Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der speziellen Relativitätstheorie.

Von

M. RADOJČIĆ.

Einleitung.

Für den mit „Relativitätstheorie" bezeichneten Zweig der neueren Physik ist das kritische Eingehen in Begriffe und Zusammenhänge, die man vorhin a priori hinnahm, besonders charakteristisch. Vor allem handelt es sich um das Trennen desjenigen, das in der äusseren Natur wahrhaft vorliegt und sich durch physikalische Erscheinungen dem Menschen kundgibt, von demjenigen, das genauer betrachtet in den physikalischen Erscheinungen gar nicht enthalten ist, sondern, den menschlichen Denkgewohnheiten gemäss, hinzugedacht wird. Dieses Hinzugedachte hat gewiss einen Zweck: Einerseits erleichtert es die Bildung gewisser Vorstellungen über die Dinge, anderseits ermöglicht es den Methoden der Mathematik eine freiere Anwendung; da es aber nicht aus den Dingen selbst hervorquillt, kann es sich mit dem Fortschritte der experimentellen Wissenschaft als unzulänglich erweisen.

Das geschah eben mit dem physikalischen Zeit- und Raumbegriffe. Der entscheidendste Schritt ward vollzogen als *Einstein*, die Unzulänglichkeit der apriorischen „absoluten Zeit" zur Beschreibung gewisser physikalischen Vorgänge erkennend, einen Zeitbegriff einführte, der sich auf Erscheinungen gründet und folglich mit diesen im Einklange steht. In der allgemeinen Relativitätstheorie wurde nachher auch der Raum auf erscheinungsmässige Grundlagen gestellt, indem statt der a priori angewandten Euklidischen Geometrie eine allgemeine, stetige Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit herangezogen wurde, deren Eigenschaften von physikalischen Verhältnissen abhängen.

Aber gerade im Begriffe der stetigen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit begegnet uns wieder ein breites Feld von Vorstellungen, die, streng genommen, nicht aus den Erscheinungen stammen, sondern bloss hinzugedacht werden. Ein Beispiel wird das gemeinte am bessten erklären:

Es entstehe an einem Orte A der Aussenwelt ein augenblicklicher Lichtstrahl λ und dieser werde an einem anderen Orte B wahrgenommen. Die beiden Orte sind eigentlich durch materielle Körper gegeben, ausser denen kein physikalischer Lichtstrahl entstehen und keiner wahrgenommen werden kann. Der Einfachheit wegen denken wir die beiden Körper klein in Bezug auf ihre gegenseitige Entfernung und nennen sie materielle Punkte. Der Raum zwischen A und B sei leer, d. h. frei von materiellen Körpern. Nun stellen wir uns gewöhnlich vor, dass sich der Lichtstrahl λ von A bis B im Raume „fortpflanze". Aber diese „Fortpflanzung" ist eigentlich durch keine Erscheinung gegeben, — wie es z. B. die Bewegung eines fallenden Steines, oder die Fortpflanzung einer Kreiswelle an der Wasseroberfläche ist. Wenn wir dennoch von der „Fortpflanzung" des Lichtstrahles λ sprechen, und mithin von einzelnen „Orten" zwischen A und B, an denen sich λ auf seinem Wege von A nach B, augenblicklich befindet, so führen wir in unseren Vorstellungen ungefähr das folgende Experiment aus: Wir bringen einen bloss vorgestellten, materiellen Punkt X in den „Raum" (den wir uns sogleich hinzugedacht haben als wir das Wort „Ort" hörten), wir unterschieben sozusagen den materiellen Punkt X dem Lichtstrahle λ auf seinem Wege. Da aber X ein materieller Punkt sein muss, heben wir ihn sogleich auf weil der Raum zwischen A und B, nach Voraussetzung, leer ist. Mann kann auch sagen, dass wir den leeren Raum mit einer abstrakt hinzugedachten Materie ausfüllen, die uns in gewisser Hinsicht berechtigt, ihn dennoch als leer anzusehen.

Ähnlich ist es immer, wenn vom leeren Raume, in dem sich Licht ausbreitet, die Rede ist, gleichgültig ob der Raum Euklidisch ist, oder nicht. Diese Ausbreitung ist, samt dem leeren Raume, streng genommen, keine physikalische Tatsache. Der

„leere Raum" ist, wie gesagt, ein mit erdachter Materie ausgefüllter Raum, in dem die Lichtausbreitung und alles übrige Geschehen stetig verfolgt werden kann. Wir brauchen ihn, um die Unstetigkeit, die in der Natur neben der Stetigkeit waltet, auszuwischen und eine lückenlose Stetigkeit an ihre Stelle zu setzen, ohne der die mathematische Analyse, die auf Stetigkeitsbegriffen beruht, die Anwendungsmöglichkeit verlöre.

Auch die stetige Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ist, im Grunde genommen, eine Weiterführung der angedeuteten Gedankenkonstruktion. Durch die Hinzufügung einer vierten Dimension wird jeder materielle Punkt in eine Linie verwandelt, deren Punkte augenblickliche Lichtereignisse im betreffenden materiellen Punkte darstellen. Es ist also in dieser Mannigfaltigkeit ausser der Vorstellung eines „materieerfüllten leeren Raumes" noch in gewissem Sinne die einer Materie enthalten, in der sich an jeder Stelle, unaufhörlich Lichtereignisse abspielen, d. h. die von (in materiellen Punkten stattfindenden) Lichtereignissen zeitlich und räumlich ganz erfüllt ist.

Durch diese Bemerkungen wollten wir bloss einen der leitenden Gesichtspunkte des vorliegenden axiomatischen Aufbaues andeuten. Wir werden von einigen elementaren Erfahrungstatsachen der Physik, die dann in den Axiomen ihren Ausdruck finden, ausgehen, um aus ihnen allmählich die Begriffe und Zusammenhänge der speziellen Relativitätstheorie abzuleiten. Dabei wird kein Raum, keine Zeit und überhaupt keine stetige Mannigfaltigkeit, in der die physikalischen Elemente „eingebettet" wären, vorausgesetzt. Ausser den zeitlichen Begriffen sollen also auch die geometrischen und mithin auch die Bewegungsbegriffe erst vom Grunde aus aufgebaut werden. Gegeben sind nur physikalische „augenblickliche Ereignisse", die in „materiellen Punkten" „stattfinden" und wieder in „materiellen Punkten" „erscheinen". Als Erscheinungsmittel gilt das Licht, allgemeiner: die „Ausbreitung elektromagnetischer Schwingungen" und zwar im „leeren Raume".

In der vorliegenden Arbeit konnten nur die allerersten Grundlagen aufgestellt werden. Sie enthalten das Axiomensystem und elementare Sätze, die sich auf vormetrische Zusammenhänge beziehen. Übrigens mag es erwähnt werden, dass ihr Geltungsbereich nicht an den der speziellen Relativitätstheorie gebunden ist. Der Metrik („Lichtmetrik“), die darauf folgen soll und die unter anderem auch zu den Lorentztransformationen führt, werden wir eine besondere Arbeit widmen. Eine Kritik der Axiome, die sich auch mit ihrer Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit befassen würde, muss ebenfalls auf eine spätere Arbeit verschoben werden

Was andere Arbeiten anbelangt, die sich mit der Grundlegung der Relativitätstheorie befassen, bestehen, meines Wissens, nur zwei, die der vorliegenden Arbeit in gewissen Punkten genügend nahe kommen, so dass sie an dieser Stelle erwähnt zu sein brauchen. Das sind: *C. Carathéodory*, *Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie* (Berliner Sitzungsberichte 1924) und *H. Reichenbach*, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre* („Die Wissenschaft, Bd. 72, Vieweg 1924). Die Berührungspunkte mit der Arbeit *Carathéodorys* beziehen sich auf seine Axiomgruppen I und II (der „Zeitfolge“ und der „Lichtausbreitung“). Ein grundsätzlicher Unterschied erscheint aber in der Axiomgruppe III, die einen dreidimensionalen Raum „von aussen“ einführt und in dem die materiellen Punkte eingebettet vorausgesetzt werden. Die Berührungspunkte mit dem Werke *Reichenbachs* beziehen sich hauptsächlich auf metrische Zusammenhänge; von ihnen wird in einer nächsten Arbeit die Rede sein.

I. Die fünf Grundbegriffe und die sechs Axiomgruppen.

Der vorliegende axiomatische Aufbau unseres Gegenstandes setzt allein Begriffe der reinen Mathematik ohne Geometrie voraus. Zu diesen Begriffen treten nun insgesamt fünf neue Grundbegriffe hinzu; alle übrigen Begriffe werden aus diesen abgeleitet.

Erklärung 1. Wir denken zweierlei „Dinge“ und dreierlei Grundbeziehungen zwischen diesen „Dingen“; die einen „Dinge“ nennen wir *materielle Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, $C, \ldots$; die anderen nennen wir *augenblickliche Ereignisse* und bezeichnen sie mit α, β, $\gamma, \ldots$; die Grundbeziehungen zwischen materiellen Punkten und augenblicklichen Ereignissen bezeichnen wir mit den Worten *„erscheinen“*, *„stattfinden“* und *„früher“*.

Erklärung 2. Die Menge aller materiellen Punkte und augenblicklichen Ereignisse, die infolge der genannten drei Grundbeziehungen mit einander verknüpft sind, werden wir einfach eine *Mannigfaltigkeit* nennen.

Die genaue und für unsere Zwecke hinreichende Beschreibung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den augenblicklichen Ereignissen und materiellen Punkten erfolgt durch zwölf Axiome. Diese Axiome können wir in sechs Gruppen teilen und diese Gruppen in folgender Weise benennen:

I Axiom des *Erscheinens,*
II 1—2. Axiome des *Stattfindens,*
III 1—3. Axiome der *zeitlichen Anordnung,*
IV Axiom des *Anknüpfens,*
V 1—4. Axiome der *Homogenität,*
VI Axiom der *Stetigkeit.*

Bemerkungen. Statt von augenblicklichen Ereignissen, wird in anderen Schriften oft von „Signalen“ oder „Lichtsignalen“ gesprochen. Da aber das Wort „Signal“ die Bedeutung eines vom Menschen absichtlich erzeugten Ereignisses hat (das nicht einmal augenblicklich sein braucht) und wir die Tatsachen bloss beschreiben wollen, ohne nach den Ursachen ihrer Entstehung zu fragen, scheint es uns besser das Wort „Signal“ zu vermeiden. — Es bedarf wohl kaum einer Erwähnung, dass unsere Mannigfaltigkeit mit der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit schon deshalb nichts zu tun haben kann, weil sie in der Regel keine stetige ist; ihre Elemente sind nicht „Punkte“, sondern materielle Punkte und ausserdem augenblickliche Ereignisse. Wir setzen überhaupt keinen Raum und keine Zeit voraus und werden von keiner stetigen Mannigfaltigkeit sprechen, in der die materiellen Punkte und die augenblicklichen Ereignisse „eingebettet“ wären. — Es sei noch ausdrücklich bemerkt, dass die verschiedenen materiellen Punkte und augenblicklichen Ereignisse, von denen in einer Erklärung, in einem Axiom oder in einem Satze die Rede sein wird, stets einer und derselben Mannigfaltigkeit angehören.

2. Axiom des Erscheinens.

Das Axiom des Erscheinens begründet eine Beziehung zwischen den augenblicklichen Ereignissen einerseits und den materiellen Punkten anderseits; dabei wird der Grundbegriff „erscheinen“ erklärt.

I. *Jedes augenblickliche Ereignis erscheint in jedem materiellen Punkte.*

Das Erscheinen eines augenblicklichen Ereignisses α in einem materiellen Punkte A (d. h. die Tatsache, dass α in A erscheint) werden wir mit αA bezeichnen und auch augenblickliche Erscheinung nennen.

Bemerkungen. Das Axiom I besagt, dass unsere augenblicklichen Ereignisse, die „Lichtereignisse“ sind, sichtbar sind und dass die materiellen Punkte, wegen ihrer „Punktförmigkeit“, nie die Sichtbarkeit wegschaffen können. — Es würde hier auch die Tatsache gehören, dass die augenblicklichen Ereignisse nur in materiellen Punkten erscheinen. Damit wäre das Wort „erscheinen“ noch näher bestimmt, aber nicht im Sinne einer Beziehung zwischen augenblicklichen Ereignissen und materiellen Punkten, weswegen diese Tatsache in unserer Darstellung nicht zu den Axiomen gezählt werden kann.

3. Axiome des Stattfindens.

Auch die Axiome des Stattfindens begründen eine Beziehung zwischen den augenblicklichen Ereignissen einerseits und den materiellen Punkten anderseits; dabei wird der Grundbegriff „stattfinden“ erklärt.

II 1. *Zu jedem augenblicklichen Ereignisse gibt es einen materiellen Punkt, in dem dieses augenblickliche Ereignis stattfindet.*

II 2. *Zu einem augenblicklichen Ereignisse gibt es nicht mehr als einen materiellen Punkt, in dem dieses augenblickliche Ereignis stattfindet.*

Das Stattfinden eines augenblicklichen Ereignisses α in einem materiellen Punkte A (d. h. die Tatsache, dass α in A stattfindet) werden wir mit $A\alpha$ bezeichnen. Falls α ausserdem in einem materiellen Punkte B erscheint, werden wir $A\alpha B$ schreiben. Falls mehrere augenblickliche Ereignisse nicht miteinander verwechselt werden können, werden wir statt $A\alpha$ und $A\alpha B$ kurz $\dot{A}$, bzw. $\dot{A}B$ schreiben.

Bemerkung. Anschaulich gesprochen, drückt II 1 die Tatsache aus, dass die „sichtbaren Ereignisse“ von den materiellen Gegenständen herrühren. II 2 bringt eine naturgemässe Vereinfachung des Begriffes des augenblicklichen Ereignisses.

Der nachstehende Satz sei als eine unmittelbare Folgerung aus den Axiomen I und II 1 erwähnt:

S a t z 1. Jedes augenblickliche Ereignis erscheint auch im materiellen Punkte, in dem es stattfindet.

4. Axiome der zeitlichen Anordnung.

Die Axiome der zeitlichen Anordnung begründen eine Beziehung zwischen den augenblicklichen Erscheinungen in einem materiellen Punkte; dabei wird der Grundbegriff „f r ü h e r" erklärt.

III 1. *Erscheint in einem materiellen Punkte ein augenblickliches Ereignis* α *früher als ein augenblickliches Ereignis* β, *dann sind* α *und* β *zwei verschiedene augenblickliche Ereignisse.*

III 2. *Erscheint in einem materiellen Punkte* A *ein augenblickliches Ereignis* α *früher als ein augenblickliches Ereignis* β, *dann erscheint in* A *nicht* β *früher als* α.

E r k l ä r u n g 3. Erscheinen in einem materiellen Punkte A zwei augenblickliche Ereignisse α und β, und zwar α nicht früher als β und β nicht früher als α, so werden wir sagen: α *und* β *erscheinen gleichzeitig in* A.

III 3. *Erscheinen in einem materiellen Punkte* A *drei augenblickliche Ereignisse* α, β, γ *und zwar* α *früher als* β, β *früher als* γ, *dann erscheint in* A *auch* α *früher als* γ.

Erscheinen in einem materiellen Punkte A *drei augenblickliche Ereignisse* α, β, γ *und zwar* α *und* β *gleichzeitig,* β *und* γ *gleichzeitig, dann erscheinen in* A *auch* α *und* γ *gleichzeitig.*

Statt zu sagen: in A erscheint α früher als β, werden wir auch sagen: i n A e r s c h e i n t β s p ä t e r als α.

Statt zu sagen: in A erscheinen α und β gleichzeitig, werden wir auch sagen: i n A e r s c h e i n t α g l e i c h z e i t i g m i t β, oder: i n A e r s c h e i n t α i m A u g e n b l i c k e d a β i n A e r s c h e i n t, oder kürzer: i n A e r s c h e i n t α i m A u g e n b l i c k e „βA"; usw.

Erscheint α in A früher, oder später als β, so werden wir schreiben $\alpha A < \beta A$, bzw. $\alpha A > \beta A$; erscheinen α und β gleichzeitig in A, so werden wir schreiben $\alpha A = \beta A$.

Aus den Erklärungen der Worte „später" und „gleichzeitig" folgen die Beziehungen: Ist $\alpha A = \beta A$, so ist $\beta A = \alpha A$; ist $\alpha A < \beta A$, so ist $\beta A > \alpha A$; ist $\alpha A > \beta A$, so ist $\beta A < \alpha A$.

