

Sur la relation  
entre la dynamique des fluides compressibles  
et celle des fluides incompressibles.

Par

BASILE DEMTCHENKO.

1. **Généralités.** En parlant de la relation entre la dynamique des fluides compressibles et celle des fluides incompressibles, nous avons en vue les mouvements permanents plans, irrotationnels et infrasonores. Au sujet de cette dernière restriction, rappelons que les mouvements des fluides compressibles peuvent être de deux catégories ayant des propriétés tout-à-fait différentes, selon que la vitesse du fluide est inférieure ou supérieure à celle du son. Dans le premier cas le mouvement s'appelle infrasonore et est régi par des équations du type elliptique. Dans le deuxième cas le mouvement s'appelle supersonore et est caractérisé par des équations du type hyperbolique.

Les mouvements supersonores sont actuellement assez bien étudiés, mais les problèmes relatifs à ces mouvements sont tout-à-fait différents de ceux des fluides incompressibles. A propos de ces mouvements nous renvoyons aux travaux classiques de M. J. Hadamard (Leçons sur la théorie des ondes. Paris 1904), aux belles recherches des savants de l'école de Göttingen (Prandtl, Meyer, Steichen etc.) et enfin aux nombreuses études plus récentes dont on trouvera un aperçu général dans le volume VII de Handbuch der Physik, Geiger und Scheel.

Les mouvements infrasonores sont relativement moins étudiés. Cependant c'est justement dans ce cas là qu'on trouve des analogies frappantes avec la dynamique des fluides incompressibles. Nous devons signaler à ce propos une circonstance curieuse qui paraît tout-à-fait exceptionnelle dans l'état actuel de

la collaboration internationale des savants. Nous avons en vue un mémoire fondamental paru en russe, il y a trente ans, dans les Annales scientifiques de l'Université de Moscou (Cl. Phys. Math., Fasc. 21, 1904. p. 1 à 121) et traitant des jets gazeux. Dans ce mémoire dû à un grand savant russe, M. A. Tchapligne, on trouve une méthode élégante permettant de résoudre complètement et rigoureusement plusieurs problèmes relatifs aux mouvements des gaz avec formation de surfaces de glissement. Cependant ce mémoire, d'un intérêt capital, a été complètement ignoré à l'étranger jusqu'à ce jour, malgré d'assez nombreuses recherches parues à ce sujet. Nous sommes obligés de constater aussi que toutes ces recherches n'aboutissent qu'à des résultats bien médiocres en comparaison de ceux obtenus par M. A. Tchapligne. Nous nous proposons ici, en donnant un aperçu général de la question, d'attirer l'attention particulièrement sur les travaux du savant russe.

Rappelons brièvement quelques notions fondamentales relatives aux écoulements fluides.

2. **Équations fondamentales.** Le mouvement étant permanent et irrotationnel les équations du mouvement prennent la forme

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont le potentiel des vitesses et la fonction du courant,  $\rho$  est la densité du fluide et  $\rho_0$  la densité qui correspond à la vitesse nulle.

A ces équations il faut adjoindre:

1° L'équation caractéristique ou la loi suivant laquelle varie la pression en fonction de la densité

$$(2) \quad p = p(\rho).$$

2° L'équation de pression qu'on peut écrire sous la forme différentielle suivante

$$(3) \quad dp = -\frac{1}{2} \rho dq^2,$$

où  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$  est la vitesse du fluide. En substituant l'expression de la pression donnée par l'équation caractéristique et en intégrant, on trouve la densité en fonction de la vitesse

$$(4) \quad \rho = \rho_0 f(q^2).$$

La vitesse du son  $c$  qui joue un rôle fondamental dans ce qui suit, est donnée par la formule

$$(5) \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\frac{1}{2} \rho \frac{dq^2}{d\rho} = -\frac{1}{2} \frac{f(q^2)}{f'(q^2)}.$$

L'équation caractéristique se réduit pratiquement soit à la loi isothermique ou loi de Mariotte

$$(6) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const.},$$

soit à la loi adiabatique ou loi de Laplace

$$(7) \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{const.}$$

Dans le premier cas nous avons

$$(6') \quad \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{q}{c_0}\right)^2}, \quad c^2 = c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0}$$

et dans le deuxième

$$(7') \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{q}{c_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = c_0^2 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{q}{c_0}\right)^2\right].$$

Les mouvements infrasonores, comme nous l'avons dit, sont ceux où  $\frac{q}{c} < 1$ . Cette condition impose une limite supérieure à la vitesse qui est déterminée par l'équation

$$(8) \quad q^2 = -\frac{1}{2} \frac{f(q^2)}{f'(q^2)}.$$

Cette vitesse s'appelle vitesse critique du mouvement. Nous la désignerons par  $c^*$ . Dans le cas du mouvement adiabatique, on trouve d'après la formule (7'), en posant  $c = q = c^*$ ,

$$(9) \quad c^* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

**3. Propriétés fondamentales du potentiel et de la fonction du courant.** Le potentiel de vitesses d'un fluide compressible a plusieurs propriétés communes avec le potentiel d'un

fluide incompressible. Il est connu qu'à l'intérieur d'un fluide incompressible le potentiel ne peut avoir ni maximum ni minimum. La même propriété se retrouve dans le cas du mouvement permanent d'un fluide compressible.

