Ein Abschätzungssatz der Potentialtheorie.

Von

JOSEF PLEMELJ.

Bei manchen funktionentheoretischen Existenzbeweisen kann der folgende Satz vom Nutzen sein:

Es sei A *irgend ein zusammenhängender Bereich und* B *ein ganz im Inneren von* A *liegender Bereich, dessen Rand also nirgends bis zur Berandung von* A *reicht. Es gibt dann eine nur von der Form von* A *und* B *abhängende positive Zahl* $q<1$ *so, dass für jedes im Bereich* A *reguläre und beschränkte Potential* u *die Schwankung* Osc u *im kleineren Bereich* B, *d. h. der Unterschied zwischen der oberen und unteren Grenze der Potentialwerte, kleiner ist als* q *mal die Schwankung von* u *im Bereich* A *oder*

$$\text{(1)} \qquad Osc\, u \quad in \quad \mathrm{B} \leqq q \,.\, Osc\, u \quad in \ \mathrm{A}\,.$$

Der angeführte Satz wird sich als leichte Folge des entsprechenden Satzes für den Kreis als Gebiet *A* ergeben und ich beweise also zunächst den folgenden Satz:

Für jedes im Kreis $|z|<1$ reguläre Potential ν, das durch $-1 \leqq \nu \leqq 1$ beschränkt ist und einen nicht negativen Mittelpunktswert $\nu(0) = \frac{4\varepsilon}{\pi}$ hat, wo $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{4}$ gilt im ganzen Einheitskreis die Abschätzung

$$\text{(2)} \qquad \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - |z|}{1 - |z| \operatorname{tg} \varepsilon} \leqq \nu \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon + |z|}{1 + |z| \operatorname{tg} \varepsilon}\,,$$

ferner gilt in einem Kreis vom Radius $|z|$ um den Nullpunkt

$$\text{(3)} \qquad Osc\, v \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2|z|\cos 2\varepsilon}{1-|z|^2}$$

also stets auch

$$\text{(4)} \qquad Osc\, v \leqq \frac{8}{\pi} \operatorname{arc\,tg} |z|\,.$$

Beweis dieses Satzes: Es sei $-u$ das zu v konjugierte Potential, zu dessen eindeutiger Festsetzung $u(0) = 0$ angenommen werde. Die Funktion $f(z) = \frac{\pi}{2}(u+iv)$ ist für $|z| < 1$ regulär analytisch und wegen $-1 \leqq v \leqq 1$ hat e^f einen positiven Realteil. Im Quotienten

$$\text{(5)} \qquad \frac{e^f - e^{2i\varepsilon}}{e^f + e^{-2i\varepsilon}} = \tau(z)$$

ist der Realteil des Zählers kleiner als der des Nenners, während die Imaginärteile beide gleich sind. Es ist also für $|z| < 1$ stets $|\tau(z)| < 1$ und weil $\tau(0) = 0$ ist, so ist nach dem Lemma von Schwarz *) $|\tau| \leqq |z|$.

Aus (5) ergibt sich

$$f = \frac{\pi}{2}(u+iv) = \operatorname{Log} \frac{e^{2i\varepsilon} + \tau e^{-2i\varepsilon}}{1-\tau}\,.$$

Um den Imaginärteil von f, d. h. v abzuschätzen, setze man $\tau = \rho e^{i(\theta+2\varepsilon)}$, wo $\rho = |\tau|$ ist und hat dann

$$f(z) = \operatorname{Log} \frac{e^{2i\varepsilon} + \rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i(\theta+2\varepsilon)}} = \operatorname{Log} \frac{e^{i\varepsilon} + \rho e^{i(\theta-\varepsilon)}}{e^{-i\varepsilon} - \rho e^{i(\theta+\varepsilon)}}$$

also

$$\frac{\pi}{2} v = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\varepsilon + \rho\sin(\theta-\varepsilon)}{\cos\varepsilon + \rho\cos(\theta-\varepsilon)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\varepsilon + \rho\sin(\theta+\varepsilon)}{\cos\varepsilon - \rho\cos(\theta+\varepsilon)}$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{(1+\rho^2)\sin 2\varepsilon + 2\rho\sin\theta}{(1-\rho^2)\cos 2\varepsilon}\,.$$

Da nun wegen $|v| \leqq 1$ dieser arc tg zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, erkennt man sofort, dass bei festgehaltenen ρ sein grösster Wert bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ und sein kleinster Wert für $\theta = -\frac{\pi}{2}$ sich ergibt.