E r k l ä r u n g 4. Falls im materiellen Punkte A, in dem α früher, oder später als β erscheint, α oder β, oder beide stattfinden, werden wir auch sagen: α *findet in* A *früher*, bzw. *später statt, als* β *in* A *erscheint* usw., und werden dafür $A\alpha < \beta A$, bzw. $A\alpha > \beta A$ usw. schreiben. — Falls α und β gleichzeitig in A erscheinen, werden wir in solchen Fällen sagen: α *findet in* A *statt, im Augenblick als* β *in* A *erscheint* usw. und werden dafür $A\alpha = \beta A$ usw. schreiben.

B e m e r k u n g e n. Das Axiom III 1 drückt die anschauliche Tatsache aus, dass in einem und demselben materiellen Punkte ein augenblickliches Ereignis nicht in zwei verschiedenen Augenblicken erscheint. Mehrfaches Erscheinen, das durch „Spiegelungen" bewirkt wäre, fassen wir als eine Menge v e r s c h i e d e n e r Ereignisse auf. Auch die entsprechenden Umstände, die sich in der allgemeinen Relativitätstheorie aus der Annahme einer endlichen „Welt" usw. ergeben, schliessen wir aus. — Erscheinen in einem materiellen Punkte zwei augenblickliche Ereignisse gleichzeitig, dann ist nach der Erklärung 3 möglich, dass sie identisch sind, d. h. ein und dasselbe augenblickliche Ereignis darstellen. — Aus den Worterklärungen folgt unmittelbar, dass ein augenblickliches Ereignis im materiellen Punkte, in dem es stattfindet, gleichzeitig stattfindet und erscheint.

Aus dem Axiom III 2 folgt unmittelbar der Satz:

S a t z 2. Erscheinen in einem materiellen Punkte A zwei augenblickliche Ereignisse α und β, so gilt stets eine und nur eine von den drei Beziehungen $\alpha A < \beta A$, $\alpha A > \beta A$, $\alpha A = \beta A$.

Aus dem Axiom III 3 ergibt sich der folgende Satz:

S a t z 3. Erscheinen in einem materiellen Punkte A drei augenblickliche Ereignisse α, β, γ und ist $\alpha A < \beta A$ und $\beta A = \gamma A$, so ist $\alpha A < \gamma A$.

B e w e i s. Es ist nach Satz 2 entweder $\alpha A < \gamma A$ oder $\alpha A > \gamma A$ oder $\alpha A = \gamma A$ Wäre $\alpha A > \gamma A$, so wäre zugleich $\gamma A < \alpha A$ und $\alpha A < \beta A$, also nach III 3 $\gamma A < \beta A$, was der Voraussetzung $\beta A = \gamma A$ widerspricht. Wäre $\alpha A = \gamma A$, so wäre, da auch $\gamma A = \beta A$ ist, nach III 3 $\alpha A = \beta A$, was der Voraussetzung $\alpha A < \beta A$ widerspricht. Also ist $\alpha A < \gamma A$.

Durch die Axiome der zeitlichen Anordnung wird aus irgend einer Menge augenblicklicher Erscheinungen in einem materiellen Punkte eine Menge, die bis zu einem gewissen Grade

„einfach geordnet" ist. Die augenblicklichen Erscheinungen können nämlich bis auf solche, die miteinander gleichzeitig sind, in einer bestimmten Weise angeordnet werden. Diese Anordnung werden wir die zeitliche Anordnung der betreffenden augenblicklichen Erscheinungen in A nennen. Es gelten diesbezüglich, erstens, die nachstehenden zwei Sätze, die wir elementar beweisen werden, dann aber der allgemeine Satz 6, zu dessen Beweis wir uns an die allgemeine Mengenlehre stützen werden.

Satz 4. Erscheinen in einem materiellen Punkte A zwei augenblickliche Ereignisse, so lassen sich dieselben stets mit α und β bezeichnen, so dass $\alpha A \leq \beta A$ ist. Ist nicht $\alpha A = \beta A$, so ist diese Bezeichnung nur in einer Weise möglich.

Beweis. Es seien φ und ψ die beiden augenblicklichen Ereignisse. Es ist $\varphi A < \psi A$ oder $\varphi A > \psi A$ oder $\varphi A = \psi A$. Ist $\varphi A \leq \psi A$, so schreiben wir α statt φ und β statt ψ; ist $\varphi A > \psi A$, so schreiben wir β statt φ und α statt ψ. Dann ist jedenfalls $\alpha A \leq \beta A$. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus dem Axiom III 2.

Satz 5. Erscheint in einem materiellen Punkte A eine endliche Menge augenblicklicher Ereignisse, so lassen sich dieselben stets mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi$ bezeichnen, so dass $\alpha A \leq \beta A \leq \gamma A \leq \ldots \leq \xi A$ ist. Ist nicht $\alpha A = \beta A$ oder $\beta A = \gamma A$ usw., so ist diese Bezeichnung nur in einer Weise möglich.

Beweis. Wir greifen irgend zwei Elemente der Menge heraus. Nach Satz 4 können wir sie so mit φ und χ bezeichnen, dass $\varphi A \leq \chi A$ ist. Dann greifen wir noch ein Element ψ heraus. Es ist entweder $\psi A < \varphi A$, oder $\varphi A \leq \psi A \leq \chi A$, oder $\chi A < \psi A$. Ist das erste der Fall, so schreiben wir λ statt ψ, μ statt φ, ν statt χ; ist das zweite der Fall, so schreiben wir λ statt φ, μ statt ψ, ν statt χ; ist das dritte der Fall, so schreiben wir λ statt φ, μ statt χ, ν statt ψ. Dann ist jedenfalls $\lambda A \leq \mu A \leq \nu A$. Nun greifen wir wiederum ein neues Element heraus usw. Die Eindeutigkeit ist im Beweise schon enthalten.

Bemerkungen. Besteht in einem materiellen Punkte nur eine endliche Menge augenblicklicher Erscheinungen, so können dieselben im angegebenen Sinne zeitlich angeordnet werden. Diese Anordnung stellt dann, sozusagen, die ganze Zeit in A dar, welche ausserhalb der augenblicklichen Erscheinungen keine physikalische Existenz hat. — Anders ausgedrückt, besagt der Satz 5, dass jeder endlichen Menge augenblicklicher Erscheinungen in A die endliche Folge ganzer Zahlen $n = 1, 2, \ldots, N$ zugeordnet werden kann, so dass den Beziehungen „gleichzeitig“ und „früher“ die Grössenbeziehungen „gleich“ bzw. „kleiner“ entsprechen. Damit wird aber einerseits der Sinn des Zählens, der die Zeit voraussetzt in eigentümlicher Weise angedeutet, anderseits werden die allerersten Anlagen zu „Zeitkoordinaten“ getroffen. Der Begriff einer „stetigen Zeit“ ergibt sich erst aus dem Axiom der Stetigkeit.

Wendet man die Begriffe der Mengenlehre an, so kann man den Satz 5 auch auf die allgemeinsten Mengen augenblicklicher Erscheinungen in einem materiellen Punkte erweitern. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff eines allgemeinen Zeitparameters ein:

Erklärung 5. Es sei $\{\varphi A\}$ irgend eine Menge augenblicklicher Erscheinungen in A; wir werden die, auf einer Menge $\{t\}$ reeller Zahlen definierte Veränderliche t einen, der Menge $\{\varphi A\}$ zugeordneten *Zeitparameter* nennen, falls die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jeder augenblicklichen Erscheinung φA entspricht ein und nur ein Wert von t.

2. Jedem Werte von t entspricht eine augenblickliche Erscheinung φA.

3. Sind $\varphi_1 A$ und $\varphi_2 A$ irgend zwei Elemente der Menge $\{\varphi A\}$, t_1 und t_2 die entsprechenden Werte von t, und ist $\varphi_1 A <$ oder $>$ oder $= \varphi_2 A$, dann ist $t_1 <$ bzw. $>$ bzw. $= t_2$.

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz 6. Jeder Menge augenblicklicher Erscheinungen in einem materiellen Punkte kann ein Zeitparameter zugeordnet werden.

Beweis. Es sei $\{\varphi_0 A\}$ eine Teilmenge der gegebenen Menge $\{\varphi A\}$, die dadurch entsteht, dass von jeder Gruppe gleichzeitiger Elemente von $\{\varphi A\}$ ein einziges Element beibehalten wird. Die Menge $\{\varphi_0 A\}$ ist auf Grund der Beziehung „früher“ eine einfach geordnete Menge; sie hat einen bestimmten Ordnungstypus und es besteht nach den Prinzipen der Mengenlehre eine „ähnliche“ Menge reeller Zahlen $\{t\}$, die ihr ein-eindeutig zugeordnet werden kann, so dass, wenn $\varphi_1 A$, $\varphi_2 A$ irgend zwei Elemente von $\{\varphi A\}$ und t_1, t_2 die entsprechenden Elemente von $\{t\}$ sind, den zeitlichen Beziehungen $\varphi_1 A <, >$ und $= \varphi_2 A$ die Grössenbeziehungen $t_1 <$ bzw. $>$ bzw. $= t_2$ entsprechen. Damit ist ein Zeitparameter bestimmt.

Wir definieren noch einige Begriffe, die im Laufe dieser Betrachtungen Anwendung finden werden:

Erklärung 6. Erscheinen in einem materiellen Punkte A drei augenblickliche Ereignisse α, β, γ und ist $\alpha A \leq \beta A \leq \gamma A$, so werden wir sagen: β *erscheint zeitlich zwischen* α *und* γ, oder *zwischen* γ *und* α.

Erklärung 7. Erscheint in einem materiellen Punkte A ein augenblickliches Ereignis α zeitlich zwischen zwei augenblicklichen Ereignissen einer gewissen Menge augenblicklicher Ereignisse, so werden wir sagen: α *erscheint während dieser Menge in A*, oder: *diese Menge umfasst in A das augenblickliche Ereignis* α.

Erklärung 8. Eine Menge augenblicklicher Ereignisse werden wir *allumfassend* nennen, falls alle augenblicklichen Ereignisse der betrachteten Mannigfaltigkeit, in jedem materiellen Punkte derselben, von dieser Menge umfasst werden.

5. Axiom des Anknüpfens.

Das Axiom des Anknüpfens begründet eine Beziehung zwischen dem Erscheinen und Stattfinden in einem materiellen Punkte verschiedener augenblicklicher Ereignisse.

Erklärung 9. Findet in einem materiellen Punkte P ein augenblickliches Ereignis β im Augenblicke statt, da ein anderes augenblickliches Ereignis α, welches nicht in P stattfindet, in P erscheint, dann werden wir sagen: *in P knüpft sich* β *an* α *an.*

IV. *Erscheint in einem materiellen Punkte P ein augenblickliches Ereignis* α, *welches nicht in P stattfindet, dann gibt es stets ein augenblickliches Ereignis* β, *welches sich in P an* α *anknüpft.*

Bemerkungen. Anschaulich gesprochen, begründet das Axiom IV eine Art kausaler Verkettung, die darin besteht, dass jedes „Lichtereignis" in allen materiellen Punkten unaufhörlich „reflektiert" wird. Eigentlich abstrahieren wir, wie gesagt, vom Begriffe der Ursache. Das Anknüpfen eines augenblicklichen Ereignisses β an ein anderes, α, ist für uns eine Tatsache, gleichgültig ob sie physikalisch von α bewirkt wird oder nicht. — Dieses Axiom haben wir eingeführt nur um eine Vereinfachung in den Schilderungen zu erzielen. — Wir könnten das Wort „anknüpfen" statt des Wortes „erscheinen" zum Grundbegriffe er-heben, wodurch an Stelle der Axiome I und IV ein einziges käme. Diese Vereinfachung haben wir nicht unternommen um der Anschauung näher zu bleiben.

6. Begriff der Ereignisreihe.

Wir führen den Begriff der Ereignisreihe ein, dem in unseren Betrachtungen eine grundlegende Bedeutung zu kommt:

Erklärung 10. Ist $\{A_n\}$ $(n = \ldots, p-1, p, p+1, \ldots)$ eine Folge materieller Punkte *) und $\{\alpha_n\}$ $(n = \ldots, p-1, p, p+1, \ldots)$ eine Folge augenblicklicher Ereignisse; findet α_n in A_n statt $(n = \ldots, p-1, p, p+1, \ldots)$ und knüpft sich α_n in A_n an α_{n-1} an $(n-1, n = \ldots, p-1, p, p+1, \ldots)$, dann werden wir die Folge $\{\alpha_n\}$ $(n = \ldots, p-1, p, p+1, \ldots)$ kurz *Ereignisreihe* nennen und mit $[\ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots]$ oder, falls die Bezeichnung eindeutig ist, mit $[\ldots, \dot{A}_{p-1}, \dot{A}_p, \dot{A}_{p+1}, \ldots]$ bezeichnen.

Erklärung 11. Von der Ereignisreihe $[\ldots, \dot{A}_{p-1}, \dot{A}_p, \dot{A}_{p+1}, \ldots]$ werden wir sagen dass sie von der Folge $\{A_n\}$ $(n = \ldots, p-1, p, p+1, \ldots)$ *getragen* wird. — Gibt es unter den n ein kleinstes, $n = r$, so werden wir A_r den *Anfangspunkt*, α_r das *Anfangsereignis* dieser Ereignisreihe nennen; gibt es unter den n ein grösstes $n = s$, so werden wir A_s ihren *Endpunkt*, α_s ihr *Endereignis* nennen. — Hat eine Ereignisreihe ein Anfangs- und ein Endereignis, so werden wir sie eine *endliche*, sonst eine *unendliche* Ereignisreihe nennen. Hat eine unendliche Ereignisreihe kein Anfangsereignis, so werden wir sie *anfangslos* nennen, hat sie kein Endereignis, so werden wir sie *endlos* nennen.

Da es sich als zweckmässig erweist, in der Bezeichnung eines augenblicklichen Ereignisses, das als Endereignis einer Ereignisreihe aufgefasst werden kann, die Bestandteile dieser Ereignisreihe hinzuzuschreiben, führen wir die folgende Bezeichnung ein: Ist α_n das Endereignis der Ereignisreihe $[\ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p]$, die von der Folge $\{A_n\}$ $(n = \ldots, p-1, p)$ getragen wird, so werde das augen-

*) Nach der Bezeichnungsweise, an die wir uns in der vorliegenden Arbeit halten werden, kann diese Folge endlich oder unendlich sein. Besteht irgend ein Ausdruck aus unendlich vielen Elementen, so werden wir es ausdrücklich erwähnen.

blickliche Ereignis α_p mit ... $A_{p-1}\,\alpha_{p-1}\,A_p\,\alpha_p$ bezeichnet. Ebenso werde die Erscheinung von α_p in einem materiellen Punkte B mit ... $A_{p-1}\,\alpha_{p-1}\,A_p\,\alpha_p\,B$ bezeichnet. — Falls keine Verwechslungen geschehen können, werden wir, in Übereinstimmung mit der schon eingeführten Bezeichnung, die Zeichen für augenblickliche Ereignisse teilweise oder ganz weglassen, indem wir über jeden links neben einem weggelassenen Zeichen stehenden lateinischen Buchstaben einen Punkt setzen. Also z. B.: $\dot{A}\dot{B}$ statt $A\alpha B\beta$, $\dot{A}\dot{B}C$ statt $A\alpha B\beta C$, $\dot{A}_1\,\dot{A}_2\ldots\dot{A}_n$ statt $A_1\alpha_1A_2\alpha_2\ldots A_n\,\alpha_n$, $A_m a_1 A_{m+1}\alpha_2\ldots\dot{A}_n\dot{A}_{n+1}\ldots\dot{A}_{p-1}A_p$ statt $A_m\,\alpha_1\,A_{m+1}\,\alpha_2\ldots A_n\,\beta_1\,A_{n+1}\beta_2\ldots A_{p-1}\beta_{p-n}A_p$ usw.

Schliesslich führen wir eine noch kürzere Bezeichnung für den Fall ein, dass eine Gruppe von Zeichen mehrmals hintereinander vorkommt. Wir schliessen eine solche Gruppe in Klammern ein und fügen die obere und untere Grenze hinzu, zwischen denen ein Index variiert, der die Elemente der Gruppe durchläuft. Also z. B.: $[\ldots,\dot{P},\ldots,(\dot{A},\dot{A})_1^n,\dot{A},\ldots,\dot{Q}]$ statt $[\ldots,\dot{P},\ldots,\underbrace{\dot{A},\dot{B}}_{1},\underbrace{\dot{A},\dot{B}}_{2},\ldots,\underbrace{\dot{A},\dot{B}}_{n},\dot{A},\ldots,\dot{Q}]$, $[(\dot{A},\dot{B})_{-\infty}^m]$ statt $[\ldots,\underbrace{\dot{A},\dot{B}}_{m-1},\underbrace{\dot{A},\dot{B}}_{m}]$ (wenn es sich um eine anfangslose Ereignisreihe handelt) und ebenso: $\dot{A}\ldots(\dot{M}\dot{N})_m^n\ldots\dot{P}$ statt $\dot{A}\ldots\underbrace{\dot{M}\dot{N}}_{m}\underbrace{\dot{M}\dot{N}}_{m+1}\ldots\underbrace{\dot{M}\dot{N}}_{n}\ldots\dot{P}$, $(\dot{A}\dot{B})_1^n\,A$ statt $\underbrace{\dot{A}\dot{B}}_{1}\underbrace{\dot{A}\dot{B}}_{2}\ldots\underbrace{\dot{A}\dot{B}}_{n}A$.

