Die Abbildung eines Ringbereiches mit analytischer Zuordnung der Randkurven auf einen mit linearer Zuordnung.

Von

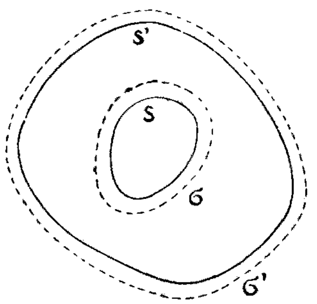
JOSEF PLEMELJ.

Bei Uniformisierungsproblemen algebraischer Gebilde durch automorphe Funktionen vom Schottky-schen Typus hat Koebe (Göttinger Nachrichten 1908 S. 112) als eine Grundaufgabe das Problem aufgestellt, ein schlichtes Ringgebiet, von dem die beiden Randkurven umkehrbar-eindeutig analytisch einander zugeordnet sind, auf ein solches Ringgebiet abzubilden, bei dem die Zuordnung durch eine lineare Substitution geliefert wird. Er gibt an, dass die Aufgabe durch Schwarz-sche Methoden gelöst werden kann, indem man sie mit einem elliptischen Integral erster Gattung in Beziehung bringt. Im weiteren führt jedoch Koebe den Existenzbeweis automorpher Funktionen für den Schottky-schen Fall ohne Verwendung dieses Abbildungssatzes *) und es erscheint so diese Aufgabe als spezieller Fall der allgemeinen miterledigt. Man kann den Satz aber auch schon dem Beweis des Grenzkreistheorems für den Grenzpunktfall entnehmen, wenn man den Ring durch einen Querschnitt einfachzusammenhängend macht, wobei die Randkurve aus 4 Seiten besteht, von denen je zwei gegenüberliegende periodenparallelogrammartig analytisch aufeinander bezogen sind. Die dazugehörigen Existenzbeweise machen wiederholt von Schwarzschen Methoden Gebrauch. Man kann nun, wie ich hier zeigen will, das Problem genug einfach durch eine einzige Schwarz-sche Reihe von Potentialen lösen. Die Befassung mit dieser Frage ist durch Koebes

*) Math. Annalen Bd. 69, S. 910.

Problemstellung veranlasst und stammt die Lösung aus jener Zeit. Angesichts der weiteren Publikationen Koebes, die die Lösung als Nebenprodukt enthalten, habe ich damals von einer Mitteilung abgesehen. Die Arbeit gibt jedoch eine interessante Anwendung Schwarzscher Reihen, die sich von der üblichen Konstruktion in mancher Hinsicht unterscheiden. So sind z. B. hier alle aufeinanderfolgenden Potentiale im selben Gebiet definiert. Es wird hier das Ziel, die Linearität der Zuordnung, d. h. das Anlehnen unendlich vieler äquivalenter Bereiche mit analytischem Uebergang aus jedem Bereich in seinen Nachbarbereich, mit der gleichen Mühe erreicht, wie die analytische Hinzufügung eines einzelnen Nachbarbereiches, was für Koebes Arbeit die Grundaufgabe ist. Weil das Problem für sich von Interesse ist und bei näherer Durchsicht die Arbeit mir manche bemerkenswerte Momente zu enthalten scheint, glaube ich sie erhalten zu sollen.

Der Ringbereich, um den es sich handelt, möge durch zwei ganz im Endlichen liegende einfach geschlossene Kurven s und s' begrenzt sein, die sich weder gegenseitig noch selbst schneiden, und von denen die eine (äussere) s' die andere (innere) s ganz umgeben soll. Die Punkte von s' mögen aus den Punkten von s durch eine umkehrbar-eindeutige, entlang der ganzen Kurve s analytisch fortsetzbare Beziehung hervorgehen, so dass durch diese analytische Beziehung eine, wenn auch kleine Umgebung jedes Punktes von s auf eine Umgebung des entsprechenden Punktes von s' bezogen ist. So kann man also eine in der Nähe von s im Inneren des Ringes (ss') verlaufende Kurve σ so annehmen, dass jeder innere oder auch Randpunkt des von den Kurven s und σ begrenzten Streifens $(s\sigma)$ durch die gemeinte analytische Beziehung einen entsprechenden Punkt in Inneren oder am Rande eines von Aussen sich an die Kurve s' anlehnenden Streifens $(s'\sigma')$ hat, der von der Kurve s' und einer sie umgebenden Kurve σ' begrenzt wird. Der Streifen $(s'\sigma')$ ist so das analytische Bild von $(s\sigma)$ und es möge der dem Punkte z in $(s\sigma)$ entsprechende in $(s'\sigma')$ liegende Punkt mit z' bezeichnet werden und es sollen, da ein Missverständnis nicht zu befürch-