Multiplions l'équation qu'on obtient en éliminant  $\psi$  du système (1) du § 2, par  $F(\varphi) dx dy$  et intégrons dans un domaine fluide  $\Omega$  limité par une surface  $\Sigma$ . En se servant de la transformation de Green on obtient

$$(1) \quad \int_{\Sigma} F(\varphi) \rho \frac{d\varphi}{dn_1} d\Sigma = - \int_{\Omega} \int F'(\varphi) \rho \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

La fonction  $F(\varphi)$  est arbitraire pour le moment. La normale  $n_1$  est dirigée à l'intérieur du fluide.

Supposons que le potentiel  $\varphi$  ait un maximum au point A. Il existe alors une surface  $\Sigma$  entourant ce point sur laquelle la fonction  $\varphi$  prend une valeur constante  $k$ . L'équation (1) donne la relation

$$(2) \quad \int_{\Sigma} \rho \frac{d\varphi}{dn_1} d\Sigma = - \int_{\Omega} \int \frac{F'(\varphi)}{F(k)} (u^2 + v^2) dx dy.$$

La dérivée normale  $\frac{d\varphi}{dn_1}$  étant positive, l'intégrale à droite est positive. Si l'on choisit la fonction  $F(\varphi)$  de manière à avoir  $\frac{F'(\varphi)}{F(k)} > 0$  l'intégrale à gauche devient négative. La relation (2) est donc impossible et, par conséquent, le potentiel ne peut pas avoir de maximum à l'intérieur du domaine liquide. Pour s'assurer que le potentiel ne peut pas avoir aussi de minimum, il suffit de poser  $\frac{F'(\varphi)}{F(k)} < 0$ .

Nous empruntons la démonstration précédente à M. Tchapligne en la modifiant légèrement. La même démonstration s'applique à la fonction du courant.

**4. Généralisation du théorème de Joukowski.** L'analogie entre les fluides compressibles et les fluides incompressibles apparaît d'une façon des plus frappantes dans le théorème fondamental de l'aérodynamique dû à Joukowski. Rappelons ce théorème. Si un corps est placé dans un courant uniforme à l'infini et si la distribution des vitesses dans le fluide incom-

pressible est régie par un potentiel cyclique continu dans tout le fluide et régulier à l'infini, la résultante des actions du fluide sur le solide est égale en valeur absolue au produit de la vitesse  $q_\infty$  du courant à l'infini, de la circulation  $\kappa$  et de la densité  $\rho$  et est normale à la vitesse du courant. Sa direction s'obtient en faisant tourner le vecteur  $\vec{q}_\infty$  de  $\frac{\pi}{2}$  en sens inverse de la circulation.

Glauert était le premier qui a démontré, en se plaçant à un point de vue assez particulier, que cette proposition a lieu aussi si la densité  $\rho$  est variable (The effect of copressibility on the lift of an Aerofoil, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, vol. 118, 1928, p. 113—119 et Reports and Memoranda n° 1135). Lamb a donné une autre démonstration mais en supposant la vitesse  $q_\infty$  petite par rapport à la vitesse du son (On the flow of a compressible fluid past an obstacle, Technical Report of the aeronautical research committee, 1928—1929, p. 76 et Reports and Memoranda n° 1156). Nous donnons dans ce paragraphe une démonstration plus générale, en nous servant d'un calcul dû à Cisotti (Rendiconti del Circolo di Palermo, 1909, II, voir aussi M. H. Villat, Aperçus théoriques sur la résistance des fluides, Paris, 1920, p. 21 — 23).

Supposons que la vitesse  $q_\infty$  du courant à l'infini soit dirigée dans le sens positif de l'axe OX et introduisons la vitesse absolue  $q_1$  du fluide dont les composantes sont

$$(1) \quad u_1 = u - q_\infty, \quad v_1 = v.$$

Les équations du mouvement prennent la forme suivante

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial y} = q_\infty \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = q_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} - \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = q_\infty \frac{\partial v_1}{\partial x} - \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right).$$

D'autre part, sur la surface  $\Sigma$  du solide la vitesse du fluide est assujettie à être tangentielle, ce qui donne, en désignant par  $\alpha$  et  $\beta$  les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$  vers le solide

$$(4) \quad u_1 \alpha + v_1 \beta = q_\infty \alpha.$$

A l'infini la vitesse absolue étant égale à zéro, on a

$$(5) \quad u_1 = v_1 = 0.$$

Sur un cercle  $L$  de rayon très grand, on obtient, en se servant de la formule (3) § 2 et en négligeant les quantités d'ordre supérieur à un,

$$(6) \quad \begin{aligned} p - p_\infty &= -\frac{\rho_0}{2} \int_{q_\infty^2}^{q^2} f(q^2) dq^2 = -\rho_0 q_\infty \int_0^{u_1} f(q_\infty^2 + 2q_\infty u_1) du_1 = \\ &= -\rho_0 q_\infty \int_0^{u_1} f(q_\infty^2) du_1 = -q_\infty \rho_\infty u_1. \end{aligned}$$