B e m e r k u n g e n. Zwei benachbarte Elemente einer Folge materieller Punkte, die eine Ereignisreihe tragt, sind stets zwei verschiedene materielle Punkte; sonst können in einer Ereignisreihe die materiellen Punkte in irgend einer Weise wiederholt vorkommen. — Irgend eine Gruppe aufeinanderfolgender augenblicklichen Ereignisse einer Ereignisreihe macht wieder eine Ereignisreihe aus. — Ist das Endereignis einer Ereignisreihe zugleich das Anfangsereignis einer anderen Ereignisreihe, so bilden die beiden Ereignisreihen eine einzige.

Vorübergehend erwähnen wir einen Satz, der aus dem Axiom IV unmittelbar folgt:

S a t z 7. Ist $A, B, \ldots, N$ irgend eine Folge materieller Punkte und findet in A ein augenblickliches Ereignis $\dot{A}$ statt, dann besteht die Ereignisreihe $[\dot{A},\dot{B},\ldots,\dot{N}]$.

Im Anschluss an den Begriff der Ereignisreihe führen wir noch zwei Begriffe ein, denen ebenfalls eine grundlegende Bedeutung zukommt: die augenblickliche Vereinigung zweier materiellen Punkte und die augenblickliche Konjunktion materieller Punkte in Bezug auf einen materiellen Punkt.

Erklärung 12. Sind A und B zwei verschiedene materielle Punkte und besteht für ein augenblickliches Ereignis $\dot{A}$ die Beziehung $\dot{A}\dot{B}A = \dot{A}$, dann werden wir sagen, dass A *im Augenblick „$\dot{A}$" mit B vereinigt ist*; in Zeichen: $(A, B)\,\dot{A}$.

Die Tatsache, dass ein materieller Punkt in einem Augenblicke mit einem anderen materiellen Punkte vereinigt ist, werden wir eine augenblickliche Vereinigung nennen.

Bemerkung. Damit wird bloss auf Grund unserer sichtbaren Ereignisse, erscheinungsmässig, das „Zusammenfallen" und „Zusammentreffen" materieller Punkte definiert. Unser Begriff deutet zunächst auf eine augenblickliche Tatsache hin, da noch überhaupt von keiner Dauer die Rede sein kann. Wesentlich ist, dass die Vereinigung zweier materiellen Punkte durch Ereignisse bedingt ist, die in beiden materiellen Punkten stattfinden müssen.

Erklärung 13. Erscheinen alle augenblicklichen Ereignisse einer Ereignisreihe $[\ldots, \dot{M}, \dot{N}]$ gleichzeitig in einem materiellen Punkte P, dann werden wir sagen, dass *die materiellen Punkte dieser Ereignisreihe in Bezug auf P, im Augenblicke „$\dot{N}P$" (oder „$\dot{M}P$", usw) in Konjunktion sind*; in Zeichen: $[\ldots, \dot{M}, \dot{N}]\,P$.

Die Tatsache, dass gewisse materielle Punkte, in Bezug auf einen materiellen Punkt in einem Augenblicke in Konjunktion sind, werden wir eine augenblickliche Konjunktion nennen.

Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, führen wir noch die folgende Bezeichnung ein: Ist in einer Konjunktion $[\ldots, \dot{L}, \dot{M}, \ldots, \dot{N}]\,P$ der materielle Punkt L, oder N, im betreffenden Augenblicke $\dot{L}$, bzw. $\dot{N}$, mit dem nächsten materiellen Punkte M, bzw. P nicht vereinigt, dann werden wir das Zeichen „;" einsetzen und $[\ldots, \dot{L}; \dot{M}, \ldots, \dot{N}]\,P$ bzw. $[\ldots, \dot{L}, \dot{M}, \ldots, N;]\,P$ schreiben. So bedeutet z. B. $[\dot{A}; \dot{B};]\,C$, dass wohl $[\dot{A}, \dot{B}]\,C$, aber weder $(A, B)\,\dot{A}$, noch $(B, C)\,\dot{B}$ ist.

B e m e r k u n g. Die augenblicklichen Ereignisse einer Ereignisreihe erscheinen in jedem materiellen Punkte in einer gewissen zeitlichen Anordnung, die im allgemeinen nur für diesen materiellen Punkt gilt. Erscheinen alle augenblicklichen Ereignisse einer Ereignisreihe gleichzeitig in einem materiellen Punkte, so ist das ein besonderer Umstand, der bei den Punkten einer „geraden Linie" vorkommt, falls man diese durch das Licht begründet denkt. — Die Vereinigung und die Konjunktion haben in unserer Darstellung die Bedeutung einer t o p o l o g i s c h e n und einer p r o j e k t i v e n Elementarbeziehung. Später soll noch eine dritte, die „m e t r i s c h e Elementarbeziehung "($\dot{A}\dot{B}A = \dot{A}\dot{C}A$) hinzukommen, die aber eine „stetige Zeit" voraussetzt. — Die augenblicklichen Vereinigungen und Konjunktionen bieten uns die Elemente für eine erscheinungsmässige Begründung der B e w e g u n g s b e g r i f f e. Wir können, natürlich, im allgemeinen von keiner Bewegung als einem stetigen Vorgange sprechen. Ist aber ein materieller Punkt P in gewissen Augenblicken „αP", „βP", „γP", ... mit gewissen materiellen Punkten A, B, C, ... vereinigt und ist z. B. $\alpha P < \beta P < \gamma P < \ldots$, dann kann gesagt werden: P b e w e g t s i c h, erstens von A zu B, dann von B zu C usw." Von der ganzen Bewegung bestehen also nur augenblickliche „Zeichen", die Vereinigungen bedeuten. Ähnlich können auch die augenblicklichen Konjunktionen als gewisse „Bewegungszeichen" aufgefasst werden.

7. Axiome der Homogenität.

Die Axiome dieser Gruppe begründen gewisse Beziehungen, die das Stattfinden und das Erscheinen augenblicklicher Ereignisse in m e h r e r e n materiellen Punkten miteinander verknüpfen. Man kann sagen, dass die gedachte Mannigfaltigkeit erst durch diese Axiome „h o m o g e n" in allen ihren materiellen Punkten wird.

V 1. *Findet in einem materiellen Punkte ein augenblickliches Ereignis α früher als ein augenblickliches Ereignis β statt, dann erscheint in jedem materiellen Punkte α früher als β.*

Finden in einem materiellen Punkte gleichzeitig zwei augenblickliche Ereignisse α und β statt, dann erscheinen in jedem materiellen Punkte α und β gleichzeitig.

B e m e r k u n g e n. Der erste Teil dieses Axioms kann auch so ausgesprochen werden: Findet in einem materiellen Punkte ein augenblickliches Ereignis α später als ein augenblickliches Ereignis β statt, dann erscheint in jedem materiellen Punkte α später als β. — Das Axiom VI bringt in erster Reihe jene Erfahrungstatsache zum Ausdrucke, die als eine Art zeitlicher Homogenität der „Lichtausbreitung" aufgefasst werden kann und die darin besteht, dass sich zwei „Lichtstrahlen", die aus einem und demselben materiellen Punkte in verschiedenen Augenblikken ausgehen und „durch den Raum dahineilen", nie gegenseitig überholen. Zugleich ist damit die Tatsache, dass die Zeit überall dieselbe „Richtung" hat, umfasst. Mit anderen Worten, die zu den Erscheinungen α und β hinzugedachten „Kugeln" der Lichtausbreitung bleiben in konstanten topologischen Beziehungen zu einander. Von anderen Möglichkeiten, die in der allgemeinen Relativitätstheorie vorkommen können und die dem Axiome V 1 widersprechen würden, wird ebenfalls abgesehen.

V 2. *Findet in einem materiellen Punkte A ein augenblickliches Ereignis α statt und knüpft sich an α in einem anderen materiellen Punkte B ein augenblickliches Ereignis β an, dann erscheint β in irgend einem materiellen Punkte C nicht früher als α.*

B e m e r k u n g. Das Axiom V 2 enthält jene Grundeigenschaften der „Lichtausbreitung", die man als Fortpflanzung des Lichtes längs „g e r a d e r L i n i e n" und als E n d l i c h k e i t der Lichtgeschwindigkeit aufzufassen pflegt.

V 3. *Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ drei bestimmte augenblickliche Ereignisse und ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, A$ zugleich, dann ist B im Augenblicke „$\dot{B}$" vereinigt mit C.*

B e m e r k u n g. Um den Sinn des Axioms V 3 anschaulich zu deuten, sei bemerkt, dass ihm in der Elementargeometrie jener Satz entspricht, welcher besagt: Sind A, *B*, *C* drei Punkte und liegt *B* zwischen *A* und *C*, dann liegt nicht *C* zwischen *B* und *A*, sei es denn, dass *B* und *C* zusammenfallen, was schon durch eine zweckmässige Erklärung des Wortes „zwischen" ausgeschlossen wird.

V 4. *Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$ vier bestimmte augenblickliche Ereignisse,*

ist $[\dot{A}, \dot{B};]\, C$ und $[\dot{B}; \dot{C}]\, D$, dann ist stets $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$;

ist $[\dot{A}; \dot{B}]\, C$ *und* $[\dot{A}; \dot{B}\,]\, D$ *dann ist* $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$ *oder* $[\dot{A}, \dot{D}]\, C$;

ist $[\dot{A}, \dot{C};] D$ *und* $[\dot{B}, \dot{C};]\, D$ *dann ist* $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ *oder* $[\dot{B}, \dot{A}]\, C$;

ist $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$ *und* $[\dot{A}, \dot{B}\,]\, D$ *dann ist* $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ *oder* $[\dot{A}, \dot{C}]\, B$.

Bemerkungen. Das Axiom V 4 führt in die betrachtete Mannigfaltigkeit eine gewisse Gleichförmigkeit ein, welche die „gerade Linie" auszeichnet. Der Satz aus der Elementargeometrie, der ihm einigermassen entspricht, lautet: Vier Punkte, die auf einer Geraden liegen, können stets mit A, B, C, D bezeichnet werden, so dass B zwischen A und C und auch zwischen A und D, und ferner C zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt. Den Axiomen V 3 und 4 entsprechen also in der Elementargeometrie grundlegende Tatsachen der linearen Anordnung. — Um das Axiom V 4 besser zu veranschaulichen, können wir die vier Fälle die es enthält, der Reihe nach durch *a*), *b*), *c*), *d*) in der nebenstehenden Figur symbolisieren. Zu *e*) und *f*) gehören zwei Fälle, die mit alleiniger Hilfe der Axiome I — V 2 bewiesen werden können (siehe Satz 30). So ist auch ersichtlich, warum in den Fällen *a*), *b*), *c*) gefordert wird, dass B mit C, bzw. A mt B, bzw. C mit D nicht vereinigt sei: weil sonst die vier Punkte der entsprechenden Figur nicht auf einer Geraden zu liegen brauchten.

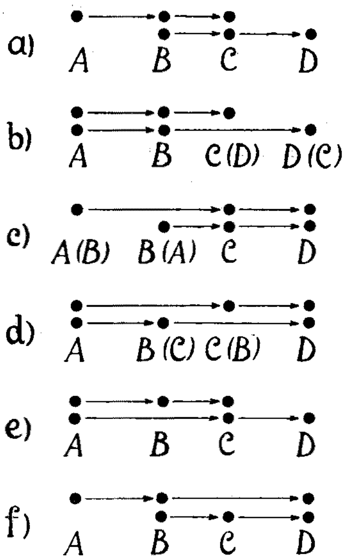

Fig. 1.

8. Einige Folgerungen aus den Axiomen I bis V 2.

Aus den Axiomen I — V 2 folgen zunächst die nachstehenden Sätze:

Erstens, eine Umkehrung des Axioms V 1:

Satz 8. Finden die augenblicklichen Ereignisse α und β in einem und demselben materiellen Punkte A statt und ist $\alpha P <$,

$>$ oder $=\beta P$ in einem materiellen Punkte P, dann ist ebenfalls $A\alpha<$, bzw. $>$, bzw. $=A\beta$.

Beweis. Es sei z. B. $\alpha P<\beta P$. Wäre nicht $A\alpha<A\beta$, so wäre nach VI nicht $\alpha P<\beta P$. Ähnlich in den beiden anderen Fällen.

Also besteht der folgende allgemeine Satz:

Satz 9. Finden die augenblicklichen Ereignisse α und β in einem und demselben materiellen Punkte A statt und ist $\alpha P<$, $>$ oder $=\beta P$ in einem materiellen Punkte P, dann ist $\alpha Q<$, bzw. $>$, bzw. $=\beta Q$ in jedem materiellen Punkte Q.

Beweis. Nach Satz 8 gilt Satz 9, falls $Q\equiv A$ ist; nach V 1 gilt er folglich allgemein.

Satz 10. Ist $\ldots \dot{P}\dot{Q}A<$, $>$ oder $=\ldots \dot{R}\dot{S}A$ und ist B irgend ein materieller Punkt, so ist auch $\ldots \dot{P}\dot{Q}\dot{A}B<$, bzw. $>$, bzw. $=\ldots \dot{R}\dot{S}\dot{A}B$, und umgekehrt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Axiomen IV, V 1 und dem Satze 8.

Bemerkung. Auf Grund der Erklärung 10 und des Satzes 10 folgt die nachstehende Regel, die in den Beweisen oft angewendet wird:

Ist z. B. $\dot{P}\ldots \dot{Q}A<$, $>$ oder $=\dot{R}\ldots \dot{S}A$, dann darf: 1. auf einer oder auf beiden Seiten der erste Buchstabe fortgelassen werden; 2. ein neuer Buchstabe links vorgesetzt werden, falls die damit bezeichnete Ereignisreihe existiert (z. B.: $\dot{M}\dot{P}\ldots QA<$ $<\dot{R}\ldots \dot{S}A$); rechts, auf beiden Seiten der Beziehung, ein und derselbe Buchstabe hinzugefügt werden; 4. falls $Q\equiv S$, der letzte Buchstabe A fortgelassen werden.

Aus dem Axiome V 2 folgen erstens Sätze die entstehen, wenn man $C\equiv A$ oder $C\equiv B$ setzt (infolge der Erklärung 9 kann nicht $A\equiv B$ sein). Ist $C\equiv B$, so besagt das Axiom V 2 dass $\dot{A}\dot{B}\geqq \dot{A}B$, was schon in der Erklärung 9 enthalten ist. Der Fall das $C\equiv A$ ist, bringt hingegen etwas neues; wir drücken ihn im folgenden Satze aus:

Satz 11. Findet in einem materiellen Punkte A ein augenblickliches Ereignis $\dot{A}$ statt und ist B ein anderer materieller Punkt, dann ist $\dot{A}\dot{B}A\geqq \dot{A}$.

Nun erwähnen wir drei Sätze, die als Verallgemeinerungen des Satzes 11 gelten können:

Satz 12. Sind A, B, C irgend drei materielle Punkte und findet in A ein gewisses augenblickliches Ereignis $\dot{A}$ statt, dann ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A \geq \dot{A}$.

B e w e i s. Nach Satz 11 ist $\dot{A}\dot{B}A \geq \dot{A}$ und nach V 2 ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A \geq \dot{A}\dot{B}A$, also ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A \geq \dot{A}$.

S a t z 13. Ist $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ irgend eine endliche Menge materieller Punkte und findet in A_0 ein gewisses augenblickliches Ereignis statt, dann ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2 \ldots \dot{A}_n A_0 \geq \dot{A}_0$.

B e w e i s. Nach Satz 12 ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2A_0 \geq \dot{A}_0$. Da nach V 2 $\dot{A}_2\dot{A}_3A_0 \geq \dot{A}_2\dot{A}_0$ ist, ist auch $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2\dot{A}_3A_0 \geq \dot{A}_0$; usw., bis auch A_n einbezogen wird.

S a t z 14. Ist $B, A_0, A_1, A_2, \ldots$ irgend eine, endliche oder unendliche, Menge materieller Punkte und findet ein gewisses augenblickliches Ereignis $\dot{A}_0$ in A_0 statt, dann ist $\dot{A}_0B \leq \dot{A}_0\dot{A}_1B \leq \leq \dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2B \leq \ldots$

B e w e i s. Nach V 2 ist $\dot{A}_0B \leq \dot{A}_0\dot{A}_1B$, $\dot{A}_1B \leq \dot{A}_1\dot{A}_2B$ usw., woraus Satz 14 unmittelbar folgt.

