Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionssätze der Limitierungsverfahren.

Von

J. KARAMATA.

o.) KB-en [1]) der Inversionsätze der Limitierungsverfahren nenne ich jene Bedingungen, welchen eine Folge a_n bzw. eine Funktion $f(x)$, genügen muss, damit man aus ihrer Limitierbarkeit zum Grenzwert a, auf

$$s_n \to a\,, \quad bei \quad n \to \infty,$$

bzw.

$$f(x) \to a\,, \quad bei \quad x \to \infty,$$

schliessen kann.

Wie bekannt [8], [11], [2] [2]), ist eine allgemeine Form der Bedingungen dieser Art, für Funktionen ausgedrückt:

$$(\mathrm{K}_1) \qquad \liminf_{x=\infty} \; \mathop{Min}_{x \leq x' \leq X} \{f(x')-f(x)\} \geq -w(\varepsilon) \to 0\,, \quad bei \quad \varepsilon \to 0\,,$$

wo X eine gewisse Funktion von x und ε ist, das heisst $X=X(x, \varepsilon)$. Diese Funktion hängt aber nur von der Form des Limitierungsverfahrens, und nicht von der Funktion $f(x)$ ab.

Hier möchte ich bei zwei speziellen Limitierungsverfahren zeigen, dass die KB. (K_1) etwas verallgemeinert werden kann. Es kann nämlich dieser KB. noch eine gewisse Funktion $\rho(x)$ derart zugeordnet werden, so dass

---

[1]) Für „Konvergenzbedingung" werde ich von nun ab kurz „KB." schreiben.

[2]) Siehe das Literaturverzeichnis im Anhange.

$$(\mathrm{K}_2) \quad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leq x' \leq X} \frac{1}{\rho(x)} \{\rho(x') f(x') - \rho(x) f(x)\} \geqq -w(\varepsilon)$$

mit $\qquad w(\varepsilon) = o(1)\,, \quad \textit{bei} \quad \varepsilon \to 0\,,$

auch eine KB. desselben Limitierungsverfahrens wird. (Dabei hängt $\rho(x)$ nur von $X(x, \varepsilon)$ ab).

I,o) In der Arbeit [3] habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1°. *Aus der Konvergenz des Integrals* $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$, *das heisst aus*

$$(1) \qquad \int\limits_0^x f(t)\,dt \to A\,, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty,$$

folgt dass

$$(2) \qquad f(x) \to 0\,, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty,$$

wenn die KB.

$$(3) \qquad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leq x' \leq x+\varepsilon} \{f(x') - f(x)\} > -w(\varepsilon) \to 0\,, \quad \varepsilon \to 0\,,$$

erfüllt ist.

Für den Beweis dieses Satzes wird aber die Bedingung (1) nicht völlig ausgenützt. Es genügt nämlich schon, dass

$$(4) \qquad \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \to 0\,, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty \quad \textit{und beliebig kleinem } h.$$

Dies kann aber als ein spezielles Limitierungsverfahren $M(h)$ angesehen werden; (4) sagt also aus dass $f(x)$ zum Grenzwert o, für beliebig kleines h, $M(h)$ - limitierbar ist [3]).

Nun möchte ich zeigen, dass an Stelle der KB. (3) {also der Form (K_1)} eine KB. der Form (K_2), mit $\rho(x) = e^{cx}$, gesetzt werden kann. Der zu beweisende Satz lautet also:

---

[3]) Übrigens ist das $M(h)$ - Verfahren (für beliebiges $h > 0$) equivalent mit dem Verfahren

$$(\mathrm{e}) \qquad e^{-x} \int\limits_0^x e^t f(t)\,dt \to 0\,, \quad \text{bei} \to \infty,$$

d. h. aus (4) folgt (e) und umgekehrt.

Satz 1^c. *Aus*

$$((4))\qquad \int_x^{x+h} f(t)\,dt \to 0, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty \quad \textit{und beliebig kleinem } h,$$

(was insbesonders erfüllt wird wenn $\int_0^\infty f(t)\,dt$ *konvergiert) und*

$$(5)\quad \liminf_{x=\infty} \ \mathop{Min}_{x \le x' \le x+\varepsilon} e^{-cx}\{e^{cx'}f(x') - e^{cx}f(x)\} \geq -w(\varepsilon) \to 0\,, \quad \varepsilon \to 0\,,$$

wo c eine beliebige reelle aber feste Zahl ist, folgt

$$((2))\qquad f(x) \to 0, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty\ ^{4)}.$$

Hilfsatz I. *Aus* (5) *folgt*

$$(6)\quad \liminf_{x=\infty} \ \mathop{Min}_{x \le x' \le x+\varepsilon} e^{-c(x+\varepsilon)}\{e^{c(x+\varepsilon)}f(x+\varepsilon) - e^{cx'}f(x')\} \geq$$

$$\geq -w(\varepsilon) \to 0\,, \quad \varepsilon \to 0\,,$$

(und umgekehrt).