Ceci posé, il est facile de s'assurer que la résistance directe éprouvée par le solide dans le sens du mouvement est nulle. Nous calculerons la composante de la résistance normale à la direction du courant à l'infini. On obtient successivement en désignant cette composante par  $R_y$  :

$$(7) \quad \begin{aligned} R_y &= \int_{\Sigma} p \beta d\Sigma = - \int_L p \beta d\Sigma + \int_{\Omega} \int \frac{\partial p}{\partial y} d\omega = \\ &= -q_\infty \rho_\infty \int_L u_1 \beta d\Sigma + q_\infty \int_{\Omega} \int \rho \frac{\partial v_1}{\partial x} d\omega - \\ &\quad - \int_{\Omega} \int \rho \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d\omega = \\ &= -q_\infty \rho_\infty \int_L u_1 \beta d\Sigma + q_\infty \int_{\Omega} \int \rho \frac{\partial v_1}{\partial x} d\omega + q_\infty \int_{\Omega} \int v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} d\omega - q_\infty \int_{\Sigma} \rho v_1 \alpha d\Sigma = \\ &= -q_\infty \rho_\infty \int_L (u_1 \beta - v_1 \alpha) d\Sigma = -q_\infty \rho_\infty \int_L (u dx + v dy). \end{aligned}$$

La dernière intégrale est égale à la circulation  $\kappa$  autour du corps.

On obtient donc finalement

$$(8) \quad R_y = -q_\infty \rho_\infty \kappa.$$

C'est bien la formule de Joukowsky dont nous avons parlé au début de ce paragraphe.

Il est important de remarquer que nous n'avons introduit dans nos calculs aucune restriction au sujet de la grandeur de la vitesse  $q_\infty$ . Elle pourrait être aussi bien supérieure à la vitesse du son qu'inférieure à celle-ci. Les seules hypothèses que nous avons admises, c'est la continuité du mouvement et l'annulation assez rapide de la vitesse à l'infini. Ces hypothèses excluent contrairement à ce qui se passe dans le cas des fluides incompressibles, certains régimes, notamment le mouvement suprasonore.

**5. Méthodes des approximations successives et des intégrations mécaniques.** En donnant un aperçu de la mécanique infrasonore nous ne pouvons pas passer sous silence une suite de travaux consacrés aux solutions approximatives particulières.

Parmi ces solutions une des plus connues est la solution par approximations successives de Rayleigh relative au problème d'écoulement autour d'un cylindre circulaire ou d'une sphère (On the flow of compressible fluid past an obstacle, *Philosophical Mag.* vol 32 p. 1—6, 1916, et *Scientific Papers* 1911—1919 vol. VI, p. 402 — 406). En écrivant l'équation du potentiel sous la forme

$$(1) \quad \Delta^2 \varphi = \frac{1}{2c^2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial q^2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial q^2}{\partial z} \right] = f(\varphi)$$

on remplace  $\varphi$ , dans la partie à droite, par le potentiel  $\varphi_0$  relatif à un écoulement du liquide incompressible et on cherche une suite de fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  satisfaisant aux équations

$$(2) \quad \Delta^2 \varphi_1 = f(\varphi_0), \quad \Delta^2 \varphi_2 = f(\varphi_1) \dots$$

On obtient ainsi une suite de solutions plus ou moins approximatives  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ . C'est un procédé formel, car il n'est pas démontré que la suite de fonction  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  tend vers une limite.

Lamb dans un travail déjà mentionné (*Reports and Memoranda* n° 1156) a généralisé la méthode de Rayleigh en l'appliquant au problème du mouvement cyclique autour d'un cylindre circulaire.

Taylor (The flow round a body moving in a compressible fluid, Comptes rendus du 3<sup>e</sup> Congrès International de mécanique appliquée, 1930, Stockholm) a proposé d'utiliser l'analogie électro-magnétique pour résoudre l'équation de récurrence du type

$$(3) \quad \Delta^2 \varphi_n = \frac{1}{2c_{n-1}^2} \left[ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial q_{n-1}^2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \frac{\partial q_{n-1}^2}{\partial y} \right].$$

Cette équation est légèrement différente de celle de Rayleigh. La méthode de Taylor est assez ingénieuse et a été poussée jusqu'à des applications numériques tout-à-fait intéressantes.

Le problème de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire a été étudié aussi par O. Janzen qui donne une solution voisine de celle de Rayleigh en supposant la vitesse du fluide petite par rapport à la vitesse du son (Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten, Physik. Zeitschr. XIV, 1913, p. 639).

Mentionnons enfin la solution très particulière de M. Hirsch donnant quelques écoulements isothermiques des gaz. (Stodola, Dampf- und Gasmotoren, Berlin 1924, p. 804—809). La solution de Hirsch a le mérite d'être la seule solution rigoureuse d'un écoulement gazeux.

Toutes ces méthodes n'ont qu'une relation très lointaine avec la dynamique des fluides incompressibles.

**6. Transformation de Molenbroek — Tchapligne.** Cependant cette relation apparaît d'une façon éclatante dès qu'on utilise les transformations bien connues de la mécanique discontinue des fluides incompressibles. On sait que dans ce cas on prend pour variables indépendantes la quantité

$$(1) \quad \Omega = i \log q + \theta,$$

où  $\theta$  est l'angle que forme la vitesse  $q$  avec une direction fixe. et l'on exprime le potentiel complexe  $w = \varphi + i\psi$  en fonction de cette variable moyennant une représentation conforme.

Molenbroek a appliqué le premier la même transformation aux équations du mouvement des fluides compressibles (Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials, Archiv der Mathem. und Phys. Grunert-Hoppe, 1890). Tchapligne dans son mémoire déjà cité a pris cette transformation comme point de départ de ses importantes recherches.