B e m e r k u n g. Der Satz 14 enthält in einer gewissen Weise den eigentlichen Sinn der Vorstellung von der Lichtausbreitung als einer allmählichen Ausbreitung im Paume. Sie beruht auf einer hinzugedachten Menge materieller Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ die eine Ereignisreihe tragt, welche dann aus einem materiellen Punkte B wahrgenommen wird. Um die Vorstellung zu vervollständigen, brauchen wir, die Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots$ nur beliebig „dicht" und auf einer „Geraden" gelegen denken.

Dem Axiom V 2 können in folgender Hinsicht zwei weitere Sätze zur Seite gestellt werden: Fasst man die Bedingung des Axioms V 2 so auf, dass zwischen z w e i augenblicklichen Ereignissen λ und μ, die in A stattfinden, und einem augenblicklichen Ereignisse ν das in B stattfindet, die Beziehungen

$$A\lambda = A\mu \quad \text{und} \quad \mu B = B\nu$$

bestehen, dann behauptet des Axiom, dass $\nu C \geq \lambda C$ ist. In A und B wird also je eine Gleichzeitigkeit vorausgesetzt. Man kann aber ebenso die Gleichzeitigkeit in B und C, oder in C und A fordern, d. h. die Bedingungen

$$\mu B = B\nu \quad \text{und} \quad \nu C = \lambda C, \quad \text{bzw.} \quad \nu C = \lambda C \quad \text{und} \quad A\lambda = A\mu$$

aufstellen und fragen ob dann etwa

$$A\lambda \geq A\mu, \quad \text{bzw.} \quad \mu B \geq B\nu$$

ist. Die zwei folgenden Sätze beantworten diese Frage:

S a t z 15. Sind A, B, C irgend drei materielle Punkte, finden in A zwei augenblickliche Ereignisse λ und μ statt und ist $A\lambda\dot{B}C = A\mu C$, dann ist $A\lambda \leq A\mu$.

B e w e i s. Nach V 2 ist $A\lambda C \leq A\lambda\dot{B}C$, also ist $A\lambda C \leq A\mu C$ und nach Satz 8 $A\lambda \leq A\mu$.

S a t z 16. Sind A, B, C irgend drei materielle Punkte, findet in A ein augenblickliches Ereignis μ, in B ein augenblickliches Ereignis ν statt und erscheinen die beiden gleichzeitig in C, dann ist $A\mu B \geq B\nu$.

B e w e i s. Nach V 2 ist $A\mu C \leq A\mu\dot{B}C$, also ist $A\mu\dot{B}C \geq B\nu C$, folglich, nach Satz 8, $A\mu B \geq B\nu$.

S a t z 17. Ist ein materieller Punkt A im Augenblicke da ein augenblickliches Ereignis φ in A erscheint, vereinigt mit einem materiellen Punkte B und erscheint in A ein augenblickliches Ereignis ψ früher, oder später als φ, oder gleichzeitig mit φ, dann erscheint ψ auch in B früher, bzw. später als φ, bzw. gleichzeitig mit φ.

B e w e i s. Ist $\varphi A < \psi A$, so ist, da $\varphi\dot{A}\dot{B}A = \varphi\dot{A}$ ist, $\varphi\dot{A}\dot{B}A < < \psi A$. Nach V 2 ist $\psi A \leq \psi\dot{B}A$ und $\varphi B \leq \varphi\dot{A}B$, also ist $\varphi\, \dot{A}\dot{B}A < < \psi\dot{B}A$, folglich, nach V 1, $\varphi\dot{A}B < \psi B$, also $\varphi B < \psi B$. Ähnlich beweist man den Fall dass $\varphi A > \psi A$ ist; aus beiden Fällen folgt dann unmittelbar der dritte.

9. Sätze über augenblickliche Vereinigungen materieller Punkte.

Eine grundlegende Eigenschaft der Vereinigung zweier materieller Punkte drückt der folgende Satz aus:

S a t z 18. Ist ein materieller Punkt A in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}$" vereinigt mit einem materiellen Punkte B, dann ist B im Augenblicke „$\dot{A}B$" vereinigt mit A.

B e w e i s. Aus $\dot{A} = \dot{A}\dot{B}A$ folgt nach Axiom IV und Satz 11 $\dot{A}B = \hat{A}\dot{B}\dot{A}B$ Setzen wir $\dot{A}B = \dot{B}$, so ist also $\dot{B} = \dot{B}\dot{A}B$, d. h. $(BA)\,\dot{B}$.

Als Gegenstück zu Satz 18 besteht der folgende Satz:

S a t z 19. Ist ein materieller Punkt A in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}$" mit einem anderen materiellen Punkte B nicht vereinigt, dann ist $\dot{A}\dot{B}A > \dot{A}$.

B e w e i s. Da nicht $\dot{A}\dot{B}A=\dot{A}$ ist, ist nach Satz 11 $\dot{A}\dot{B}A>A$.

B e m e r k u n g. Der Satz 19 drückt in einfacher Weise die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit aus.

Wird im Axiom V 2 angenommen, dass im betreffenden Augenblicke zwei unter den drei materiellen Punkten vereinigt sind, dann bekommt man die folgenden zwei Sätze.

S a t z 20. Ist ein materieller Punkt A in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}$“ vereinigt mit einem materiellen Punkte B, dann ist in irgend einem materiellen Punkte C $\dot{A}\dot{B}C=\dot{A}C$ (d. h. $[\dot{A}, \dot{B}]C$).

B e w e i s. Da $\dot{A}\dot{B}A=\dot{A}$ ist, ist $\dot{A}\dot{B}\dot{A}C=\dot{A}C$; da nach V 2 $\dot{B}\dot{A}C\geq\dot{B}C$ ist, ist $\dot{A}\dot{B}\dot{A}C\geq\dot{A}\dot{B}C$, folglich $\dot{A}\dot{B}C\leq\dot{A}C$. Nach V 2 ist aber $\dot{A}C\leq\dot{A}\dot{B}C$, also ist $\dot{A}\dot{B}C=\dot{A}C$.

S a t z 21. Findet in einem materiellen Punkte A ein augenblickliches Ereignis $\dot{A}$ statt, ist ein materieller Punkt B im Augenblicke „$\dot{A}B$“ vereinigt mit einem materiellen Punkte C, dann ist $\dot{A}\dot{B}C=\dot{A}C$ (d. h. $[\dot{A}, \dot{B}]C$).

B e w e i s. Da $\dot{A}\dot{B}\dot{C}B=\dot{A}B$ ist und nach V 2 $\dot{A}B\leq\dot{A}\dot{C}B$, so ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}B\leq\dot{A}\dot{C}B$, also nach V 1 $\dot{A}\dot{B}C\leq\dot{A}C$. Nach V 2 ist aber $\dot{A}\dot{B}C\geq\dot{A}C$, also ist $\dot{A}\dot{B}C=\dot{A}C$.

Daran schliessen sich die beiden, im nächsten Satze enthaltenen Umkehrungen der letzten Sätze:

S a t z 22. Ist $[\dot{A}, \dot{B}]C$ (d. h. $\dot{A}\dot{B}C=\dot{A}C$) und ist $(A, C)\dot{A}$, oder $(C, A)\dot{A}C$, dann ist $(A, B)\dot{A}$.

B e w e i s. Aus $\dot{A}\dot{B}C=\dot{A}C$ und $\dot{A}\dot{C}A=\dot{A}$ folgt $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A=\dot{A}$; da nach V 2 $\dot{B}\dot{C}A\geq\dot{B}A$ ist, ist $\dot{A}\dot{B}A\leq\dot{A}$. Nach Satz 11 ist aber $\dot{A}\dot{B}A\geq\dot{A}$ also ist $\dot{A}\dot{B}A=\dot{A}$. — Wird $(C, A)\dot{A}C$ vorausgesetzt, d. h. $\dot{A}\dot{C}\dot{A}C=\dot{A}C$, so ist nach V 1 $\dot{A}\dot{C}A=\dot{A}$, d. h. $(A, C)\dot{A}$ und wir haben den vorigen Fall.

Der folgende Satz drückt die Transitivität der Vereinigung materieller Punkte aus:

S a t z 23. Ist ein materieller Punkt A in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}$“ vereinigt mit zwei verschiedenen materiellen Punkten B und C, dann ist B im Augenblicke „$\dot{A}B$“ vereinigt mit C.

B e w e i s. Nach V 2 ist $\dot{B}C\leq\dot{B}\dot{A}C$ und $\dot{C}B\leq\dot{C}\dot{A}B$, für beliebige Anfangsereignisse $\dot{B}$ und $\dot{C}$. Also ist, nach Zusammensetzung der beiden Beziehungen, $\dot{B}\dot{C}B \leq B\dot{A}\dot{C}\dot{A}B$, folglich ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}B \leq \dot{A}\dot{B}\dot{A}\dot{C}\dot{A}B$, wo das Anfangsereignis, das im Satze gemeinte ist. Da $\dot{A}\dot{B}A = A$ ist, ist $\dot{A}\dot{B}\dot{A}\dot{C}\dot{A}B = \dot{A}\dot{C}\dot{A}B$ und da $\dot{A}\dot{C}A = \dot{A}$ ist, ist $\dot{A}\dot{C}\dot{A}B = \dot{A}B$, also $\dot{A}\dot{B}\dot{C}B \leq \dot{A}B$. Nach V 2 ist aber $\dot{A}\dot{B}CB \geq \dot{A}B$, also ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}B = \dot{A}B$, was eben unser Satz behauptet.

Aus Satz 23 ergeben sich unmittelbar die folgenden zwei Sätze:

S a t z 24. Sind A_0, A_1, A_2, ... untereinander verschiedene materielle Punkte und ist A_0 in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}_0$" vereinigt mit A_n ($n = 1, 2, \ldots$), dann ist überhaupt A_i im Augenblicke „$\dot{A}_0 A_i$" vereinigt mit A_k ($i, k = 0, 1, 2, \ldots$; $i \neq k$).

S a t z 25. Ist A_0, A_1, A_2, ... irgend eine Menge materieller Punkte, ist A_0 in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}_0$" vereinigt mit A_1, ist A_1 im Augenblicke „$\dot{A} A_1$" vereinigt mit A_2 usw., dann ist überhaupt A_i im Augenblicke „$\dot{A}_0 A_i$" vereinigt mit A_k ($i, k = 0, 1, 2, \ldots$), inwiefern A_i verschieden von A_k ist.

Die folgenden drei Sätze bestimmen näher jene Beziehungen, die in den Sätzen 12, 13 und 14 festgestellt werden.

S a t z 26. Ist ein materieller Punkt A in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}$" vereinigt mit zwei verschiedenen materiellen Punkten B und C, dann ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A = \dot{A}$. Ist hingegen A im Augenblicke „$\dot{A}$" nicht zugleich mit B und mit C vereinigt, dann ist $\dot{A}B\dot{C}A > \dot{A}$.

B e w e i s. Nach V 2 ist $\dot{A}\dot{B}C \leq \dot{A}\dot{B}\dot{A}C$. Da $\dot{A}\dot{B}A = \dot{A}$ ist, ist nach V 1 $\dot{A}\dot{B}\dot{A}C = \dot{A}C$, also $\dot{A}\dot{B}C \leq \dot{A}C$. Nach V 2 ist aber $\dot{A}\dot{B}C \geq \dot{A}C$, also ist $\dot{A}\dot{B}C = \dot{A}C$, folglich, nach V 2, $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A = \dot{A}\dot{C}A$. Da aber $\dot{A}\dot{C}A = \dot{A}$ ist, ist $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A = \dot{A}$. — Ist hingegen $\dot{A}\dot{B}A > \dot{A}$, so ist, da nach V 2 $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A \geq \dot{A}\dot{B}A$ ist, $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A > \dot{A}$. Ist $\dot{A}\dot{C}A > \dot{A}$, so ist, da nach V 2 $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A \geq \dot{A}\dot{C}A$ ist, wieder $\dot{A}\dot{B}\dot{C}A > \dot{A}$.

S a t z 27. Ist A_0, A_1, A_2, ..., A_n irgend eine Menge materieller Punkte und ist A_0 in einem gewissen Augenblicke „$\dot{A}_0$" vereinigt mit allen übrigen Elementen dieser Menge, dann ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2 \ldots \dot{A}_n A_0 = \dot{A}_0$. Ist hingegen A_0 im Augenblicke „$\dot{A}_0$" nicht vereinigt mit allen diesen materiellen Punkten, dann ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2 \ldots \dot{A}_n A_0 > \dot{A}_0$.

Beweis. Nach dem Satze 26 ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2A_0 =$ oder $> \dot{A}_0$, je nachdem ob $(A_0, A_1)\, \dot{A}_0$ und $(A_0, A_2)\, \dot{A}_0$ ist, oder nicht. Im ersten Falle ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2\dot{A}_3A_0 = \dot{A}_0\dot{A}_3A_0$, also $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2\dot{A}_3A_0 =$ oder $> \dot{A}_0$, je nachdem, ob auch $(A_0, A_3)\, \dot{A}_0$ ist oder nicht. Also ist $\dot{A}_0\dot{A}_1\dot{A}_2\dot{A}_3A_0 =$ oder $> \dot{A}_0$, je nachdem, ob A_0 im Augenblicke „$\dot{A}_0$" zugleich vereinigt mit A_1, A_2 und A_3 ist oder nicht. Durch Wiederholung derselben Betrachtungen wird der Satz bewiesen.

10 Sätze über augenblickliche Konjunktionen materieller Punkte.

Im Axiom V 3 wird die Existenz zweier Konjunktionen $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, A$ vorausgesetzt und daraus die Vereinigung der materiellen Punkte B und C gefolgert. Ändert man in einem von den beiden Ausdrücken die Anordnung der Elemente, so gewinnt man neue Sätze, die jedoch mit alleiniger Hilfe der Axiome I — V 2 bewiesen werden können. Es bestehen insgesamt die folgenden fünf Fälle (in denen $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ drei bestimmte augenblickliche Ereignisse bezeichnen):

a) $[\dot{A}, \dot{B}]\, C, \quad [\dot{B}, \dot{C}]\, A,$

b) $[\dot{A}, \dot{B}]\, C, \quad [\dot{C}, \dot{A}]\, B,$

c) $[\dot{A}, \dot{B}]\, C, \quad [\dot{C}, \dot{B}]\, A,$

d) $[\dot{A}, \dot{B}]\, C, \quad [\dot{B}, \dot{A}]\, C,$

e) $[\dot{A}, \dot{B}]\, C, \quad [\dot{A}, \dot{C}]\, B.$

Der Fall a) ist Gegenstand des Axioms V 3; b) ebenfalls, was einleuchtet, wenn die Zeichen A und C miteinander vertauscht werden; c) kann auch ohne Vereinigungen bestehen; d) und e) liefern hingegen die zwei folgenden Sätze:

Satz 28. Sind $\dot{A}$ und $\dot{B}$ zwei bestimmte augenblickliche Ereignisse, C ein materieller Punkt, und ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{B}, \dot{A}]C$ zugleich, dann ist $(A, B)\, \dot{A}$.

Beweis. Da einerseits $\dot{A}B = \dot{B}$, anderseits $\dot{B}A = \dot{A}$ ist, ist $\dot{A}\dot{B}A = \dot{A}$, d. h. $(A, B)\, \dot{A}$.

S a t z 29. Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ drei bestimmte augenblickliche Ereignisse und ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{A}, \dot{C}]\, B$ zugleich, dann ist $(B, C)\, \dot{B}$.

B e w e i s. Da $\dot{A}B = \dot{B}$, $\dot{A}C = \dot{B}C$, $\dot{A}C = \dot{C}$ und $\dot{A}B = \dot{C}B$ ist, so ist $\dot{C} = \dot{C}B$, $\dot{B} = \dot{C}B = \dot{B}\dot{C}B$, d. h. $(B, C)\, \dot{B}$.

B e m e r k u n g. Den Sätzen 28 und 29 entspricht in der Elementargeometrie (ebenso wie dem Axiom V 3) jener Satz, welcher besagt, dass unter drei Punkten nur einer zwischen den beiden anderen liegen kann.

Im nächsten Satze sprechen wir die in der Figur 1 unter e) und f) angedeuteten zwei Fälle aus, die den Behauptungen des Axioms V 4 analog sind und auf Grund der Axiome I — V 2 bewiesen werden können:

S a t z 30. Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ drei bestimmte augenblickliche Ereignisse und bestehen entweder die Beziehungen $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$ oder die Beziehungen $[\dot{A}, \dot{B}]\, D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$, dann bestehen zugleich alle diese vier Beziehungen.

