}$$

und dieser ist im Falle der Erde eine äusserst geringe Grösse.