En introduisant la variable complexe  $z = x + iy$ , on obtient facilement d'après les équations fondamentales (1) du § 2

$$(2) \quad dz = \frac{1}{q} e^{i\theta} \left( d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi \right).$$

Cette équation permet de calculer  $x$  et  $y$  si l'on connaît  $\varphi$  et  $\psi$  en fonction de  $q$  et  $\theta$ . Si l'on prend maintenant pour variables indépendantes  $q$  et  $\theta$ , on obtient

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\rho_0}{\rho} q \frac{\partial \psi}{\partial q}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= - \left( 1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \frac{\rho_0}{\rho q} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

où  $c^2$  et  $\rho$  sont des fonctions connues de  $q^2$ .

Dans une note récente (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 194, p. 1215, 1932, Paris) M. D. Riabouchinsky a indiqué une méthode d'intégration des équations (3) basée sur les analogies électriques ou hydrodynamiques. La méthode de M. Riabouchinsky est une généralisation intéressante de la méthode de M. Taylor permettant d'éviter les approximations successives.

Le caractère de la correspondance entre les plans  $z$  et  $\Omega$  est bien déterminé par le Jacobien

$$(4) \quad \frac{D(x, y)}{D(q, \theta)} = - \frac{\rho_0}{\rho q^3} \left[ \frac{\rho_0}{\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right)^2 q^2 + \left( 1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \frac{\rho_0}{\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right].$$

Le déterminant (4) ne peut donc s'annuler dans le cas du mouvement infrasonore qu'aux points où  $\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ . Le plan  $\Omega$  est toujours représentable dans ces conditions, comme dans le cas des fluides incompressibles, sur une surface de Riemann qui permet d'établir une correspondance biunivoque entre  $\Omega$  et  $z$ .

En éliminant  $\varphi$  entre les équations (3) on obtient

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\rho_0}{\rho} q \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) + \left( 1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

C'est une équation linéaire de deuxième ordre.

**7. Développement en série de Tchapligne.** En employant une méthode tout-à-fait classique on peut chercher des

solutions de l'équation (5) § 6 de la forme

$$(1) \quad \psi = z(q^2) s(\theta).$$

On obtient alors pour les fonctions  $z(q^2)$  et  $s(\theta)$  les équations ordinaires suivantes

$$(2) \quad \frac{d^2 s}{d\theta^2} = -4n^2 s,$$

$$(3) \quad \frac{d}{dq} \left( \frac{\rho_0}{\rho} q \frac{dz}{dq} \right) - \left( 1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \frac{\rho_0}{\rho} \frac{z}{q} - 4n^2 = 0.$$

où  $n$  est une constante arbitraire. L'équation (2) donne

$$(4) \quad s(\theta) = \sin(2n\theta + a_n).$$

Quant à l'équation (3) elle peut être transformée comme suit d'après la formule (5) du § 2

$$(5) \quad q^2 z''_n + \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2} \right) z'_n - \left( 1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \frac{n^2}{q^2} z_n = 0,$$

en écrivant  $z_n(q^2)$  au lieu de  $z(q^2)$ . Posons maintenant

$$(6) \quad z_n = q^{2n} y_n(q^2),$$

où  $y_n(q^2)$  est une nouvelle fonction inconnue, qui satisfait à l'équation suivante

$$(7) \quad 2c^2 q^2 y''_n + 2 \left[ (2n+1) c^2 + \frac{1}{2} q^2 \right] y'_n + n(2n+1) y_n = 0.$$

Cette équation se réduit, dans le cas où  $c$  est une constante ou une fonction linéaire de  $q^2$ , à une équation hypergéométrique de Gauss. Or comme nous l'avons vu c'est justement ce cas qui se présente d'après les lois physiques. Pour fixer les idées nous admettrons la loi adiabatique et nous écrirons l'équation (7) sous la forme

$$(7') \quad 2c_0^2 q^2 \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{c_0^2} \right] y''_n + 2c_0^2 \left[ 2n+1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c_0^2} (1 - \overline{\gamma-1} \cdot \overline{2n+1}) \right] y'_n + n(2n+1) y_n = 0.$$

Nous nous limiterons à l'intégrale de l'équation (7') qui reste régulière au point critique  $q=0$ . D'après les désignations de

Gauss on peut représenter cette intégrale sous la forme d'une série hypergéométrique

$$(8) \quad y_n(q^2) = G \left[ \alpha_n, \beta_n, 2n+1, \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{q}{c_0} \right)^2 \right],$$

où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont déterminés par les conditions

$$(9) \quad \alpha_n + \beta_n = 2n - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \alpha_n \beta_n = -\frac{n(2n+1)}{\gamma-1}.$$

En raisonnant maintenant d'une façon tout-à-fait formelle et en procédant comme dans le cas des séries de Fourier, supposons que la fonction de courant  $\psi$  soit développable en série de la forme

$$(10) \quad \psi = A + B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)} \left( \frac{q}{q_0} \right)^{2n} \sin(2n\theta + a_n).$$

Une telle série satisfait formellement, d'après ce qui a été dit, à l'équation (5) du § 6.