B e w e i s. Ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$, d. h. $\dot{A}B = \dot{B}$, $\dot{A}C = \dot{B}C$, $\dot{A}C = \dot{C}$, $\dot{A}D = \dot{C}D$, so ist erstens $\dot{B}C = \dot{C}$, zweitens ist nach V 2 $\dot{B}D \leq \dot{B}\dot{C}D$, d. h. $\dot{B}D \leq \dot{C}D$, drittens ist $\dot{C}D = \dot{A}D \leq \dot{A}\dot{B}D$, d. h. $\dot{C}D = \dot{A}D \leq \dot{B}D$. Also ist $\dot{C}D = \dot{A}D = \dot{B}D$. Aus $\dot{B}D = \dot{C}D$ und $\dot{B}C = \dot{C}$ folgt $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$ und aus $\dot{A}D = \dot{B}D$ und $\dot{A}B = \dot{B}$ folgt $[\dot{A}, \dot{B}]\, D$.

Ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$, d. h. $\dot{A}B = \dot{B}$, $\dot{A}D = \dot{B}D$, $\dot{B}C = \dot{C}$, $\dot{B}D = \dot{C}D$, so ist erstens $\dot{A}D = \dot{C}D$, zweitens ist wegen $\dot{A}C \leq \dot{A}\dot{B}C$, $\dot{A}\dot{C}D \leq \dot{A}\dot{B}\dot{C}D = \dot{C}D$, also wegen $\dot{A}D \leq \dot{A}\dot{C}D$, $\dot{A}D \leq \dot{C}D$. Da $\dot{A}D = \dot{C}D$ ist, ist $\dot{A}C = \dot{A}\dot{B}C$ und $\dot{A}D = \dot{A}\dot{C}D$, d. h. $\dot{A}C = \dot{B}C$ und $\dot{A} = \dot{A}C$. Aus $\dot{A}C = \dot{B}C$ und $\dot{A}B = \dot{B}$ folgt $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und aus $\dot{A} = \dot{A}C$ und $\dot{A}D = \dot{C}D$ folgt $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$.

Eine besondere Gruppe von Sätzen entsteht, wenn in den 6 Fällen, die im Axiom V 4 und dem Satze 30 enthalten sind, Vereinigungen unter den materiellen Punkten vorkommen. Wir werden in diese Sätze nicht eingehen. Es sei nur erwähnt, dass sie alle ohne V 3 und 4 bewiesen werden können, mit Ausnahme eines einzigen, der des Axioms V 3 bedarf und der folgendermassen lautet:

Satz 31. Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ drei bestimmte augenblickliche Ereignisse, ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$ und ist $(A, D)\, \dot{A}$ oder $(D, A) \dot{B}D$, dann ist $(B, C)\, \dot{B}$.

Beweis. Ist $(A, D)\, \dot{A}$, so ist $\dot{A}B = \dot{A}\dot{D}\dot{A}B$, also nach V 2 $\dot{A}B \geqq \dot{A}\dot{D}B$, und da nach V 2 $\dot{A}B \leqq \dot{A}\dot{D}B$ ist, ist $\dot{A}B = \dot{A}\dot{D}B$. Schreiben wir $\dot{A}D = \dot{D}$, dann ist, da $\dot{A}B = \dot{B}$ ist, $\dot{B} = \dot{D}B$. Ähnlich folgt aus $\dot{A}C = \dot{A}\dot{D}\dot{A}C$ zunächst $\dot{A}C \geqq \dot{A}\dot{D}C$, dann $\dot{A}C = \dot{A}\dot{D}C$; da $\dot{A}C = \dot{B}C$ ist, ist also $\dot{B}C = \dot{D}C$, was mit $\dot{B} = \dot{D}B$ die Beziehung $[\dot{D}, \dot{B}]\, C$ bildet. Also ist $[\dot{D}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$ zugleich, folglich ist nach V 3 $(B, C)\, \dot{B}$.

Ist $(D, A)\, \dot{B}D$, so ist $\dot{B}D = \dot{B}\dot{D}\dot{A}D$, also nach V 2 $\dot{B}D \geqq \dot{B}\dot{A}D$, und da nach V 2 $\dot{B}D \leqq \dot{B}\dot{A}D$ sein muss, $\dot{B}D = \dot{B}\dot{A}D$. Da $\dot{B}D = \dot{C}D$ ist, ist auch $\dot{C}D = \dot{C}\dot{D}\dot{A}D$, also beweist man ähnlich, dass $\dot{C}D = \dot{C}\dot{A}D$ ist. Wegen $\dot{B}C = \dot{C}D$ ist also $\dot{B}\dot{A}D = \dot{C}\dot{A}D$, folglich, nach V 1, $\dot{B}A = \dot{C}A$, was mit $\dot{A}B = \dot{B}$ die Beziehung $[\dot{B}, \dot{C}] A$ bildet. Also ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, A$ zugleich, folglich ist nach V 3 $(B, C)\, \dot{B}$.

Der nächste Satz stellt einigermassen eine Ergänzung zu Axiom V 4 und Satz 30 dar. Zu seinem Beweise genügen die Axiome I — V 2:

Satz 32. Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ drei bestimmte augenblickliche Ereignisse und bestehen irgend drei unter den vier Beziehungen

$$[\dot{A}, \dot{B}]\, C, \quad [\dot{A}, \dot{B}]\, D, \quad [\dot{A}, \dot{C}]\, D, \quad [\dot{B}, \dot{C}]\, D,$$

dann bestehen alle diese vier Beziehungen und es ist auch $[\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}]\, D$.

Beweis. Es bestehen vier verschiedene Fälle:

1. Ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$, $[\dot{A}, \dot{B}]\, D$ und $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$, so folgt aus dem ersten und dem dritten Ausdrucke: $\dot{A}C = \dot{B}C$, $\dot{A}C = \dot{C}$, also $\dot{B}C = \dot{C}$, und aus dem zweiten und dritten: $\dot{A}D = \dot{B}D$, $\dot{A}D = \dot{C}D$, also $\dot{B}D = \dot{C}D$, was mit $\dot{B}C = \dot{C}$ den Ausdruck $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$ bildet.

2. Ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$, $[\dot{A}, \dot{B}]\, D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\, D$, so folgt aus dem er-

sten und dem dritten Ausdrucke: $\dot{A}C=\dot{B}C$, $\dot{B}C=\dot{C}$, also $\dot{A}C=\dot{C}$, und aus dem zweiten und dritten: $\dot{A}D=\dot{B}D$, $\dot{B}D=\dot{C}D$, also $\dot{A}D=\dot{C}D$, was mit $\dot{A}C=\dot{C}$ den Ausdruck $[\dot{A}, \dot{C}]\,D$ bildet.

3. Ist $[\dot{A}, \dot{B}]\,C$, $[\dot{A}, \dot{C}]\,D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\,D$, so folgt aus dem ersten Ausdrucke $\dot{A}B=\dot{B}$ und aus dem zweiten und dritten: $\dot{A}D=\dot{C}D$, $\dot{B}D=\dot{C}D$, also $\dot{A}D=\dot{B}D$, was mit $\dot{A}B=\dot{B}$ den Ausdruck $[\dot{A}, \dot{B}]\,D$ bildet.

4. Ist $[\dot{A}, \dot{B}]\,D$, $[\dot{A}, \dot{C}]\,D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\,D$, so folgt aus dem ersten Ausdrucke $\dot{A}B=\dot{B}$ und aus dem zweiten und dritten: $\dot{A}C=\dot{C}$, $\dot{B}C=\dot{C}$, also $\dot{A}C=\dot{B}C$, was mit $\dot{A}B=\dot{B}$ den Ausdruck $[\dot{A}, \dot{B}]\,C$ bildet.

Also bestehen in jedem Falle alle vier Ausdrücke. Wir fassen nun ins Auge nur $[\dot{A}, \dot{B}]\,D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\,D$. Daraus folgt einerseits $\dot{A}B=\dot{B}$, $\dot{B}C=\dot{C}$, anderseits $\dot{A}D=\dot{B}D=\dot{C}D$, also ist $[\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}]\,D$.

Aus Satz 30 ergibt sich die folgende Umkehrung des vorigen Satzes:

S a t z 33. Ist $[\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}]\,D$, so ist $[\dot{A}, \dot{B}]\,C$, $[\dot{A}, \dot{B}]\,D$, $[\dot{A}, \dot{C}]\,D$ und $[\dot{B}, \dot{C}]\,D$.

B e w e i s. Es ist $\dot{A}B=\dot{B}$, $\dot{A}D=\dot{B}D$, also $[\dot{A}, \dot{B}]\,D$. Ferner ist $\dot{B}C=\dot{C}$, $\dot{B}D=\dot{C}D$, also $[\dot{B}, \dot{C}]\,D$. Folglich ist nach Satz 30 auch $[\dot{A}, \dot{B}]\,C$ und $[\dot{A}, \dot{C}]\,D$.

Dem Axiom V 4 samt dem Satze 30 kann auch die folgende Wendung gegeben werden:

S a t z 34. Sind $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{D}$ vier bestimmte augenblickliche Ereignisse und bestehen irgend z w e i unter den vier Beziehungen

$$[\dot{A}; \dot{B};]\,C,\quad [\dot{A}; \dot{B}]\,D,\quad [\dot{A}, \dot{C};]\,D,\quad [\dot{B}; \dot{C};]\,D,$$

dann bestehen nach geeigneter Bezeichnung der materiellen Punkte A, B, C, D mit P, Q, R, S alle vier Beziehungen

$$(1)\qquad [\dot{P}, \dot{Q}]\,R,\quad [\dot{P}, \dot{Q}]\,S,\quad [\dot{P}, \dot{R}]\,S,\quad [\dot{Q}, \dot{R}]\,S.$$

B e w e i s. Wir bezeichnen die sechs möglichen Fälle (vier in V 4 und zwei in Satz 30) der Reihe nach mit a), b), . . . , f), wie es auch der Fig. 1 entspricht.

Im Falle a) sei $A \equiv P$, $B \equiv Q$, $C \equiv R$, $D \equiv S$. Dann gelten nach V 4 und Satz 32, 3. alle vier Beziehungen (1).

Im Falle b) ist nach V 4 $[\dot{A}, \dot{C}]\, D$ oder $[\dot{A}, \dot{D}]\, C$. Gilt das erste, so bezeichne man wie in a), gilt das zweite, so sei $A \equiv P$, $B \equiv Q$, $D \equiv R$, $C \equiv S$. Beidesmal ist Satz 32, 1. anwendbar und es bestehen alle vier Beziehungen (1).

Im Falle c) ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ oder $[\dot{B}, \dot{A}]\, C$. Gilt das erste, so bezeichne man wie in a), gilt das zweite, so sei $B \equiv P$, $A \equiv Q$, $C \equiv R$, $D \equiv S$. Beidesmal gilt der Satz 32, 2. und es bestehen alle vier Beziehungen (1).

Im Falle d) ist $[\dot{A}, \dot{B}]\, C$ oder $[\dot{A}, \dot{C}]\, B$. Gilt das erste, so bezeichne man wie in a), gilt das zweite, so sei $A \equiv P$, $C \equiv Q$, $B \equiv R$, $D \equiv S$. Beidesmal gilt der Satz 32, 1. und es bestehen alle vier Beziehungen (1).

In den Fällen e) und f) bezeichne man wie in a); nach Satz 30 gelten dann alle vier Beziehungen (1).

Die folgenden zwei Sätze können als Verallgemeinerungen des Satzes 22 gelten:

S a t z 35. Ist $[\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_{m-1}]\, A_m$ $(m > 2)$ und ist $(A_1, A_m)\dot{A}_1$, dann ist überhaupt $(A_i, A_k)\, \dot{A}_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq k)$.

B e w e i s. Da $\dot{A}\, \dot{A}_2 A_m = \dot{A}_1 A_m$ und $\dot{A}_1 \dot{A}_m A_1 = \dot{A}_1$ ist, ist $\dot{A}_1 \dot{A}_2 \dot{A}_m A_1 = \dot{A}_1 \dot{A}_m A_1 = \dot{A}_1$, also ist nach Satz 26 $(A_1, A_2)\, \dot{A}_1$ und nach Satz 23 $(A_2, A_m)\, \dot{A}_2$. Da $\dot{A}_2 \dot{A}_3 A_m = \dot{A}_2 A_m$ und $\dot{A}_2 \dot{A}_m A_2 = \dot{A}_2$ ist, ist $\dot{A}_2 \dot{A}_3 \dot{A}_m A_2 = \dot{A}_2 \dot{A}_m A_2 = \dot{A}_2$, also ist $(A_2, A_3)\, \dot{A}_2$ usw... Im ganzen ist $(A_1, A_m)\, \dot{A}_1$, $(A_2, A_m)\, \dot{A}_2, \ldots, (A_{m-1}, A_m)\, \dot{A}_{m-1}$, also nach Satz 18 $(A_m, A_1)\, \dot{A}_1 A_m$, $(A_m, A_2)\, \dot{A}_2 A_m, \ldots, (A_m, A_{m-1})\, \dot{A}_{m-1} A_m$ und da $\dot{A}_1 A_m = \dot{A}_2 A_m = \ldots = \dot{A}_{m-1} A_m$ ist, ist nach Satz 23 $(A_i, A_k)\, \dot{A}_1 \dot{A}_m A_i$, d. h. $(A_i, A_k)\dot{A}_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq k)$.

S a t z 36. Ist $[\ldots, \dot{A}_p, \dot{A}_{p+1}, \ldots, \dot{A}_{p+r}, \ldots]\, A_s$ und ist $(A_p, A_r)\dot{A}_p$, dann ist überhaupt $(A_i, A_k)\, \dot{A}_i$ $(i, k = p, p+1, \ldots, p+r;$ $i \neq k)$.

B e w e i s. Es ist $[\dot{A}_p, \dot{A}_{p+1}, \ldots, \dot{A}_{p+r-1}]\, A_{p+r}$ (weil $\dot{A}_p A_{p+1} = \dot{A}_{p+1}, \ldots$ und $\dot{A}_p A_{p+r} = \dot{A}_{p+1} A_{p+r} = \ldots$ ist) also gilt Satz 35, der die Behauptung beweist.

Die Behauptungen des Axioms V 4 können auf beliebig viele materielle Punkte verallgemeinert werden. Als Beispiel bringen wir eine Verallgemeinerung, die dem Falle a) entspricht und folgenderweise lautet:

Satz 37. Sind $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_{m-1}$ $(m>3)$ $m-1$ bestimmte augenblickliche Ereignisse, ist A_m noch ein materieller Punkt und bestehen die Beziehungen

$$(1) \qquad [\dot{A}_n, \dot{A}_{n+1};]\, A_{n+2} \quad (n=1, 2, \ldots, m-2),$$

dann bestehen alle $\binom{m}{3}$ Beziehungen

$$(2) \qquad [\dot{A}_p, \dot{A}_q]\, A_r \quad (1 \leq p<q<r \leq m).$$

Beweis. Es sei $[\dot{A}_p, \dot{A}_q]\, A_r$ irgend eine von den Beziehungen (2). Nach (1) ist im allgemeinen $[\dot{A}_p, \dot{A}_{p+1};]\, A_{p+2}$ und $[\dot{A}_{p+1}, \dot{A}_{p+2};]\, A_{p+3}$, also nach V 4 $[\dot{A}_p, \dot{A}_{p+2};]\, A_{p+3}$ und, da auch $[\dot{A}_{p+2}, \dot{A}_{p+3};]\, A_{p+4}$ ist, ist $[\dot{A}_p, \dot{A}_{p+3};]\, A_{p+4}$ usw., folglich auch $[\dot{A}_p, \dot{A}_q;]\, A_{q+1}$. Es ist anderseits nach (1) $[\dot{A}_{r-2}, \dot{A}_{r-1}]\, A_r$ und $[\dot{A}_{r-3}, \dot{A}_{r-2};]\, A_{r-1}$, also nach V 4 $[\dot{A}_{r-3}, \dot{A}_{r-2}]\, A_r$ und da auch $[\dot{A}_{r-4}, \dot{A}_{r-3};]\, A_{r-2}$ ist, ist $[\dot{A}_{r-4}, \dot{A}_{r-3}]\, A_r$ usw., folglich auch $[\dot{A}_q, \dot{A}_{q+1}]\, A_r$. Aus $[\dot{A}_p, \dot{A}_q;]\, A_{q+1}$ und $[\dot{A}_q, \dot{A}_{q+1}]\, A_r$ folgt aber nach V 4 $[\dot{A}_p, \dot{A}_q]\, A_r$.