Beweis. Es ist

$$\mathop{Min}_{x \le x' \le x+\varepsilon} e^{-c(x+\varepsilon)}\{e^{c(x+\varepsilon)}f(x+\varepsilon) - e^{cx'}f(x')\} =$$

$$= e^{-c(x+\varepsilon)}\{e^{c(x+\varepsilon)}f(x+\varepsilon) - e^{cx_0}f(x_0)\} \geq$$

$$\geq \frac{e^{cx_0}}{e^{c(x+\varepsilon)}} \mathop{Min}_{x_0 \le x' \le x_0+\varepsilon} e^{-cx_0}\{e^{cx'}f(x') - e^{cx_0}f(x_0)\}\,.$$

da $x \le x_0 \le x+\varepsilon \le x_0+\varepsilon$, und woraus (6), wegen (5), folgt.

Beweis des Satzes 1^c. *Aus*

$$e^{cx}\int_x^{x+\varepsilon} e^{-cx}\,[e^{ct}f(t) - e^{cx}f(x)]\,e^{-ct}\,dt + f(x)\,e^{cx}\int_x^{x+\varepsilon} e^{-ct}\,dt =$$

---

[4]) Wäre (4) nur für ein festes h vorausgesetzt, so möchte der Satz 1^c nicht mehr gelten, da $\int_x^{x+2\pi} \sin t\,dt = 0$ ist und, für $f(x) = \sin x$ ist (5) aber nicht (2) erfüllt.

$$=\int_{x}^{x+\varepsilon} f(t)dt$$

wird, wegen (4) und (5),

$$f(x) \leq w(\varepsilon)+o(1)\,, \quad bei \quad x \to \infty\,,$$

und woraus

(7) $$\limsup_{x=\infty} f(x) \leq 0\,,$$

folgt.

In ähnlicher Weise folgt aus

$$f(x+\varepsilon)\, e^{c(x+\varepsilon)} \int_{x}^{x+\varepsilon} e^{-ct}\, dt =$$

$$e^{c(x+\varepsilon)} \int_{x}^{x+\varepsilon} e^{-c(x+\varepsilon)} [e^{c(x+\varepsilon)} f(x+\varepsilon) - e^{ct} f(t)]\, e^{-ct}\, dt + \int_{x}^{x+\varepsilon} f(t)\, dt,$$

wegen (4) und (6), dass

$$f(x+\varepsilon) \geq -w(\varepsilon)+o(1)\,, \quad bei \quad x \to \infty\,.$$

Also ist

$$\liminf_{x=\infty} f(x) \geq 0\,,$$

was, mit (7), die Behauptung (2) ergibt.

Der hier gegebene Beweis stellt eine Vereinfachung des in [3] gegebenen Beweises des Satzes 1^0 dar.

1,1) Was den Zusammenhang der KB-en (3), d. h. (5, $c=0$), und (5, $c \neq 0$) betrifft so sei bemerkt dass sie im allgemeinen nicht ineinander enthalten sind. Sie werden aber gleichbedeutend falls noch $f(x)=O(1)$, $x \to \infty$, wird. Denn, aus

$$e^{-cx}\{e^{cx'} f(x') - e^{cx} f(x)\} = \{f(x') - f(x)\} + (e^{c(x'-x)} - 1)\, f(x')\,,$$

wegen

$$-M \leq f(x) \leq M\,,$$

wird

$$(8) \qquad e^{-cx}\{e^{cx'}f(x')-e^{cx}f(x)\} \gtrless \{f(x')-f(x)\}+|e^{c\varepsilon}-1|M\,,$$

falls $x \leq x' \leq x+\varepsilon$ ist.

Insbesonders sind also diese KB-en, im Zusammenhange mit (4), gleichbedeutend.

Aus (8) folgt noch dass (5, $c>0$) erfüllt wird wenn (3) gilt und $f(x)>O(1)$ ist.

Umgekehrt wird aber, im allgemeinen, (3) nicht erfüllt wenn (5, $c>0$) gilt, obgleich schon aus (5, $c>0$), $f(x)>O(1)$ folgt, was auch durch den Beispiel $f(x)=x(a+\sin x)$, $a>1$, ersichtlich ist, in welchem Falle die KB. (5, $c>0$) mit $c=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ {sogar in der Form (9″)} erfüllt ist, nicht aber (3), d. h. (5, $c=0$).

Also liefert die KB. (5), ausser dem Fall $c=0$, einige weitere KB-en, von welchen hier noch einige Spezialfälle erwähnt sein mögen.

Die KB. (5) wird z. B. erfüllt wenn zwei Konstanten $c \geq 0$ und $C \geq 0$ existieren, so dass

$$(9) \qquad e^{cx}\{f(x)+C\} \quad \textit{nicht abnimmt}\,,$$

oder (bei $M \geq 0$) so dass

$$(9') \qquad e^{cx}\left\{f(x)+\frac{M}{c}\right\}-\frac{M}{c} \quad \textit{nicht abnimmt}\,.$$

(Für $c=0$, enthält namlich (9′) die Bedingung (9)).