Supposons maintenant que le domaine du plan  $qe^{i\theta}$  se réduise à un secteur limité par deux demi-droites  $\theta = \theta_1$  et  $\theta = \theta_2$  et par un arc du cercle  $q = q_0$ . La fonction du courant  $\psi$  ayant des valeurs constantes sur les frontières, on obtient

$$(11) \quad B_n \sin(2n\theta_1 + a_n) = 0, \quad B_n \sin(2n\theta_2 + a_n) = 0,$$

$$(12) \quad A + B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2n\theta + a_n) = \text{valeurs constantes.}$$

Pour pouvoir construire formellement la fonction du courant (10) relative à ce secteur, il suffit de trouver les coefficients  $A, B, B_n$  du développement satisfaisant aux conditions (11) et (12). Or ces coefficients sont immédiatement calculables d'après les formules de Fourier. Mais, comme M. Tchapliguine l'a remarqué, ce travail devient tout-à-fait inutile si nous connaissons la fonction du courant d'un fluide incompressible relative au même domaine. En effet, cette fonction de courant, d'après la théorie des fonctions harmoniques, peut être toujours développée à l'intérieur du secteur satisfaisant aux conditions (11) en série de la forme

$$(13) \quad \psi = A + B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( \frac{q}{q_0} \right)^{2n} \sin(2n\theta + a_n),$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $B_n$  sont déterminés par les conditions (12) et (11). Par conséquent, si nous connaissons la solution du problème de l'écoulement liquide relatif au secteur  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$ ,  $q = q_0$ , nous obtiendrons une solution formelle du même problème relatif à un écoulement fluide en remplaçant simplement la série (13) par la série (10).

Le grand mérite de M. Tchaplguine consiste en ce qu'il a démontré que la série (10) converge absolument et uniformément ainsi que ses dérivées par rapport à  $q$  et  $\theta$ . La solution formelle devient ainsi une solution effective. Une fois  $\psi$  connue, on calcule le potentiel  $\varphi$  d'après les équations (3) et on obtient

$$(14) \quad \varphi = C + B \frac{\rho_0}{\rho} - B \int \frac{\rho_0}{\rho} \frac{dq}{q} - \\ - \frac{\rho_0}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( \frac{q}{q_0} \right)^{2n} \frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)} x_n(q^2) \cos(2n\theta + a_n),$$

où

$$(15) \quad x_n(q^2) = 1 + \frac{q^2}{n} \frac{y'_n}{y_n}.$$

Enfin on passe au plan  $z$  en intégrant l'équation (2) du § 6.

En se servant des méthodes classiques employées pour l'étude des fonctions hypergéométriques, on peut démontrer les propriétés fondamentales suivantes des fonctions  $y_n$  et  $x_n$  pour  $q < c^*$ .

1°  $y_n$  et  $x_n$  sont des fonctions positives décroissantes pour les indices  $n$  croissants.

2° Le quotient  $\frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)}$  croît avec l'indice.

3° Le quotient  $\frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{2n}$  décroît quand l'indice  $n$  croît.

4° Le quotient  $\frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)}$  est inférieur à  $\left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{2n}$  c'est-à-dire:

$$(16) \quad \frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)} < \left[ \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{q}{c_0} \right)^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{q_0}{c_0} \right)^2} \right]^{\frac{2n}{\gamma-1}}.$$

La dernière permet de démontrer immédiatement la convergence absolue et uniforme des séries (10) et (14). En effet,

d'après cette inégalité les termes de la série (10) sont respectivement inférieurs aux termes de la série

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \left(\frac{q}{q_0}\right)^{2n} \left[ \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{c_0^2}}{1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q_0^2}{c_0^2}} \right]^{\frac{2n}{\gamma-1}}$$

Or cette dernière converge absolument et uniformément pour  $q < q_0$  si la série (13) converge absolument et si  $q_0 < c^*$ , car on a

$$\frac{q}{q_0} \cdot \left[ \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{c_0^2}}{1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q_0^2}{c_0^2}} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} < 1.$$

Comme la série figurant dans l'expression de  $\varphi$  ne diffère de la série  $\psi$  que par la substitution des cosinus à la place des sinus et par la multiplication des termes consécutifs par les quantités positives décroissantes  $x_n (q^2)$ , la convergence absolue et uniforme de la série  $\varphi$  est évidente.

De la même manière sera démontrée la convergence absolue et uniforme des dérivées des séries (10) et (14) par rapport aux variables  $q$  et  $\theta$ , ces deux dérivées étant liées linéairement d'après les formules (3) § 6.

*Le problème posé, relatif à l'écoulement fluide, se trouve ainsi effectivement résolu par les formules (10) et (14).*

Nous renvoyons pour les détails au deuxième Chapitre du Mémoire de Tchapligne.

**8. Applications.** Supposons que

$$(1) \quad \begin{aligned} \psi &= +\frac{Q}{2} \quad \text{pour} \quad \theta = +\frac{\pi}{2} \quad \text{et pour} \quad q = q_0, \quad \theta > 0, \\ \psi &= -\frac{Q}{2} \quad \text{pour} \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et pour} \quad q = q_0, \quad \theta < 0. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que ce mouvement correspond à l'écoulement du gaz d'un récipient infini (Figure I).

Ce problème a été traité dans le cas d'un fluide incompressible, par Helmholtz.