ten ist, auch s und s' zwei zugeordnete Punkte auf den Kurven s und s' sein und analoges soll von σ und σ' gelten. Die Problemstellung ist jetzt die folgende:

Der Gesamtbereich $(s\sigma')$, *der zwischen der innersten Kurve* s *und der äussersten* σ' *liegt, soll umkehrbar eindeutig analytisch so in einen Bereich* $(S\Sigma')$, *der zwischen zwei Kurven* S *und* Σ' *liegt, abgebildet werden, dass die analytische Verknüpfung zwischen zwei einander entsprechenden aus* z *und* z' *hervorgegangenen Bildpunkten* Z *und* Z' *eine lineare Substitution wird, die man in die multiplikative Form* $Z'=kZ$, $|k|>1$ *normiert annehmen kann.*

Diese Abbildung lässt sich durch Konstruktion eines geeigneten im Ringgebiet $(s\sigma')$ regulären Potentials u erreichen.

Zum Beweise soll eine Folge

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots \tag{1}$$

von Potentialen, die alle im Gesamtbereich $(s\sigma')$ regulär sind, nach folgenden zwei Vorschriften bestimmt werden:

a) Das Potential u_0 besitzt überall entlang der inneren Kurve s den Wert -1, entlang der äusseren Kurve σ' den Wert $+1$.

b) Jedes weitere Potential u_{k+1} hat auf den Kurven s und σ' in jedem Punkte jenen Wert, den das Potential u_k im zugeordneten Punkt auf den Kurven s' bezw. σ besitzt.

Die Existenz dieser Potentiale ist durch Schwarzs Untersuchungen sichergestellt.

Nunmehr gilt der Satz:

Die Reihe

$$u=u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$

ist im ganzen Ringgebiet $(s\sigma')$ *einschliesslich des Randes gleichmässig konvergent und gibt ein hierin reguläres Potential* u, *das in jedem Punkte* z' *des Streifens* $(s'\sigma')$ *einen um* $+1$ *grösseren Wert hat, als im zugeordneten Punkt* z *des Streifens* $(s\sigma)$.

Die Kurven σ und s' verlaufen ganz innerhalb des Bereiches $(s\sigma')$ und es gibt deshalb eine positive Grösse $q<1$ so, dass für irgend ein im Felde $(s\sigma')$ reguläres Potential w die Ungleichung gilt:

$$Osc\, w \text{ in } (\sigma s') \leqq q\,.\, Osc\, w \text{ in } (s\sigma')$$

unter $Osc\, w$ den Unterschied zwischen der oberen und unteren

Grenze der Werte von w im angedeuteten Gebiet verstanden (Siehe den vorangehenden Aufsatz des Verfassers).

Wenn jetzt die Konstruktionsvorschrift b) der Potentiale u_k in Betracht gezogen wird, so ergibt sich, da die Werte von u_k auf den Kurven σ und s' zu Werten von u_{k+1} auf σ' und s geworden sind, die Ungleichung

$$Osc\, u_{k+1} < q \,.\, Osc\, u_k \,,$$

für das ganze Gebiet $(s\sigma')$. Die Zahlen $Osc\, u_0$, $Osc\, u_1$, $Osc\, u_2, \ldots$ konvergieren also gegen Null mindestens, wie 2, $2q$, $2q^2, \ldots$

Da infolge der Vorschrift b) die Extreme jedes Potentials u_k zwischen jenen jedes vorangehenden gelegen sind, so ist die Folge Max u_0, Max u_1, Max $u_2, \ldots$ fallend, hingegen Min u_0, Min u_1, Min $u_2, \ldots$ steigend konvergent und zwar beide gegen dieselbe Konstante c, gegen die auch die Potentiale $u_0, u_1, u_2, \ldots$ streben. Die Konstante c liegt so zwischen den Extremen jedes u_k, so dass also $|u_k - c| < Osc\, u_k \leqq 2q^k$ ist, wodurch auch die gleichmässige Konvergenz der Reihe

$$u = (u_0 - c) + (u_1 - c) + (u_2 - c) + \ldots \tag{2}$$

im ganzen Definitionsbereich $(s\sigma')$ der u_k, einschliesslich der Randkurven s und σ' bewiesen ist. Die Vorschrif a) wird bald noch $c = 0$ ergeben.