Endlich beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 38. Sind $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_{m-1}$ $(m>2)$ $m-1$ bestimmte augenblickliche Ereignisse, sind A_m und B weitere materielle Punkte und bestehen die Beziehungen

$$(1) \qquad [\dot{A}_n, \dot{A}_{n+1};]\, A_{n+2} \quad (n=1, 2, \ldots, m-2),$$

ist ausserdem $[\dot{A}_p, \dot{A}_{p+1};]\, B$ für ein gewisses $n=p$, dann ist überhaupt

$$(2) \qquad [\dot{A}_{q_1}, \dot{A}_{q_2}]\, B \quad (1 \leq q_1<q_2 \leq p+1).$$

Ist hingegen nicht $[\dot{A}_r, \dot{A}_{r+1};]\, B$ für ein gewisses $n=r$, dann ist überhaupt nicht

$$(3) \qquad [\dot{A}_{s_1}, \dot{A}_{s_2}]\, B \quad (r \leq s_1<s_2 \leq m).$$

Beweis. Die Ausdrücke (1) für $n=1, 2, \ldots, p+1$ bilden mit $[\dot{A}_p, \dot{A}_{p+1};]\, B$ eine Menge, die der Menge (1) des Satzes 37 gleichkommt. Also bestehen nach Satz 37 die Beziehungen (1) des Satzes 38. Ebenso bilden die Ausdrücke (1) für $n = r, r+1, \ldots, m$ mit $[\dot{A}_r, \dot{A}_{r+1};]\, B$ eine Menge (1) des Satzes 37. Also bestehen nach Satz 37 die Beziehungen (3) des Satzes 38.

11. Über Ereignisreihen, die von nur zwei materiellen Punkten getragen werden.

Die folgenden Sätze beziehen sich auf Ereignisreihen $[(\dot{A}, \dot{B})_r^s]$, welche von nur zwei materiellen Punkten A und B getragen werden; dabei darf r endlich oder $-\infty$ und s endlich oder $+\infty$ vorausgesetzt werden. Solche Ereignisreihen sind gewissermassen die einfachsten und werden besonders in der Begründung der Metrik in Anwendung kommen.

Satz 39. Besteht eine Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_r^s]$ und ist A im Augenblicke eines bestimmten augenblicklichen Ereignisses $\dot{A}$ dieser Ereignisreihe vereinigt mit B, dann ist A im Augenblicke eines jeden augenblicklichen Ereignisses $\dot{A}$ dieser Ereignisreihe vereinigt mit B und alle diese augenblicklichen Ereignisse $\dot{A}$ finden in A gleichzeitig statt. Ausserdem ist auch B im Augenblicke eines jeden augenblicklichen Ereignisses $\dot{B}$ derselben Ereignisreihe vereinigt mit A und alle diese augenblicklichen Ereignisse $\dot{B}$ finden in B gleichzeitig statt.

Beweis. Es sei im Augenblicke des augenblicklichen Ereignisses $\dot{A} = (\dot{A}\dot{B})_r^i A$ A vereinigt mit B. Dann ist $(\dot{A}\dot{B})_r^i A = (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} A$ und nach V 1 $(\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} = (\dot{A}\dot{B})_r^{i+2}$, $(\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} A = (\dot{A}\dot{B})_r^{i+2} A$ usw.. Nach Satz 8 ist auch $(\dot{A}\dot{B})_r^i = (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1}$, $(\dot{A}\dot{B})_r^{i-1} A = (\dot{A}\dot{B})_r^i A$ usw, also ist einerseits: $\ldots = (\dot{A}\dot{B})_r^{i-1} A = (\dot{A}\dot{B})_r^i A = (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} A = \ldots$, anderseits: $\ldots = (\dot{A}\dot{B})_r^{i-1} = (\dot{A}\dot{B})_r^i = (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} = \ldots$

Bemerkung. Insbesondere können alle die genannten gleichzeitigen augenblicklichen Ereignisse $\dot{A}$ miteinander identisch sein; ebenso alle augenblicklichen Ereignisse $\dot{B}$.

Satz 40. Besteht eine Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_r^s]$ und ist A im Augenblicke eines bestimmten augenblicklichen Ereignisses $\dot{A}$ dieser Ereignisreihe nicht vereinigt mit B, dann ist A im Augenblicke keines einzigen augenblicklichen Ereignisses $\dot{A}$ dieser Ereignisreihe vereinigt mit B und es ist: $\ldots < (\dot{A}\dot{B})_r^k A < < (\dot{A}\dot{B})_r^{k+1} A < \ldots$ Ausserdem ist auch B im Augenblicke keines einzigen augenblicklichen Ereignisses $\dot{B}$ derselben Ereignisreihe vereinigt mit A und es ist: $\ldots < (\dot{A}\dot{B})_r^k < (\dot{A}\dot{B})_r^{k+1} < \ldots$

B e w e i s. Es sei im Augenblicke des augenblicklichen Ereignisses $\dot{A} = (\dot{A}\dot{B})_r^i A$ A nicht vereinigt mit B. Nach Satz 19 ist $(\dot{A}\dot{B})_r^i A < (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} A$, also nach V 1 $(\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} < (\dot{A}\dot{B})_r^{i+2}$, $(\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} A < < (\dot{A}\dot{B})_r^{i+2} A$ usw.. Nach Satz 8 ist auch $(\dot{A}\dot{B})_r^i < (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1}$, $(\dot{A}\dot{B})_r^{i-1} A < (\dot{A}\dot{B})_r^i A$ usw., also ist einerseits: $\ldots < (\dot{A}\dot{B})_r^{i-1} < < (\dot{A}\dot{B})_r^i A < (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} < \ldots$, anderseits: $\ldots < (\dot{A}\dot{B})_r^{i-1} < (\dot{A}\dot{B})_r^i < < (\dot{A}\dot{B})_r^{i+1} < \ldots$

S a t z 41. Erscheinen in einem materiellen Punkte A zwei augenblickliche Ereignisse α und β, ist A im Augenblicke „αA" vereinigt, bzw. nicht vereinigt mit einem materiellen Punkte B und ist $\alpha A \leq \beta A \leq \alpha \dot{A}\dot{B}A$, dann ist A auch im Augenblicke „βA" vereinigt, bzw. nicht vereinigt mit B.

B e w e i s. Ist $\alpha A = \alpha \dot{A}\dot{B}A$, so ist $\alpha A = \beta A$, also nach V 1 $\beta \dot{A}\dot{B}A = \alpha \dot{A}\dot{B}A$, folglich $\beta \dot{A}\dot{B}A = \beta A$. — Ist hingegen $\alpha A < \alpha \dot{A}\dot{B}A$, so ist entweder $\alpha A < \beta A$, folglich, nach V 1, $\alpha \dot{A}\dot{B}A < \beta \dot{A}\dot{B}A$ und wegen $\beta A \leq \alpha \dot{A}\dot{B}A$, $\beta A < \beta \dot{A}\dot{B}A$ oder ist $\alpha A = \beta A$, folglich $\alpha \dot{A}\dot{B}A = = \beta \dot{A}\dot{B}A$ und wegen $\alpha A < \alpha \dot{A}\dot{B}A$ wieder $\beta A < \beta \dot{A}\dot{B}A$.

S a t z 42. Besteht eine Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_r^s]$ und ist A im Augenblicke eines bestimmten augenblicklichen Ereignisses $\dot{A}$ dieser Ereignisreihe vereinigt, bzw. nicht vereinigt mit B, erscheint in A während dieser Ereignisreihe ein augenblickliches Ereignis β, dann ist A auch im Augenblicke „βA" vereinigt, bzw. nicht vereinigt mit B.

B e w e i s. Nach den Sätzen 39 und 40 ist A in jedem, bzw. in keinem Augenblicke „$\dot{A}$" der Ereignisreihe vereinigt mit B. Nach Erklärung 7 besteht für zwei augenblickliche Erscheinungen $(\dot{A}\dot{B})_r^i A$, $(\dot{A}\dot{B})_r^k A$ die Beziehung: $(\dot{A}\dot{B})_r^i A \leq \beta A \leq (\dot{A}\dot{B})_r^k A$; dann besteht offenbar eine ganze Zahl n $(i \leq n < k)$, so dass $(\dot{A}\dot{B})_r^n A \leq \beta A \leq (\dot{A}\dot{B})_r^{n+1} A$ gilt. Also ist nach Satz 41 A auch im Augenblicke „βA" vereinigt, bzw. nicht vereinigt mit B.

Aus Satz 42 ergibt sich unmittelbar der folgende Satz:

S a t z 43. Besteht eine Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_r^s]$ und ist A im Augenblicke eines bestimmten augenblicklichen Ereignisses $\dot{A}$ dieser Ereignisreihe vereinigt, bzw. nicht vereinigt mit B, ist hingegen A im Augenblicke der Erscheinung eines anderen augenblicklichen Ereignisses φ nicht vereinigt, bzw. vereinigt mit B, dann erscheint φ nicht während dieser Ereignisreihe.

Wir erwähnen noch den folgenden Satz:

S a t z 44. Besteht eine Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_r^\infty]$ (bzw. $[(\dot{A}, \dot{B})^s_{-\alpha}]$) und findet in A ein augenblickliches Ereignis φ während derselben statt, besteht auch eine Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_m^n, \dot{A}]$, welche φ als Anfangsereignis (bzw. als Endereignis) enthält, dann finden alle augenblicklichen Ereignisse $\dot{A}$ der letzten Ereignisreihe während der ersten Ereignisreihe statt.

B e w e i s. Es sei $(\dot{A}, \dot{B})_r^i A \leq A\varphi \leq (\dot{A}, \dot{B})_r^{i+1} A$. Nach V 1 ist $(\dot{A}\dot{B})_r^{i+k} A \leq A\varphi(\dot{B}\dot{A})_1^k \leq (\dot{A}\dot{B})_r^{i+k+1} A$ $(k=1, 2, \ldots)$, wodurch der erste Fall des Satzes bewiesen wird. Besteht $[(\dot{A}, \dot{B})_{-\infty}^s]$ und ist φ das Endereignis von $[(\dot{A}, \dot{B})_m^n, \dot{A}]$, so folgt aus $(\dot{A}\dot{B})^i_{-\infty} A \leq$ $\leq (\dot{A}\dot{B})_m^n A\varphi \leq (\dot{A}\dot{B})_{-\infty}^{i+1} A$, nach Satz 8, $(\dot{A}\dot{B})_{-\infty}^{i-k} A \leq (\dot{A}\dot{B})_m^{n-k} A \leq$ $\leq (\dot{A}\dot{B})_{-\infty}^{i+1-k} A$, wodurch der zweite Fall bewiesen wird.

B e m e r k u n g e n. Die vorangehenden Sätze zeigen, dass ein augenblickliches Ereignis β, welches z. B. später als ein augenblickliches Ereignis α in A erscheint, nicht immer w ä h r e n d einer gegebenen endlosen Ereignisreihe $[(\dot{A}\dot{B})_r^\infty]$, deren Anfangsereignis gleichzeitig mit αA ist, erscheint. Im positiven Falle lässt sich βA als Element endlichen Ranges in die zeitlich angeordnete unendliche Folge augenblicklicher Ereignisse αA, $\alpha\dot{A}\dot{B}A, \ldots$ eingliedern. Im negativen Falle könnte βA nur als ein transfinites Element dieser Folge angesehen werden. Anschaulich ausgedrückt würde das letztere z. B. dann eintreten, wenn sich A und B, während die Ereignisreihe vorsichgeht, gegenseitig nähern und zusammentreffen würden, bevor β erschiene. Würden im Gegenteile A und B „nie“ zusammentreffen, dann wäre ein beliebig spätes augenblickliches Ereignis von der Ereignisreihe umfasst. Es weisen also die vorangehenden Sätze deutlich auf etwas hin, was dem sogenannten A r c h i m e d i s c h e n A x i o m entspricht, obwohl noch von keinem Messen die Rede war. Die vorige Bemerkung besagt, dass das so, zeitlich gemeinte „Archimedische Axiom" nicht gültig ist. — Im allgemeinen entspricht jeder Ereignisreihe $[(\dot{A}\dot{B})_r^s]$ eine aus der Menge aller augenblicklichen Ereignisse der betreffenden Mannigfaltigkeit herausgenommene Teilmenge, deren Elemente von dieser Ereignisreihe alle in einem gewissen materiellen Punkte P umfasst werden. Diese Teilmenge ist sozusagen Archimedisch in P, in Bezug auf diese Ereignisreihe. Besteht eine allumfassende Ereignisreihe $[(\dot{A}, \dot{B})_r^s]$, so könnte man im selben Sinne die ganze Mannigfaltigkeit „Archimedisch" nennen. Wie man sieht, hängt dies nicht von einer inneren Struktur der g a n z e n Mannigfaltigkeit ab, sondern bloss von einem „zufälligen" Paare materieller Punkte. So würde z. B. die Mannigfaltigkeit nicht „Archimedisch" sein, falls sie aus nur zwei materiellen Punkten A und B bestehen würde und es drei augenblickliche Ereignisse α, β, γ gebe, so dass $\alpha A < \beta A < \gamma A$ ist und dass A einzig im Augenblicke „βA" mit B vereinigt ist. — Eine „Archimedische" Mannigfaltigkeit kann auch aus materiellen Punkten bestehen, die am „Anfange" und am „Ende" der „Zeit" alle miteinander vereinigt sind, nur muss es ein Paar materieller Punkte geben, die sich inzwischen nie vereinigen. Erscheint aber ein augenblickliches Ereignis vor dem „Anfange" oder nach dem „Ende", dann ist die Mannigfaltigkeit, offenbar, nicht „Archimedisch".

12. Axiom der Stetigkeit

Das Axiom der Stetigkeit begründet eine Beziehung zwischen einer unendlichen Menge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden und einem besonderen augenblicklichen Ereignisse, das im selben materiellen Punkte stattfindet und das wir G r e n z e r e i g n i s jener Menge nennen werden.

E r k l ä r u n g 14. Eine Menge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte P stattfinden, werden wir *beschränkt* nennen, falls alle augenblicklichen Ereignisse dieser Menge zwischen zwei bestimmten, in P stattfindenden, augenblicklichen Ereignissen in P erscheinen.

E r k l ä r u n g 15. Eine Folge $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte P stattfinden, werden wir eine *zunehmende*, bzw. eine *abnehmende monotone* Folge augenblicklicher Ereignisse nennen, falls $P\mu_n < P\mu_{n+1}$, bzw. $P\mu_n > P\mu_{n+1}$ für jedes n ist.

Erklärung 16. Ein augenblickliches Ereignis φ, das in einem materiellen Punkte P stattfindet, werden wir *Grenzereignis* einer Menge $\{\mu\}$ in P stattfindender augenblicklichen Ereignisse nennen, falls es eine zunehmende, bzw. eine abnehmende monotone unendliche Teilfolge $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der Menge $\{\mu\}$ gibt, so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es ist $P\varphi > P\mu_n$, bzw. $P\varphi < P\mu_n$ für jedes n.
2. Es besteht kein augenblickliches Ereignis ψ, das in P stattfindet, so dass ebenfalls $P\psi > P\mu_n$, bzw. $P\psi < P\mu_n$ für jedes n ist und ausserdem $P\psi < P\varphi$, bzw. $P\psi > P\varphi$ ist.

Bemerkungen. Unter den Elementen der betrachteten Menge augenblicklicher Ereignisse kann es auch solche geben, die gleichzeitig stattfinden. Für die Existenz eines Grenzereignisses ist aber notwendig, dass unendlich viele Elemente miteinander nicht gleichzeitig stattfinden. — Die Definition des Grenzereignisses gleicht der des Grenzelementes einer einfach geordneten allgemeinen Menge und nicht etwa der des Grenzpunktes einer linearen Punktmenge. Denn die Punkte einer linearen Punktmenge sind auf einer Geraden angereiht, wir aber haben „ausserhalb" der augenblicklichen Ereignisse keine „stetige Zeit". — Wesentlich ist jedenfalls der Umstand, dass alle augenblicklichen Ereignisse der gegebenen Mannigfaltigkeit in Betracht gezogen werden müssen, um die Bedingung 2 zu sichern. — Wir könnten die Betrachtungen auch etwas allgemeiner fassen und statt von augenblicklichen Ereignissen, die in einem materiellen Punkte stattfinden, von augenblicklichen Erscheinungen sprechen. Das kann aber auch nachträglich leicht getan werden, nur drükken sich dann die Beziehungen weniger einfach aus.