En partant de la solution de Helmholtz on obtient

$$(2) \quad \frac{\pi}{Q} \psi = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{q}{q_0}\right)^{2n} \frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)} \sin 2n\theta.$$

En calculant ensuite  $\varphi$  et  $z$  d'après les formules (14) § 7 et (2) § 6 nous trouvons facilement le coefficient de contraction

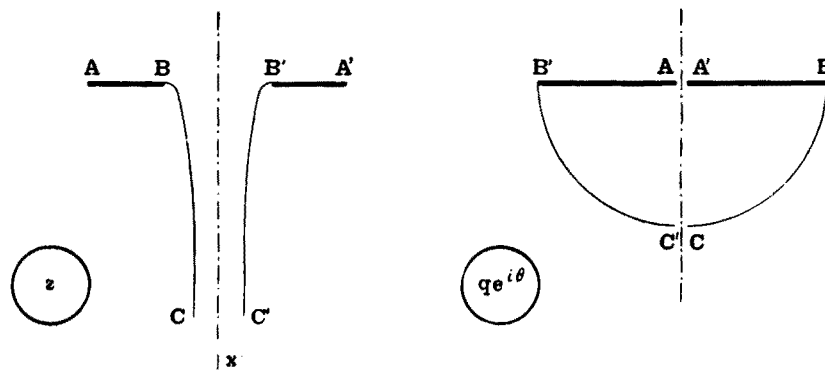


Fig. 1.

du jet, c'est-à-dire le rapport entre la largeur  $b$  du jet à l'infini et la largeur  $a$  de l'orifice. Ce coefficient a la forme

$$(3) \quad \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_n(q_0^2)}.$$

En effectuant le calcul numérique Tchaplguine trouve que, pour la valeur limite de  $q_0$  ( $q_0 = c^*$ ), le coefficient de contraction est égal à

$$(4) \quad \frac{b}{a} = 0,74 \dots$$

Pour un fluide incompressible, ce coefficient est égal, comme il est connu à

$$(5) \quad \frac{b}{a} = 0,61 \dots$$

Il y a donc une augmentation du coefficient de contraction d'environ 21%.

De la même manière on peut résoudre un autre problème classique relatif à la résistance d'un segment rectiligne placé

normalement au courant infini. Les plans  $z$  et  $qe^{i\theta}$  correspondants sont représentés sur la figure II.

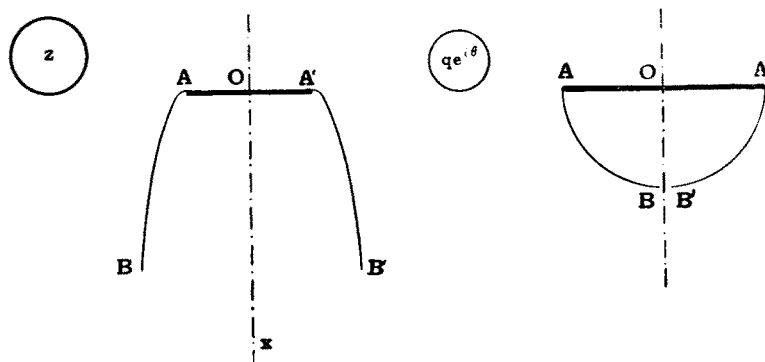


Fig. II.

En partant de la solution relative à l'écoulement du fluide incompressible, on trouve

$$(6) \quad \psi = A \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{q}{q_0}\right)^{2n} \frac{y_n(q^2)}{y_n(q_0^2)} \sin 2n\theta,$$

où  $A$  est une constante. Il n'est pas difficile maintenant de calculer la résistance  $R$  éprouvée par la lame. Cette résistance est donnée par la formule suivante

$$(7) \quad R = l\rho_{\infty}q_{\infty}^2 \frac{\pi}{\pi + 32 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{4n^2-1} x_n(q_{\infty}^2)},$$

où  $l$  est la largeur de la lame et  $q_{\infty}$  et  $\rho_{\infty}$  sont la vitesse et la densité à l'infini. Dans le cas limite  $q_{\infty} = c^*$  on obtient

$$(8) \quad \frac{R}{l\rho_{\infty}q_{\infty}^2} = 0,58 \dots$$

au lieu de

$$\frac{R}{l\rho_{\infty}q_{\infty}^2} = 0,44 \dots$$

pour un liquide incompressible.

9. **Mouvements lents.** La solution rigoureuse de M. Tchapline exposée dans les paragraphes précédents prouve d'une

façon évidente que les méthodes de la mécanique des fluides incompressibles sont applicables aussi à l'étude des fluides compressibles. On se heurte dans cette généralisation à plusieurs difficultés dont la principale est l'absence des fonctions harmoniques. Or cette difficulté se trouve justement écartée quand on se limite aux mouvements lents, c'est-à-dire aux mouvements dont les vitesses ne dépassent pas une certaine limite.

Développons la fonction  $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{f(q^2)}$  en série au voisinage du point  $q = 0$ . D'après la formule (5) du § 2 on obtient

$$(1) \quad \frac{1}{f^2} = 1 + \frac{q^2}{c_0^2} + \frac{q^4}{c_0^4} R(q^2),$$

où  $c_0^2$  est la vitesse du son correspondant à la vitesse nulle. Le terme  $R(q^2)$  reste fini pour  $q = 0$ .

