Die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung.

Von

JOSEF PLEMELJ.

Seit Gauss haben wir für die Irreduzibilität der Gleichung für die primitiven n-ten Wurzeln der Einheit eine Reihe von Beweisen, die entweder den speziellen Fall, dass der Grad n eine Primzahl p oder Primzahlpotenz p^k ist, oder auch den allgemeinen Fall behandeln, wo n eine zusammengesetzte Zahl bedeutet.

Für den allgemeinen Fall ist wohl der einfachste Beweis der von H. Späth gegebene (Mathem. Zeitschrift. Bd. 26, 1926, S. 442, in der Darstellung von E. Landau, daselbst Bd. 29, 1929 S. 462). Im allgemeinen reicht es aus, die Irreduzibilität für den Fall des Primzahlpotenzgrades zu kennen und es ist deshalb vielleicht nicht ohne Interesse zu den bisherigen Beweisen noch die folgenden Zeilen hinzuzufügen, die an Einfachheit das Erreichbare bedeuten dürften:

Wäre das Polynom

$$F(x)=\frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}=x^{(p-1)p^{k-1}}+\ldots+x^p+1$$

für die primitiven p^k-ten Einheitswurzeln nicht irreduzibel, so hätte man eine Zerlegung $F(x)=f(x)\,\Phi(x)$ mit ganzzahligen Polynomen $f(x)$ und $\Phi(x)$. Wegen $F(1)=p$ wäre etwa $f(1)=\pm p$, $\Phi(1)=\pm 1$ bei unzerlegbarem $f(x)$. Da nun die p^k-ten Einheitswurzeln Potenzen irgend einer primitiven sind, so wäre mit

$f(\xi)=0$ auch $\Phi(\xi^{\mu})=0$ bei geeignetem μ. Die Polynome $f(x)$ und $\Phi(x^{\mu})$ wären also nicht fremd zu einander und wegen der Unzerlegbarkeit von $f(x)$ hätte man $\Phi(x^{\mu})=f(x)\,\varphi(x)$ bei ganzzahligem Polynom $\varphi(x)$. Mit $x=1$ ergibt sich ein Widerspruch.