Nun stellen wir das Axiom der Stetigkeit in folgender Gestalt auf:

VI. *Jede beschränkte unendliche Menge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, hat wenigstens ein Grenzereignis.*

Bemerkung. In der Begründung der Stetigkeitseigenschaften genügt dieses eine Axiom, welches bloss die Existenz von Grenzereignissen behauptet. Es drückt dabei einen anschaulichen Umstand aus. Der Menge augenblicklicher Ereignisse entspricht nämlich eine beschränkte unendliche Menge von „Augenblicken" der „Zeit", die wir im betreffenden materiellen Punkte hinzuzudenken gewöhnt sind. Wegen der Beschränktheit wird es wenigstens einen „Grenzaugenblick" geben, dem unendlich viele „Augenblicke" dieser Menge konvergieren. Da unser Begriff des augenblicklichen Ereignisses eigentlich den Sinn einer sichtbaren augenblicklichen Änderung in der Aussenwelt hat, und im „Grenzaugenblicke" gewiss eine solche Änderung stattfindet, darf man wohl auch diese Änderung zu den augenblicklichen Ereignissen zählen. Das besagt eben das Axiom VI.

13. Über unendliche Mengen augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden.

In den folgenden „Erklärungen" werden einige elementare Begriffe der Mengenlehre auf Mengen augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, angewendet.

Erklärung 17. Eine unendliche Folge $\{\mu_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, werden wir *konvergent* nennen, falls jede unendliche Teilfolge von $\{\mu_n\}$ ein Grenzereignis hat und alle diese Grenzereignisse miteinander gleichzeitig stattfinden. — Ist φ eines von diesen Grenzereignissen, so werden wir auch sagen: *die Folge* $\{\mu_n\}$ *konvergiert gegen* φ; in Zeichen:

$$\lim_{n=\infty} \mu_n = \varphi .$$

Erklärung 18. Ist ein Element einer Menge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, kein Grenzelement derselben, dann werden wir es ein *isoliertes* augenblickliches Ereignis nennen.

Erklärung 19. Es sei $\{\mu\}$ eine Menge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden; sind alle Elemente von $\{\mu\}$ isolierte augenblickliche Ereignisse von $\{\mu\}$, dann werden wir $\{\mu\}$ eine *isolierte* Menge augenblicklicher Ereignisse nennen; sind alle Elemente von $\{\mu\}$ Grenzereignisse von $\{\mu\}$, dann werden wir $\{\mu\}$ eine *in sich dichte* Menge augenblicklicher Ereignisse nennen; gibt es zu jedem Grenzereignisse von $\{\mu\}$ ein mit ihm gleichzeitig stattfindendes Ereignis von $\{\mu\}$, dann werden wir $\{\mu\}$ eine *abgeschlossene* Menge augenblicklicher Ereignisse nennen; ist $\{\mu\}$ zugleich in sich dicht und abgeschlossen, dann werden wir sie *perfekt* nennen.

Erklärung 20. Ist $\{\mu\}$ eine perfekte Menge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte P stattfinden und gibt es zu irgend zwei Elementen μ_1 und μ_2 von $\{\mu\}$, für die $P\mu_1 < P\mu_2$ gilt, ein Element μ_3 von $\{\mu\}$, so dass $P\mu_1 < P\mu_3 < P\mu_2$ ist, dann werden wir $\{\mu\}$ eine *stetige* Menge oder ein *Kontinuum* augenblicklicher Ereignisse nennen.

Erklärung 21. Ist die Menge aller Grenzereignisse einer Menge $\{\mu\}$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, ein Kontinuum augenblicklicher Ereignisse, dann werden wir $\{\mu\}$ eine *dichte* Menge augenblicklicher Ereignisse nennen.

Nun beweisen wir einige Sätze, deren Analogie mit gewissen elementaren Sätzen über lineare Punktmengen (sowie der entsprechende Unterschied) leicht erkennbar ist.

Satz 45. Jede beschränkte und monotone unendliche Folge $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte P stattfinden, ist konvergent.

Beweis. Es sei $\{\mu_n\}$ eine zunehmende monotone Folge. Nach Axiom VI hat sie wenigstens ein Grenzereignis. Bestehen deren mehrere und sind φ und ψ irgend zwei unter ihnen, dann besteht nach Erklärung 16 eine Teilfolge $\{\mu_{n_p}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ von $\{\mu_n\}$, so dass $P\varphi > P\mu_{n_p}$ für alle p ist, eine Teilfolge $\{\mu_{n_r}\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ von $\{\mu_n\}$, so dass $P\psi > P\mu_{n_r}$ für alle r ist, und es nicht $P\psi < P\varphi$ und nicht $P\varphi < P\psi$ ist. Also ist $P\varphi = P\psi$, d. h. $\{\mu_n\}$ ist nach Erklärung 17 konvergent. Ähnlich beweist man den Fall einer abnehmenden monotonen Folge.

Satz 46. Jede konvergente Folge augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte P stattfinden, ist beschränkt.

Beweis. Es sei $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine nicht beschränkte unendliche Folge augenblicklicher Ereignisse die in P stattfinden. Wir wollen zeigen, dass sie nicht konvergent ist. — Nach Erklärung 14 bestehen nicht zugleich zwei augenblickliche Ereignisse γ und δ, so dass $P\gamma \leq P\mu_n$ und $P\delta \geq P\mu_n$ für jedes n ist. Es gebe z. B. kein δ. Dann sei μ_{n_2} das erste Element der Folge $\{\mu_n\}$ $(2, 3, \ldots)$, für welches $P\mu_1 < P\mu_n$ ist; ferner sei μ_{n_3} das erste Element der Folge $\{\mu_n\}$ $(n = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots)$, für welches $P\mu_{n_2} < P\mu_{n_3}$ ist; usw.. Da es kein δ gibt, besteht die zunehmende monotone unendliche Folge $\{\mu_{n_i}\}$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Diese hat kein Grenzereignis, denn wäre φ ein solches, so müsste nach

Erklärung 16 $P\varphi > P\mu_{n_i}$ für jedes i sein, also wäre φ ein δ. Ähnlich, falls es kein γ gibt.

Satz 47. Die Menge aller augenblicklichen Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, ist stets abgeschlossen.

Beweis. Da alle augenblicklichen Ereignisse im betreffenden materiellen Punkte zur Menge gezählt werden, werden es auch die Grenzereignisse. Also ist nach Erklärung 19 diese Menge abgeschlossen.

Satz 48. Ist eine unendliche Menge $\{\mu\}$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, beschränkt, dann ist jede ihrer monotonen unendlichen Teilfolgen $\{\mu_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) konvergent.

Beweis. Da $\{\mu\}$ beschränkt ist, ist es auch die Teilfolge $\{\mu_n\}$, welche also, nach Satz 45, konvergent ist.

Satz 49. Findet in einem materiellen Punkte P ein augenblickliches Ereignis früher, bzw. später als alle Ereignisse einer Menge $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse statt, dann gibt es entweder ein Ereignis von $\{\lambda\}$ oder ein Grenzereignis von $\{\lambda\}$, das in P früher, bzw. später als alle Ereignisse von $\{\lambda\}$ stattfindet.

Beweis. Es finde in P ein augenblickliches Ereignis α früher als alle Elemente von $\{\lambda\}$ statt; in Anlehnung an Satz 6 sei t ein Zeitparameter, der der Menge $\{\lambda\}+\alpha$ in P zugeordnet ist. Bezeichnen wir mit $t(\alpha)$, $t(\lambda)$ die den augenblicklichen Ereignissen α, λ zugeordneten Werte von t, so ist $t(\alpha) < t(\lambda)$ für jedes λ. Entweder besteht ein $t(\lambda) = t(\lambda_1)$, so dass $t(\lambda_1) \leq t(\lambda)$ fur jedes λ ist, oder besteht eine unendliche Folge $t(\lambda_1) > t(\lambda_2) > \ldots$, so dass $\lim\limits_{n=\infty} t(\lambda_n) < t(\lambda)$ für jedes λ ist. Im ersten Falle ist $P\lambda_1 \leq P\lambda$ für alle λ, im zweiten ist $P\nu < P\lambda$ für alle λ, wo ν das nach VI existierende Grenzereignis von $\{\lambda_n\}$ ist. Ähnlich beweist man den Fall, wenn ein augenblickliches Ereignis später als alle Ereignisse von $\{\lambda\}$ in P stattfindet.

Satz 50. Findet in einem materiellen Punkte P ein au- genblickliches Ereignis früher, bzw. später statt als alle Elemente einer abgeschlossenen Menge $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse, dann gibt es ein Element von $\{\lambda\}$, das in P früher, bzw. später als alle Elemente von $\{\lambda\}$ stattfindet.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 49, auf Grund der Erklärung 19.

Satz 51. Ist λ_0 ein isoliertes augenblickliches Ereignis einer Menge $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte P stattfinden, und ist die Menge $\{\lambda'\}$ aller Elemente von $\{\lambda\}$, für die $P\lambda_0 < P\lambda'$, bzw. $P\lambda_0 > P\lambda'$ ist, nicht leer, dann besteht ein augenblickliches Ereignis ν, das Element oder Grenzereignis von $\{\lambda\}$ ist, so dass

$$P\lambda_0 < P\nu \leq P\lambda', \quad \text{bzw.} \quad P\lambda_0 > P\nu \geq P\lambda'$$

für jedes λ' ist.

Beweis. Nach Satz 49 besteht ein Element oder Grenzereignis von $\{\lambda'\}$, das folglich auch Element oder Grenzereignis von $\{\lambda\}$ ist, so dass $P\nu \leq P\lambda'$, bzw. $P\nu \geq P\lambda'$ ist. Nach Erklärung 16 ist offenbar $P\lambda_0 \leq P\nu$, bzw. $P\lambda_0 \geq P\nu$, also ist der Satz bewiesen.

Satz 52. Erscheint in einem materiellen Punkte P ein augenblickliches Ereignis φ während eines Kontinuums $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse, die in P stattfinden, und zwar so, dass Elemente von $\{\lambda\}$ bestehen für die $P\lambda < \varphi P$ ist und solche für die $P\lambda > \varphi P$ ist, dann bilden alle Elemente von $\{\lambda\}$, für die $P\lambda \leq \varphi P$ ist und alle jene, für die $P\lambda \geq \varphi P$ ist, zwei Kontinua augenblicklicher Ereignisse, die φ umfassen.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\{\rho\}$ die erste, mit $\{\sigma\}$ die zweite von den letztgenannten Mengen. Beide diese Mengen sind in sich dicht. In der Tat, da nach Erklärung 20 $\{\lambda\}$ in sich dicht ist, ist jedes Element ρ_1 von $\{\rho\}$ ein Grenzereignis von $\{\lambda\}$, d. h. es besteht eine monotone Teilfolge $\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ von $\{\lambda\}$, die gegen ρ_1 konvergiert. Würden alle λ_n $(n > m)$ zu $\{\sigma\}$ gehören, so wäre $P\lambda_n \geq \varphi P$ $(n > m)$, also nach Erklärung 16 auch $P\rho_1 \geq \varphi P$, d. h., da $P\rho_1 \leq \varphi P$ ist, $P\rho_1 = \varphi P$. Ist also $P\rho_1 < \varphi P$, so können nur endlich viele λ_n zu $\{\sigma\}$ gehören, d. h. es ist ρ_1 Grenzereignis auch von $\{\rho\}$. Ist $P\rho_1 = \varphi P$, so ist ρ_1 dennoch ein Grenzereignis von $\{\rho\}$, was folgenderweise bewiesen werden kann: Wäre ρ_1 kein Grenzereignis von $\{\rho\}$, so wäre es ein isoliertes Ereignis von $\{\rho\}$; nach Satz 51 würde es ein augenblickliches Ereignis ν geben, das Element oder Grenzereignis von $\{\rho\}$ und folglich Element von $\{\lambda\}$ ist, so dass $P\nu < P\rho_1$ ist und so dass für ρ $P\nu < P\rho < P\rho_1$ ist. Nach Erklärung 20 ist das aber unmöglich, da ν und ρ_1 Elemente von $\{\lambda\}$ sind. Also ist ρ_1 in jedem Falle ein Grenzereignis von $\{\rho\}$, d. h. $\{\rho\}$ ist in sich dicht. — Ähnlich beweist man, dass $\{\sigma\}$ in sich dicht ist.

Ausserdem sind $\{\rho\}$ und $\{\sigma\}$ abgeschlossene Mengen. Ist nämlich τ irgend ein Grenzereignis von $\{\rho\}$, so gibt es, da τ auch Grenzereignis der abgeschlossenen Menge $\{\lambda\}$ ist, ein mit τ gleichzeitig stattfindendes augenblickliches Ereignis λ', das zu $\{\lambda\}$ gehört. Nach Erklärung 16 ist $P\lambda' \leqq \varphi P$, also gehört λ' zu $\{\rho\}$, d. h. auch $\{\rho\}$ ist abgeschlossen. — Ähnlich beweist man, dass $\{\sigma\}$ abgeschlossen ist.

Also sind $\{\rho\}$ und $\{\sigma\}$ perfekte Mengen augenblicklicher Ereignisse. Da ferner jedes Element von $\{\rho\}$ auch Element von $\{\lambda\}$ ist und $\{\lambda\}$ ein Kontinuum ist, besteht für jedes Paar Elemente ρ_1 und ρ_2 von $\{\rho\}$, für die $P\rho_1 < P\rho_2$ ist, ein Element λ_3 von $\{\lambda\}$, so dass $P\rho_1 < P\lambda_3 < P\rho_2$ ist. Es gehört aber λ_3 zu $\{\rho\}$, da $P\lambda_3 < \varphi P$ ist, also ist nach Erklärung 20 $\{\rho\}$ ein Kontinuum. Ebenso $\{\sigma\}$.

Nach Satz 50 gibt es ein Element ρ' von $\{\rho\}$ und σ' von $\{\sigma\}$, so dass für jedes ρ $P\rho \leqq P\rho'$ und für jedes σ $P\sigma \geqq P\sigma'$ ist. Es ist $P\rho' \leqq P\sigma'$ und kann nicht $P\rho' < P\sigma'$ sein, denn, da $\{\lambda\}$ ein Kontinuum ist, müsste es nach Erklärung 20 ein Element λ' von $\{\lambda\}$, also von $\{\rho\}$ oder von $\{\sigma\}$ geben, so dass $P\rho' < P\lambda' < P\sigma'$ ist, was den Voraussetzungen über ρ' und σ' widerspricht. Also ist $P\rho' = P\sigma'$, folglich $P\rho' = \varphi P = P\sigma'$, womit auch der letzte Teil des Satzes 52 bewiesen ist.

Satz 53. Erscheint in einem materiellen Punkte P ein augenblickliches Ereignis φ während eines Kontinuums $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse, die in P stattfinden, dann gibt es ein Element von $\{\lambda\}$, das in P gleichzeitig mit φ erscheint.

Beweis. Nach Erklärung 7 ist entweder $P\lambda \leqq \varphi P$ oder $P\lambda \geqq \varphi P$ für jedes λ, und dann ist auch $P\lambda = \varphi P$ für gewisse λ, oder gibt es nach Satz 52 und der dortigen Bezeichnung zwei Teilmengen $\{\rho\}$ und $\{\sigma\}$, die Kontinua sind und φ umfassen, d. h. es ist wiederum $P\lambda = \varphi P$ für gewisse λ.

Satz 54. Ist einem Kontinuum $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, ein auf einer Menge $\{t\}$ reeller Zahlen definierter Zeitparameter zugeordnet, dann ist diese Menge $\{t\}$ in sich dicht.

Beweis. Es seien t_1, t_2 irgend zwei Werte von $\{t\}$, so dass $t_1 < t_2$ ist und λ_1, λ_2 die entsprechenden Werte von $\{\lambda\}$, für die also $P\lambda_1 < P\lambda_2$ ist. Nach Erklärung 20 gibt es ein Element λ_3 von $\{\lambda\}$, so dass $P\lambda_1 < P\lambda_3 < P\lambda_2$ ist. Entspricht t_3 zu λ_3, so ist $t_1 < t_3 < t_2$, d. h. $\{t\}$ ist in sich dicht.

14. Begriff des stetigen Zeitparameters.

Erklärung 22. Findet in einem materiellen Punkte P ein Kontinuum $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse statt, so werden wir die in einem Intervalle (a, b) reeller Zahlen $(a<b)$ definierte Veränderliche t einen dem Kontinuum $\{\lambda\}$ zugeordneten *stetigen Zeitparameter* nennen, falls die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedem augenblicklichen Ereignisse von $\{\lambda\}$ entspricht ein und nur ein Wert von t.

2. Jedem Werte von t entspricht ein augenblickliches Ereignis von $\{\lambda\}$.

3. Sind λ_1 und λ_2 irgend zwei augenblickliche Ereignisse von $\{\lambda\}$, t_1 und t_2 die entsprechenden Werte von t und ist $P\lambda_1 <$, oder $>$, oder $= P\lambda_2$, dann ist $t_1 <$, bzw. $>$, bzw. $= t_2$.