En suivant une ingénieuse méthode de M. Tchapligne exposée dans son Mémoire sur les jets gazeux, nous transformons les équations (3) du § 6 en prenant pour variables indépendantes les quantités

$$(2) \quad \sigma = \sigma_1 + \int_a^q \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dq}{q}, \quad \theta = \arctg \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

On obtient alors

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = K \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$(4) \quad K = \frac{1 + 2q^2 \frac{f'(q^2)}{f(q^2)}}{[f(q^2)]^2}.$$

Pour que le coefficient  $K$  soit identiquement égal à 1, il faut que la fonction  $f(q^2)$  satisfasse à la relation

$$(5) \quad \frac{1}{f^2} = 1 + Aq^2,$$

$A$  étant une constante. Mais pour cela, il faut que l'équation caractéristique du gaz soit de la forme

$$(6) \quad p - p_0 = \frac{\rho_0^2}{A} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)$$



ce qui ne correspond à aucune loi physique. On ne peut donc satisfaire à la condition (5) qu'approximativement. Par exemple, si dans le développement (1) on néglige les termes à partir de ceux du quatrième ordre, on obtient bien une relation du type (5) avec  $A = \frac{1}{c_0^2}$ . Mais cette approximation ne sera valable évidemment que si le rapport  $\frac{q}{c_0}$  ne dépasse pas dans tout le domaine fluide une certaine limite. Nous appellerons les mouvements des gaz satisfaisant à cette condition *mouvements lents* et nous nous bornerons à leur étude.

Dans le cas de la détente adiabatique on a, d'après la formule (7') du § 2

$$(7) \quad K = \frac{1 - \frac{q^2}{c^{*2}}}{\left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{q^2}{c^{*2}}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}, \quad c^{*2} = \frac{2}{\gamma+1} c_0^2, \quad \gamma = 1,4.$$

Pour  $\frac{q}{c^*} = 0,3; 0,4$  et  $0,5$  on a respectivement  $K = 0,996; 0,988$  et  $0,966$  ce qui justifie pleinement notre approximation.

Introduisons la variable complexe  $\Omega = \theta - i\sigma$ . Le potentiel complexe  $w = \varphi + i\psi$  est d'après (3) une fonction analytique de  $\Omega$ . On peut donc effectuer la représentation conforme des plans  $\Omega$  et  $w$  sur le même plan auxiliaire, comme dans le cas des fluides incompressibles; sur le demi-plan supérieur  $t = t_1 + it_2$  par exemple, si le domaine  $\Omega$  est simplement connexe.

La fonction  $\Omega(t)$  étant construite, la vitesse et la densité sont données par les formules suivantes qu'on obtient en substituant (5) dans la formule (3)

$$(8) \quad \frac{1}{q} e^{i\theta} = C_1 e^{i\Omega} + C_2 e^{i\bar{\Omega}}, \quad \frac{1}{q} e^{i\theta} \frac{\rho_0}{\rho} = C_1 e^{i\Omega} - C_2 e^{i\bar{\Omega}}, \quad \bar{\Omega} = \theta + i\sigma$$

où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées d'après la condition  $q = q_1, \sigma = \sigma_1$

$$(9) \quad C_1 = \frac{e^{-\sigma_1} (\rho_1 + \rho_0)}{2q_1 \rho_1}, \quad C_2 = \frac{e^{\sigma_1} (\rho_1 - \rho_0)}{2q_1 \rho_1}.$$

La constante  $\sigma_1$  étant arbitraire, on peut admettre  $e^{-\sigma_1} = q_1$ , et alors on a

$$(10) \quad C_1 = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_1}, \quad C_2 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{2q_1^2\rho_1}.$$

En se servant de la formule (3) du § 2 on obtient pour la pression l'expression suivante

$$(11) \quad p - p_1 = -\frac{\rho_0\rho_1}{\rho_0 + \rho_1} \left[ \frac{q_1 e^{\sigma_1}}{C_1 e^{2\sigma} + C_2} - q_1^2 \right].$$

On passe au plan  $z = x + iy$  d'après la formule (2) § 6. On trouve

$$(12) \quad dz = C_1 e^{i\Omega(t)} \Phi'(t) dt + C_2 e^{i\bar{\Omega}(\bar{t})} \bar{\Phi}'(\bar{t}) d\bar{t}, \quad \bar{t} = t_1 - it_2,$$

où  $\Phi'(t) = \frac{dw}{dt}$ . En posant  $F'(t) = e^{i\Omega(t)} \Phi'(t)$ , on peut mettre cette formule sous la forme suivante

$$(13) \quad dz = C_1 F'(t) dt + C_2 \frac{[\bar{\Phi}'(\bar{t})]^2}{F'(\bar{t})} d\bar{t}.$$

Nous appellerons le plan  $z_0 = F(t)$  la base du plan  $z$ . Si le potentiel  $w$  est uniforme, il représente l'écoulement d'un fluide incompressible dans le plan de la base  $z_0$ . A la paroi  $S$  limitant le fluide compressible dans le plan  $z$  correspond une autre paroi  $S_0$  limitant le fluide incompressible dans le plan  $z_0$  de la base. Si le potentiel  $w$  est multiforme, le domaine  $z_0$  perd son sens physique, car le plan de la base ne se referme plus. Il existe une correspondance simple entre le plan du fluide compressible (plan  $z$ ) et le plan de base  $z_0$  du fluide incompressible:

1° Les vitesses  $q$  et  $q_0$  aux points conjugués des plans  $z$  et  $z_0$  sont liées d'après (8) et (10) par la formule

$$(14) \quad \frac{1}{q} = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_1} \frac{1}{q_0} + \frac{\rho_1 - \rho_0}{2q_1^2\rho_1} q_0,$$

où  $q_1$  est la vitesse aux points conjugués donnés  $z = z_1$  et  $z_0 = z_{10}$  commune aux deux plans.