---

*) Carathéodory: Math. Annalen Bd. 72, 1912 S. 110.

Für $\theta=\frac{\pi}{2}$ werden in der vorstehenden Gleichung beide arc tg einander gleich und zwar $=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\varepsilon+\rho}{1+\rho\operatorname{tg}\varepsilon}$, für $\theta=-\frac{\pi}{2}$ wird jeder gleich $\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\varepsilon-\rho}{1-\rho\operatorname{tg}\varepsilon}$, so dass man bekommt

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\varepsilon-\rho}{1-\rho\operatorname{tg}\varepsilon}\leqq v\leqq\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\varepsilon+\rho}{1+\rho\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Nun erkennt man, dass mit wachsendem ρ der linkseitige Ausdruck abnimmt, der rechtseitige dagegen zunimmt, so dass man wegen $\rho=|\tau|\leqq|z|$ stets die Ungleichung (2) hat. Durch Subtraktion des unteren Wertes in der Ungleichung (2) vom oberen bekommt man die Ungleichung (3), die für $\varepsilon=0$ den grösstmöglichen Wert gibt, so dass stets auch (4) gilt.

Die Abschätzung ist sogar die bestmögliche, da die angegebenen Grenzen vom Potential, das den Realteil der analytischen Funktion $\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\varepsilon+z}{1+z\operatorname{tg}\varepsilon}$ bildet, auf der reellen Achse wirklich angenommen werden.

Die Schwankung des durch $|v|\leqq 1$ beschränkten Potentials in $|z|<1$ ist $=2$ und es gilt also, wenn man als Bereich B einen Kreis $|z|\leqq\rho$ nimmt und $q=\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\rho$ setzt, was kleiner ist als 1, der Satz (1) für diesen Fall.

Die Giltigkeit des Satzes für irgendein einfach zusammenhängendes Gebiet als Bereich A ist eine Folge der Abbildbarkeit in den Einheitskreis. Dass der Satz allgemein gilt, erkennt man aus der Uniformisierbarkeit beliebiger Bereiche durch Grenzkreisfunktionen. Will man diese nicht vorauszetzen, so schliesse man folgendermassen: Man mache durch geeignete Querschnitte den Bereich A zu einem einfachzusammenhängenden $\bar{A}$. Wenn irgendein Querschnitt den inneren Bereich B trifft, so vergrössere man den einfach zusammenhängenden Bereich $\bar{A}$ durch Anheften von schmalen Streifen des Bereiches A beiderseits längs eines solchen Querschnittes und bilde den so vergrösserten Bereich $\bar{\bar{A}}$ in den Einheitskreis ab. Wenn man nun von den Bildern der Streifen absieht, die ja ihr Aequivalent bereits im übriggebliebenen Teil des Einheitskreises haben, so findet darin das ganze Gebiet B schon genau einmal sein Bild, das nirgends bis zum Einheitskreis reicht. Nun übertrage man ein in A reguläres Potential v derart in den Einheitskreis, dass man jedem Punkt darin jenen Wert zuordnet, den das Potential v im entsprechenden Punkt des Bereiches A hat. So wird v zu einem im Einheitskreis regulären Potential mit den gleichen Schranken, wie früher. Für den Einheitskreis und das ganz im Inneren liegende Abbild von B gibt es nun ein $q < 1$ von der verlangten Eigenschaft und die Rückübertragung in das Gebiet A zeigt die Giltigkeit des Satzes (1) bei so bestimmten q.

Die Formel (4) wurde zuerst von C. Neumann abgeleitet (Abelsche Integrale 2 Auflage, 1884 S. 415) und zwar aus dem Poissonschen Integral. Ein auf geometrische Betrachtungen sich stützender Beweis von (2), (3) und (4) wurde von Koebe mitgeteilt (Ueber d. Schwarzsche Lemma, Mathem. Zeitschrift Bd. 6, 1920 S. 63). Dieses rein arithmetische Verfahren habe ich brieflich Carathéodory angegeben und findet sich an einem ähnlichen Beispiel vom ihm mitgeteilt (Festschrift auf Schwarz, 1914 S. 21). Die vorstehende Beweisführung ist einer Aufzeichnung aus derselben Zeit entnommen.