Bemerkung. Am Ende des Paragraphen 4 wurde der Begriff des allgemeinen „Zeitparameters" erwähnt. Nach Satz 6 kann auch dem Kontinuum $\{\lambda\}$ ein solcher zugeordnet werden. Ein stetiger Zeitparameter unterscheidet sich von den nichtstetigen vor allem dadurch, dass die Menge $\{t\}$ seiner Werte ein stetiges Intervall ausfüllen. Der Umstand, dass hier nicht von augenblicklichen Erscheinungen, sondern von Ereignissen die Rede ist, ist nicht wesentlich. — Ist $\{\lambda\}$ beschränkt, so ist das Intervall abgeschlossen. Ist $\{\lambda\}$ nicht beschränkt, so ist (a, b) wenigstens an einer seiner Grenzen offen und man kann für diese Grenze auch $+\infty$, bzw. $-\infty$ wählen.

Für den Begriff des stetigen Zeitparameters ist der folgende Satz wichtig.

Satz 55. Jedem Kontinuum augenblicklicher Ereignisse, die in einem materiellen Punkte stattfinden, kann ein stetiger Zeitparameter zugeordnet werden.

Beweis. Nach Satz 51 kann jedem Kontinuum augenblicklicher Ereignisse, das mit $\{\lambda\}$ bezeichnet werde und in einem materiellen Punkte P stattfinde, ein allgemeiner Zeitparameter, der auf einer in sich dichten Menge $\{t\}$ definiert ist, zugeordnet werden. Jede in sich dichte Menge reeller Zahlen kann aber auf eine in irgend einem reellen Intervalle (a', b'), $a'<b'$, überall dichte Zahlenmenge ein-eindeutig abgebildet werden, so dass diese Abbildung durch eine nicht abnehmende Funktion geschieht. Dadurch wird wieder ein Zeitparameter $\{t'\}$

bestimmt, für den nun gezeigt werden soll, dass er stetig ist. Zu diesem Zwecke muss man zeigen, dass die Menge $\{t'\}$ das Intervall (a', b') erfüllt. — Es sei u irgend eine Zahl, für die $a' < u < b'$ ist. Da $\{t'\}$ dicht in (a', b') ist, gibt es eine Teilfolge $\{ t'_n \}$ von $\{t'\}$, so dass $t'_n < t'_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist und dass $\lim t'_n = u$ ist. Es sei λ_n das Element von $\{\lambda\}$ dem t'_n entspricht. Da $P\lambda_n < P\lambda_{n+1}$ ist $(n = 1, 2, \ldots)$, konvergiert $\{ \lambda_n \}$ und zwar gegen ein Element λ_0 von $\{\lambda\}$, da $\{\lambda\}$ in sich dicht ist. Dem Elemente λ_0 entspricht ein Wert t_0' von $\{t'\}$. Wäre $t_0' < u$, so wäre für unendlich viele λ_n $P\lambda_n > P\lambda_0$, was der Erklärung 16 widerspricht. Wäre $t_0' > u$, so wäre, da $\{t'\}$ dicht ist, für gewisse t' $t_0' > t' > u$, also für die entsprechenden λ: $P\lambda_0 > P\lambda > P\lambda_n$ für jedes n, was wieder der Erklärung 16 widerspricht. Also ist $t_0' = u$, d. h. dem Werte u entspricht ein bestimmter Wert λ_0 von $\{\lambda\}$. Damit ist Satz 55 bewiesen.

Wie aus Erklärung 22 hervorgeht, ist jeder stetige Zeitparameter an einen bestimmten materiellen Punkt gebunden (in dem das entsprechende Kontinuum $\{\lambda\}$ augenblicklicher Ereignisse stattfindet). Deshalb werden wir in genauerer Ausdrucksweise diesen Zeitparameter einen stetigen Zeitparameter in P nennen und mit t_P bezeichnen.

Der üblichen Redeweise entgegenkommend, werden wir einen stetigen Zeitparameter t_P schlechtweg auch stetige Zeit oder kurz Zeit nennen, genauer: Zeit in P. Statt vom „Werte t'_P des stetigen Zeitparameters t_P“, werden wir vom „Augenblicke t'_P“ und statt vom „Intervalle (t'_P, t''_P) des stetigen Zeitparameters t_P“, werden wir vom „Zeitintervalle (t'_P, t''_P)“ sprechen. (Da schon früher vom Augenblicke „βA“ gesprochen wurde, wird jetzt für den Fall, dass ein stetiger Zeitparameter besteht, „βA“ mit einem bestimmten Wert von t_A formal identifiziert).

Mithin gilt die folgende Ausdrucksweise: Statt zu sagen, dass ein augenblickliches Ereignis φ in einem materiellen Punkte P im Augenblicke „$P\lambda'$“ erscheint, bzw. stattfindet, wo λ' einem Kontinuum $\{\lambda\}$ angehört und t' der entsprechende Wert eines entsprechenden stetigen Zeitparameters t_P ist, werden wir sagen, dass φ in P im Augenblicke t' erscheint, bzw. stattfindet; in Zeichen:

$$\varphi P(t') \quad \text{oder} \quad t'(\varphi P), \quad \text{bzw.} \quad P\varphi(t') \quad \text{oder} \quad t'(P\varphi),$$

oder bloss: $\varphi(t'_P)$ oder $t'_P(\varphi)$.

Falls ein augenblickliches Ereignis ψ in einem materiellen Punkte P in einem Augenblicke t_1 der stetigen Zeit t_P erscheint, bzw. stattfindet, und falls t_1 in einem Intervalle (t', t'') von t_P liegt, dann werden wir sagen, dass ψ *in P im Zeitintervalle* (t', t'') *erscheint*, bzw. *stattfindet*.

Wenn also gesagt wird, dass z. B. zwei augenblickliche Ereignisse in einem materiellen Punkte im selben Augenblicke erscheinen, so bedeutet das, dass sie gleichzeitig erscheinen. In Zeichen: Ist $t(\varphi P) = t(\psi P)$, so ist $\varphi P = \psi P$ und umgekehrt. Ebenso: Ist $t(\varphi P) < t(\psi P)$, so ist $\varphi P < \psi P$ und umgekehrt.

Bemerkung. Es sei nochmals erwähnt, dass die Augenblicke und Zeitintervalle, ebenso wie die Zeit selbst, an die einzelnen materiellen Punkte gebunden bleiben müssen, da gemäss den Axiomen III die zeitlichen Beziehungen nur für Erscheinungen in einem und demselben materiellen Punkte bestehen. Also kann z. B., nicht vom „selben Augenblicke“ in zwei verschiedenen materiellen Punkten gesprochen werden (vereinigte materielle Punkte könnten allein eine Ausnahme bilden, in die aber hier nicht näher eingegangen wird .

15. Über augenblickliche Vereinigungen und augenblickliche Konjunktionen in stetiger Zeit.

Im folgenden sei angenommen, dass alle in Betracht kommenden augenblicklichen Ereignisse im betreffenden materiellen Punkte P während eines Kontinuums in P stattfindender augenblicklicher Ereignisse erscheinen und dass diesem Kontinuum ein stetiger Zeitparameter t_P zugeordnet ist. Dann besteht immer ein Wert von t_P, der den Augenblick des Erscheinens oder Stattfindens in P irgend eines augenblicklichen Ereignisses angibt.

Die folgenden vier Sätze beziehen sich auf augenblickliche Vereinigungen:

Satz 56. Ist ein materieller Punkt M in einem Augenblicke t_0 der Zeit in M nicht vereinigt mit einem materiellen Punkte N, dann ist M in keinem Augenblicke eines gewissen Zeitintervalls (t_1, t_2), der der Bedingung: $t_1 < t_0 < t_2$ genügt, vereinigt mit N.

Beweis. Es ist $\dot{M}(t_0) < \dot{M}(t_0)\dot{N}M$; also, in $\dot{M}(t_0)\dot{N}M = \dot{M}(t'_2)$

ist $t_0 < t'_2$. Ebenso in $\dot{M}(t_0) = \dot{M}(t'_1)\dot{N}M$ ist $t_0 > t'_1$. Nach Satz 41 ist in keinem Augenblicke t_2'', für den $t_0 \leq t_2'' \leq t_2'$ ist, und in keinem Augenblicke t_1'', für den $t_0 \geq t_1'' \geq t_1'$, ist, $(M, N)\dot{M}$. Also genügt schon das Zeitintervall (t_1', t_2') den Bedingungen des Satzes 56.

S a t z 57. Ist ein materieller Punkt M mit einem materiellen Punkte N vereinigt in einer Menge von Augenblicken der Zeit in M, die einen Grenzwert t_0 hat, dann ist M auch im Augenblicke t_0 vereinigt mit N.

B e w e i s. Wäre nicht $(M, N)\dot{M}(t_0)$, dann würde es nach Satz 56 ein Zeitintervall (t_1, t_2), $t_1 < t_0 < t_2$, geben, in dem nicht $(M, N)\dot{M}$ sein kann. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass t_0 Grenzereignis der betrachteten Menge ist und also in (t_1, t_2) Elemente haben muss.

S a t z 58. Ist ein materieller Punkt M mit einem materiellen Punkte N vereinigt, bzw. nicht vereinigt, in einer Menge von Augenblicken, die in einem Zeitintervalle (t_1, t_2) der Zeit in M überall dicht ist, dann ist M in jedem, bzw. in keinem Augenblicke dieses Zeitintervalls vereinigt mit N.

B e w e i s. Da die Menge dicht ist, ist jeder Wert von t in (t_1, t_2) ihr Grenzwert. Der Satz folgt also unmittelbar aus Satz 57, bzw. 56.

S a t z 59. Besteht eine Ereignisreihe $[(\dot{M}, \dot{N})_r^{\infty}]$, bzw. $[(\dot{M}, \dot{N})_{-\infty}^{s}]$ und ist sie beschränkt, dann ist M im Augenblicke

$$t_0 = \lim_{n=\infty} t\,((\dot{M}\dot{N})_r^n M), \quad \text{bzw.} \quad t_0 = \lim_{n=\infty} t\,((\dot{M}\dot{N})_n^s M)$$

vereinigt mit N.

B e w e i s. Betrachten wir den ersten Fall: Wäre nicht $(M, N)\dot{M}(t_0)$, dann wäre in $\dot{M}(t_0)\dot{N}M = \dot{M}(t_1)$ $t_0 < t_1$. Es seien t_1', t_0' zwei Werte von t, so dass $t_0 < t_1' < t_1$ und $\dot{M}(t_0')\dot{N}M = \dot{M}(t_1')$ ist. Da $\dot{M}(t_1') < \dot{M}(t_1)$ ist, ist $\dot{M}(t_0')\dot{N}M < \dot{M}(t_0)\dot{N}M$, also $\dot{M}(t_0') < \dot{M}(t_0)$. Es gibt also ein Element $\dot{M}(t_2)$ der Ereignisreihe $[(\dot{M}, \dot{N})_r^{\infty}]$, so dass $t_0' < t_2$ ist. Dann ist $\dot{M}(t_0') < \dot{M}(t_2)$, folglich $\dot{M}(t_1') = \dot{M}(t_0')\dot{N}M < \dot{M}(t_2)\dot{N}M \leq \dot{M}(t_0)$, d. h. $\dot{M}(t_1') < \dot{M}(t_0)$, was der Voraussetzung, dass $t_0 < t_1'$ ist, widerspricht. — Ähnlich beweist man den zweiten Fall.

Die folgenden vier Sätze beziehen sich auf augenblickliche Konjunktionen:

Satz 60: Ist $\dot{L}N < \dot{L}\dot{M}N$ für ein bestimmtes $\dot{L}$, dann ist $[\dot{L}\ \dot{M}]N$ in keinem Augenblicke des Zeitintervalls $[t(\dot{L}N), t(\dot{L}\dot{M}N)]$.

Beweis. Es sei $t(\dot{L}N)=t_1$, $t(\dot{L}\dot{M}N)=t_2$. Wäre $[\dot{L}, \dot{M}]\,N$ in einem Augenblicke t', für den $t_1<t'<t_2$ ist, dann wäre $\dot{L}\dot{N}(t_1)< <\dot{L}\dot{N}(t')$, genauer $\dot{L}(t_1)\dot{N}(t_1)<\dot{L}(t')\dot{N}(t')$ (die gleichbezeichneten t gehören das eine mal zu t_L, das andere mal zu t_N), also $\dot{L}(t_1)< <\dot{L}(t')$, folglich $\dot{N}(t_2)=\dot{L}(t_1)\dot{M}N<\dot{L}(t')MN=\dot{N}(t')$, d. h. $t_2<t'$, im Widerspruche mit der Voraussetzung. Also gilt der Satz 60.

Satz 61. Ist nicht $[\dot{L}, \dot{M}]\,N$ in einem Augenblicke t_0 der Zeit in N, dann ist in keinem Augenblicke eines gewissen Zeitintervalls (t_1, t_2), der der Bedingung: $t_1<t_0<t_2$ genügt, $[\dot{L}, \dot{M}]N$.

Beweis. Es ist $\dot{L}N<\dot{L}\dot{M}N$ ebenso für $\dot{L}N=\dot{N}(t_0)$ als für $\dot{L}\dot{M}N=\dot{N}(t_0)$. Im ersten Falle, in $\dot{L}\dot{M}N=\dot{N}(t_2')$, ist $t_0<t_2'$; im zweiten Falle, in $\dot{L}N=\dot{N}(t_1')$, ist $t_1'<t_0$. Nach Satz 60 genügt also schon das Zeitintervall (t_1', t_2') den Bedingungen des Satzes 61.

Satz 62. Ist $[\dot{L}, \dot{M}]N$ in einer Menge von Augenblicken der Zeit in N, die einen Grenzwert t_0 hat, dann ist $[\dot{L}, \dot{M}]N$ auch im Augenblicke t_0.

Beweis. Aus der genannten Menge greife man eine monotone unendliche Folge $\{t_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ heraus, für die $\lim_{n=\infty} t_n = t_0$ ist. Es sei $t_n < t_{n+1}$ $(<t_0)$. Wäre nicht $[\dot{L}, \dot{M}]\,N$ im Augenblicke t_0, dann wäre $\dot{L}N<\dot{L}\dot{M}N$ für $\dot{L}\dot{M}N=\dot{N}(t_0)$. Ist also $\dot{L}N=\dot{N}(t')$, so ist $t'<t_0$. Nun sei t_m ein Element von $\{t_n\}$, so dass $t'<t_m<t_0$ ist. Dann ist $\dot{L}\dot{N}(t')<\dot{L}\dot{N}(t_m)$, genauer $\dot{L}(t')\dot{N}(t')< <\dot{L}(t_m)\dot{N}(t_m)$, also ist $\dot{L}(t')<\dot{L}(t_m)$, folglich $\dot{N}(t_0)=\dot{L}(t')\dot{M}N< <\dot{L}(t_m)\dot{M}N=\dot{L}\dot{N}(t_m)$, d. h. $t_0<t_m$, was der Voraussetzung $t_n< <t_{n+1}$ $(<t_0)$ widerspricht. Also ist $[\dot{L}, \dot{M}]N$ im Augenblicke t_0. — Ist hingegen $t_n>t_{n+1}$ $(>t_0)$ und wäre nicht $[\dot{L}, \dot{M}]N$ im Augenblicke t_0, dann wäre $\dot{L}N<\dot{L}\dot{M}N$ für $\dot{L}N=\dot{N}(t_0)$. Ist also $\dot{L}\dot{M}N=\dot{N}(t'')$, so ist $t_0<t''$. Nun sei t_p ein Element von $\{t_n\}$, so

dass $t_0 < t_p < t''$. Dann ist $\dot{L}\dot{M}\dot{N}(t'') > \dot{L}\dot{M}\dot{N}(t_p)$, genauer $\dot{L}(t'')\,\dot{M}\dot{N}(t'') > \dot{L}(t_p)\dot{M}\dot{N}(t_p)$, also ist $\dot{L}(t'') > \dot{L}(t_p)$, folglich $\dot{N}(t_0) = \dot{L}(t'')\,N > \dot{L}(t_p)N = \dot{L}\dot{N}(t_p)$, d. h. $t_0 > t_p$, was der Voraussetzung $t_n > t_{n+1} (t >_0)$ widerspricht. Also ist auch in diesem Falle $[\dot{L}, \dot{M}]\,N$ im Augenblicke t_0. Folglich gilt der Satz 62 allgemein.

Satz 63. Ist $[\dot{L}, \dot{M}]N$, bzw. nicht $[\dot{L}, \dot{M}]N$ in einer Menge von Augenblicken, die in einem Zeitintervalle (t_1, t_2) der Zeit in N überall dicht ist, dann ist in jedem, bzw. in keinem Augenblicke dieses Zeitintervalls $[\dot{L}, \dot{M}]N$.

Beweis. Da jeder Wert von t in (t_1, t_2) Grenzwert der Menge ist, folgt der Satz 63 unmittelbar aus Satz 62, bzw. 61.