Für den Wert des durch die Reihe (2) definierten Potentials u auf der Kurve s ergibt sich wegen b)

$$\begin{aligned} u(s) &= (-1 - c) + [u_0(s') - c] + [u_1(s') - c] + [u_2(s') - c] + \ldots \\ &= -1 - c + u(s') \,. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} u(s') &= u(s) + 1 + c \,, \\ u(\sigma') &= u(\sigma) + 1 - c \,, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die zweite Gleichung analog erhalten wird.

Das zu u konjugierte Potential v wird eindeutig, wenn man das Ringgebiet $(s\sigma')$ durch einen Querschnitt zwischen den Randkurven s und σ' einfach zusammenhängend macht. Entlang dem Querschnitt hat dann das Potential v in zwei gegenüber liegenden Uferpunkten überall dieselbe Wertedifferenz d. h.

$$\int_s dv = \int_\sigma dv = \int_{s'} dv = \int_{\sigma'} dv, \tag{4}$$

so dass also dieses Integral bei einmaliger positiver Erstreckung entlang jeder der geschlossenen Kurven s, σ, s', σ' denselben Wert hat.

Ist $\mathfrak{u}$ irgend ein Potential, $\mathfrak{v}$ sein konjugiertes Potential, so folgt aus der Gleichung

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int\mathfrak{u}\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial n}\, ds = \int\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\,,$$

worin das einfache Integral positiv über den Rand des Regularitätsbereiches von $\mathfrak{u}$ zu erstrecken ist, auf den das Doppelintegral sich bezieht, dass das Integral $\int\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}$ nur bei konstantem $\mathfrak{u}$ Null ist, sonst ist es positiv. Dieser Satz soll zunächst auf ein Potential $\mathfrak{u}$ angewendet werden, das folgendermassen entsteht.

Das durch (2) bestimmte Potential ist im ganzen Gebiet $(s\sigma')$ definiert. Nun ist der Streifen $(s'\sigma')$ ein analytisches Bild des Streifens $(s\sigma)$ und es kann deshalb das Potential u im Streifen $(s'\sigma')$ als Potential des Streifens $(s\sigma)$ angesehen werden und soll als solches mit u' bezeichnet werden. Im Streifen $(s\sigma)$ sind jetzt zwei Potentiale u und u' definiert und es soll $\mathfrak{u}=u'-u$ angenommen werden, so dass für das konjugierte Potential $\mathfrak{v}= =v'-v$ gilt mit analoger Festsetzung der Bezeichnung.

Wegen (3) gilt für die Randwerte von $\mathfrak{u}$ auf s und σ

$$\mathfrak{u}=1+c \quad \text{auf} \quad s\,,$$

$$\mathfrak{u}=1-c \quad \text{„} \quad \sigma$$

und das Integral $\int\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}$ erstreckt auf den Rand von $(s\sigma)$ hat deshalb den Wert

$$-(1+c)\int_s d\mathfrak{v}+(1-c)\int_\sigma d\mathfrak{v}.$$

Diese Integrale verschwinden beide, da z. B. $\int_s d\mathfrak{v} = = \int_s d(v'-v) = \int_{s'} dv - \int_s dv = 0$ ist wegen (4). Das Potential $\mathfrak{u}= =u'-u$ ist also konstant und aus $\mathfrak{u}=1+c=1-c$ folgt $c=0$, so dass $u'-u=1$ also $u(z')=u(z)+1$ gilt, w. z. b. w. Augenscheinlich unterscheidet sich auch das konjugierte Potential v in zugeordneten Punkten um eine additive Konstante.

