Ueber die Transformation des elliptischen Gebildes in die Normalform von Weierstrass.

Von

JOSEF PLEMELJ.

Das elliptische Gebilde $[x \sqrt{F(x)}]$, worin $F(x)$ ein biquadratisches Polynom ist, lässt sich, wenn ein Linearfaktor von $F(x)$ bekannt ist, durch eine lineare Substitution zwischen x und ξ in ein Gebilde $[\xi, \sqrt{f(\xi)}]$ überführen, worin $f(\xi)$ ein Polynom vom 3-ten Grade ist, worauf dann die Weierstrass-sche Normalform schon durch eine Verschiebung erhältlich ist. Es kann jedoch wichtig sein, besonders wenn noch Realitätsfragen in Betracht kommen, die Ueberführung ohne Lösung der biquadratischen Gleichung zu bewerkstelligen. Nach Riemanns allgemeinen Prinzipien ist dies möglich (Crelle Journal B. 54, § 13) und ist eine solche Transformation z. B. von I. Thomae (Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen, Leipzig 1905 S. 23) angegeben, die aber infolge der Kompliziertheit kaum verwenbar ist. Ein Verfahren von Hermite (Crelle Journal, Bd. 52) erreicht zwar sehr einfach die Transformation des elliptischen Integrals 1. Art in die Form von Weierstrass, sie ist aber nicht umkehrbar eindeutig, so dass das eigentliche Ziel nicht erreicht ist. Eine vollständige Lösung der Frage hat Weierstrass selbst gegeben und ist die Transformation aus Manuskripten in seinen mathematischen Werken aufgenommen (5. Bd. 1915 S. 4). Die Lösung ergibt sich aus der allgemeinen Erkenntnis, dass die Verknüpfung zwischen x und ξ eine sowohl in x als in ξ quadratische Gleichung sein muss. Die Transformation hängt noch von einer willkürlichen Konstanten ab und es erfordert ihre Herleitung, wenn sie auch prinzipiell sehr einfach ist, doch eine ziemliche Rechenarbeit. Ich will nun zeigen wie eine spezielle Transformation in einigen Strichen erreicht wird.

Die Transformation besteht im folgenden:

Der Kürze halber werde

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(x) &= x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\,, \\ f(\xi) &= \xi^3+a_2\xi^2+(a_1a_3-4a_4)\,\xi+a_1^2a_4+a_3^2-4a_2a_4 \end{aligned}$$

gesetzt. Die beiden Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sqrt{F(x)} &= x^2+\frac{a_1}{2}x-\frac{\xi}{2}\,, \\ \sqrt{f(\xi)} &= 2x\left(\xi+a_2-\frac{a_1^2}{4}\right)+\frac{a_1}{2}\,\xi+a_3\,, \end{aligned}$$

die gleichzeitig bestehen können, drücken bei gegebenem Paar x, $\sqrt{F(x)}$ das Paar ξ, $\sqrt{f(\xi)}$ in rationaler Weise aus und umgekehrt x, $\sqrt{F(x)}$ bei gegebenen ξ, $\sqrt{f(\xi)}$ und es gilt die Gleichung

$$(3)\qquad \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = -\frac{d\xi}{\sqrt{f(x)}}\,.$$

Beweis: Die Identität:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x^4+a_1x^4+a_2x^2+a_3x+a_4 &= \left(x^2+\frac{a_1}{2}x-\frac{\xi}{2}\right)^2+ \\ &+\left(\xi+a_2-\frac{a_1^2}{4}\right)x^2+\left(\frac{a_1}{2}\,\xi+a_3\right)x+a_4-\frac{\xi^2}{4}\,, \end{aligned}$$

zeigt die Giltigkeit der ersten Gleichung in (2), wenn x und ξ durch die Relation

$$(5)\qquad x^2\left(\xi+a_2-\frac{a_1^2}{4}\right)+x\left(\frac{a_1}{2}\,\xi+a_3\right)+a_4-\frac{\xi^2}{4}=0$$

miteinander verknüpft angenommen werden, und diese in ξ und x quadratische Gleichung gibt aufgelöst nach x die zweite Gleichung (2), so dass (5) die rationale Form für beide Gleichungen (2) ist. Die Differentiation von (5) gibt mit Rücksicht auf (2) ohne Weiteres (3).

Die allgemeine Transformation von Weierstrass lässt sich, wie leicht einzusehen ist, aus der Zusammensetzung der hier an-gegebenen und einer weiteren Transformation herleiten, die im wesentlichen darauf hinauskommt, das elliptische Differential durch eine Transformation in seine eigene Form überzuführen, d. h. die Gleichung

$$\frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} = \frac{d\xi'}{\sqrt{f(\xi')}}$$

zu lösen. Dies kann durch eine ähnliche in ξ und ξ' quadratische Gleichung, analog wie (5), bewerkstelligt werden, wobei ein konstanter Parameter auftritt. Es ist dies das Verfahren der berühmten Entdeckung des Additionstheorems durch Euler. Hier kommt es im Wesentlichen auf die rationale Darstellung von $\wp(u+a)$ und $\wp'(u+a)$ durch $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ und umgekehrt an, wobei etwa $\wp(a)$ die Rolle der verfügbaren Konstanten hat.

In der Regel wird man nicht die allgemeinste Transformation nötig haben und unter den speziellen ist wohl die oben angegebene die einfachste.

Man bemerke dass die Gleichung $f(\xi)=0$ die bekannte kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung $F(x)=0$ ist. Wenn nämlich $f(\xi)=0$ ist, so hat nach der zweiten Gleichung in (2) die Gleichung (5) nur eine Wurzel für x d. h. die linke Seite in (5) ist ein Quadrat eines in x linearen Ausdruckes, wonach nach (4) die biquadratiche Gleichung $F(x)=0$ leicht durch Quadratwurzeln gelöst wird.