2° Les angles  $\theta$  et  $\theta_0$  que forment les vitesses aux points conjugués avec une direction fixe (axe  $OX$ ) sont les mêmes:  $\theta = \theta_0$ . Cela résulte de la comparaison de la formule (14) avec la

formule

$$(15) \quad \frac{1}{q_0} e^{i\theta_0} = e^{i\Omega}.$$

3° La densité du fluide compressible est donnée en fonction de la densité  $\rho_0$  du fluide incompressible d'après (8) et (10) par la formule

$$(16) \quad \frac{1}{q} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_1} \frac{1}{q_0} - \frac{\rho_1 - \rho_0}{2q_1^2 \rho_1} q_0.$$

4° Les pressions  $p$  et  $p_0$  aux points conjugués sont liées d'après (14) par la relation

$$(17) \quad \frac{p - p_1}{q} = \frac{p_0 - p_{10}}{q_0},$$

où  $p_1$  et  $p_{10}$  sont les pressions aux points  $z_1$  et  $z_{10}$ .

5° On calcule facilement la résistance éprouvée par un segment  $AB$  de l'obstacle  $S$ . On a en désignant les composantes de la résistance par  $R_x$  et  $R_y$

$$(18) \quad \begin{aligned} R &= R_x + iR_y = \frac{1}{i} \int_{AB} (p - p_1) dz = \\ &= \frac{\rho_0 q_1}{2i} \int_{AB} \left[ e^{-\sigma_1} e^{i\Omega} - e^{\sigma_1} e^{i\bar{\Omega}} \right] \Phi'(t) dt. \end{aligned}$$

En supposant  $e^{-\sigma_1} = q_1$ , c'est-à-dire en admettant qu'aux points conjugués  $z_1$  et  $z_{10}$  des plans  $z$  et  $z_0$  les vitesses soient les mêmes, on obtient

$$(19) \quad R = \frac{\rho_0}{2i} \int_{AB} (q_1^2 e^{i\Omega} - e^{i\bar{\Omega}}) \Phi'(t) dt.$$

C'est la même résistance qu'éprouve le segment conjugué  $A_0B_0$  de la paroi de la base. Par conséquent, les résistances  $R = R_x + iR_y$  et  $R_0 = R_{x_0} + iR_{y_0}$  éprouvées par deux arcs conjugués  $AB$  et  $A_0B_0$  des frontières des domaines  $z$  et  $z_0$  sont les mêmes,  $R = R_0$ , si la densité du fluide incompressible est égale à la densité  $\rho_0$  du fluide compressible correspondant à la vitesse nulle.

6° Il y a une relation simple entre les résistances unitaires des arcs conjugués  $AB$  et  $A_0B_0$ . Désignons par  $l = z_A - z_B$  et

$l_0 = z_{0A} - z_{0B}$  les segments complexes  $AB$  et  $A_0B_0$  et par  $k = \frac{R}{l}$  et  $k_0 = \frac{R_0}{l_0}$  les résistances unitaires correspondantes. D'après les formules (11), (12) et (19) on a

$$(20) \quad k = \frac{\rho_0}{2i} \frac{q_1^2 a - b}{\frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_1} a + \frac{\rho_1 - \rho_0}{2q_1^2 \rho_1} b},$$

$$(21) \quad k_0 = \frac{\rho_0}{2i} \frac{q_1^2 a - b}{a},$$

où

$$(22) \quad a = \int_{\bar{A}B} e^{i\Omega} \Phi(t) dt, \quad b = \int_{\bar{A}B} e^{i\Omega(\bar{t})} \bar{\Phi}(\bar{t}) d\bar{t}.$$

En éliminant  $\frac{a}{b}$  entre les formules (20) et (21) on obtient la relation cherchée

$$(23) \quad k = k_0 \frac{1}{1 - \frac{ik_0}{q_1^2} \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0}}.$$

Nous voyons donc que tous les problèmes du mouvement permanent lent d'un fluide compressible dans le plan  $z$  se réduisent aux problèmes relatifs à un fluide incompressible dans le plan de la base  $z_0$ .

Dans le cas d'une lame rectiligne inclinée d'un angle  $\delta$  sur la vitesse d'un courant indéfini formant derrière l'obstacle un sillage illimité, on a la formule classique

$$(24) \quad k_0 = \frac{R}{l_0} = \frac{q^2 \rho_0}{i} \cdot \frac{\pi \cos \delta}{4 + \pi \cos \delta}.$$

D'après la formule (23) on obtient pour le liquide compressible

$$(25) \quad k = \frac{R}{l} = \frac{q^2 \rho_0}{i} \cdot \frac{\pi \cos \delta}{4 + \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \pi \cos \delta}$$

En terminant nous ne pouvons pas passer sous silence une autre méthode permettant d'étudier les mouvements lents. C'est la méthode de M. G. H. Bryan, (The effect of compressibility

on stream line motions, Reports and Memoranda, N<sup>o</sup> 555, 1918) qui donne la possibilité de se rendre compte souvent de l'influence de la compressibilité des fluides. A ce point de vue elle a l'avantage sur la méthode exposée ici. Mais elle ne permet pas d'établir une analogie aussi complète avec la mécanique des fluides incompressibles <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Le sujet traité dans ce paragraphe a été exposé par l'auteur dans deux Notes des Comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 194, 1932, p. p. 1218 et 1720. Paris).