Weil nun $u(s') = u(s) + 1$, $dv(s') = dv(s)$ ist, so lässt sich das Integral $\int u\, dv$, erstreckt über die Berandung des Bereiches (ss') zwischen den beiden zugeordneten Kurven als ein Integral über die Kurve s darstellen und man bekommt dafür den Wert $\int\limits_s dv$. Demnach nimmt das Potential v bei einmaligem positiven Umlauf entlang der Kurve s um eine positive Konstante $(\neq 0)$ zu. Setzt man nun $U = \alpha u$, $V = \alpha v$, so wird bei geeignetem positiven α die Zunahme von V bei einmaligem Umlauf entlang jeder der Kurven s, σ, s', σ' genau 2π sein. Dabei ist $U(s') = U(s) + \alpha$ und etwa $V(s') = V(s) + \beta$. Die Funktion $Z = f(z) = e^{U + iV}$ ist im ganzen Ring $(s\sigma')$ eindeutig und regulär analytisch und es ist jetzt die Relation zwischen zwei zugeordneten Z und Z' einfach $Z' = kZ$, wenn $k = e^{\alpha + i\beta}$ gesetzt wird wobei auch $|k| = e^{\alpha} > 1$ gilt.

Es ist noch zu zeigen, dass die Abbildung eine schlichte ist, d. h. dass jeder Wert, dessen die Funktion $Z = f(z)$ im Bereich (ss') zwischen zwei zugeordneten Kurven s und s' fähig ist, nur einmal angenommen wird. Es gilt noch mehr: die durch Wiederholung der Substitution $Z' = kZ$ und ihrer inversen aus dem Bildgebiet von (ss') hervorgehenden Bereiche bedecken ineinander geschachtelt die ganze Ebene mit Ausname der Punkte $Z = 0$ und $Z = \infty$ genau einmal. Dies wird feststehen, wenn es sich zeigt, dass bei irgendwelchem von Null verschiedenem a die Funktion $f(z)$ im Bereiche (ss') aus der Zahlenreihe

$$\ldots ak^{-2},\ ak^{-1},\ a,\ ak,\ ak^2 \ldots$$

nur einen Wert und den genau einmal annimmt.

Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int d \operatorname{Log}(f - a)$ erstreckt positiv über die Berandung des Bereiches (ss') gibt an, wie oft der Wert a in (ss') angenommen wird. Wegen der Eigenschaft $f(z') = kf(z)$ lässt sich dieses Integral als ein Integral über die Randkurve s darstellen und lautet dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s d \operatorname{Log} \frac{f - ak^{-1}}{f - a}.$$

Nimmt man hierin für a nacheinander die Zahlen $ak^{-n+1}, \ldots$

ak^{-1}, a, $ak, \dots ak^n$ und addiert dann die gemäss dieser Formel erhaltenen Anzahlen, so bekommt man

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_s d\,\mathrm{Log}\,\frac{f-ak^{-n}}{f-ak^n}\,.$$

Da $|k|>1$ ist, so wird $|ak^n|$ mit hinreichend grossem n grösser, $|ak^{-n}|$ hingegen kleiner als irgendein Wert von $|f|$ auf s und es lässt sich dann $\mathrm{Log}\,\frac{1-f^{-1}ak^{-n}}{1-fa^{-1}k^{-n}}$ in eine auf s gleichmässig konvergente Reihe eindeutiger Funktionen entwickeln, so dass dieser Logarithmus bei einem Umlauf entlang s in sich zurückkehrt. Der Wert des Integral (5) ist demnach $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s d\,\mathrm{Log} f =$ $= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_s d\,(U+iV) = 1$, womit die Behauptung erwiesen ist

Die Abbildung durch $\zeta = \mathrm{Log} f(z) = U+iV$ ist übrigens ebenfalls schlicht. Es wird durch sie das durch einen Querschnitt zwischen einem Punkt von s und dem zugeordneten s' einfach zusammenhängend gemachte Gebiet in einen parallelogrammartigen Bereich verwandelt, dessen je zwei Gegenseiten durch eine Verschiebung auseinander hervorgehen. Die Seiten, die den Kurven s und s' entsprechen, sind durch $\zeta' = \zeta + \alpha + i\beta$ mit einander verbunden, die den beiden Ufern des Querschnittes entsprechenden durch $\zeta'' = \zeta + 2\pi i$.