Dass (9′) in (5) enthalten ist geht aus folgendem hervor; ist $x \leq x' \leq x+\varepsilon$, und gilt (9′) so wird

$$e^{cx'}f(x')-e^{cx}f(x) \geq -\frac{M}{c}\,e^{cx}\,(e^{c(x'-x)}-1) \geq -e^{cx}\,M\,\frac{e^{c\varepsilon}-1}{c}\,,$$

was also (5) mit $w(\varepsilon)=M\,\frac{e^{c\varepsilon}-1}{c}$ darstellt.

Ist weiter $f(x)$ differenzierbar, so ist (9′) gleichbedeutend mit

$$(9'') \qquad cf(x)+f'(x) \geq -M\,,$$

was eine weitere KB. darstellt, und welche ich schon in [3] betrachtet habe.

Ausser den Sätzen, wo aus der Konvergenz des Integrals

(1) auf (2) zu schliessen ist (wie z. B. in [4]), kommt die KB. der Form (5) auch in anderen Sätzen tauberscher Art vor. So ist sie z. B. in der Form (9) im Heilbronn-Landauschen Satze (vergleiche etwa [9], S. 525, Fussnote [2])) zu finden, wo sie aber auch in der allgemeinen Form (5) gilt.

Es sei hier noch bemerkt, dass sich der Satz 1^c in ganz analoger Weise auch dann beweisen lässt, wenn in (5) die Funktion e^{cx} durch eine allgemeinere Funktion $\rho(x)$ ersetzt wird, die nur der Bedingung

$$\rho(x)\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\frac{dt}{\rho(t)} \geq a > 0 ,$$

(oder, falls $\rho(x)$ nicht abnimmt: $\rho(x+\varepsilon)=O\{\rho(x)\}$, oder auch $\rho'(x)=O\{\rho(x)\}$), zu genügen braucht.

2,0) Als zweites Beispiel werde ich noch die Inversion des Abelschen Limitierungsverfahrens betrachten[5]) welche, in der Integralform ausgedrückt, lautet wie bekannt [6]):

Satz 2⁰. *Sei $f(x)$ von beschränkter Schwankung im jeden endlichen Intervall und konvergiere*

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sigma x}\, d\{f(x)\} \quad \textit{für} \quad \sigma>0 .$$

Aus

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sigma x}\, d\{f(x)\} \to 0 , \quad \textit{bei} \quad \sigma \to 0 , \tag{10}$$

und

$$\liminf_{x=\infty} \ \operatorname{Min}_{x\leq x'\leq x(1+\varepsilon)} \{f(x')-f(x)\} \geq -w(\varepsilon) \to 0 , \quad \varepsilon \to 0 , \tag{11}$$

folgt

$$f(x) \to 0 , \quad \textit{bei} \quad x \to 0 . \tag{12}$$

---

[5]) Für die Inversion des C-Verfahrens, hat schon E. Landau ([10], Satz X, Seite 125) eine KB. dieser Form betrachtet, und zwar den Spezialfall wo $\rho(x)\ f(x)$ nicht abnehmen soll.

[6]) Vergleiche etwa [5] S. 33—34, Satz A, wo aber die Formel (14) statt „$A(x) \sim x^{\sigma} L(x)$" wie folgt „$A(x) \sim \dfrac{x^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)} L(x)$" lauten soll; oder auch [12] S. 339, Satz II.

In diesem Satze kann wieder die KB. (11) {der Form (K_1)} durch eine entsprechende KB. der Form (K_2) ersetzt werden, wo insbesonders $\rho(x)=x^c$ gesetzt werden kann.

Ich werde aber zugleich diesen Satz für eine etwas allgemeinere Funktion $\rho(x)$ beweisen, nämlich:

Satz 3. *Alles wie in Satz 2⁰, jedoch statt* (11)

$$(13)\quad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq x(1+\varepsilon)} \frac{\rho(x')\,f(x')-\rho(x)\,f(x)}{\rho(x)} \geq -w(\varepsilon)\to 0\,,\quad \varepsilon\to 0\,,$$

wo die Funktion $\rho(x)$ *nicht abnehmen soll, das heisst*

$$(14)\qquad \rho(x)\leq\rho(x+h)\,,\quad h>0\,,$$

und folgenden Bedingungen genügen muss:

$$(15)\qquad \rho(\lambda x)=O\{\rho(x)\}\,,\quad \textit{bei}\quad x\to\infty\quad \textit{und ein}\quad \lambda>1\,,$$

und

$$(16)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\rho\left(\frac{x}{\lambda^\nu}\right)=O\{\rho(x)\}\,,\quad \textit{bei}\quad x\to\infty\quad \textit{und ein}\quad \lambda>1\,,\qquad n=1+\left[\frac{lg x}{lg\lambda}\right].$$

Dem Beweis dieses Satzes schicke ich folgende Hilfsätze vor.

Hilfsatz 2. *Sei* $1+\varepsilon=\lambda$ *gesetzt, aus* (13) *folgt*

$$(17)\quad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq\lambda x} \frac{\rho(\lambda x)\,f(\lambda x)-\rho(x')\,f(x')}{\rho(\lambda x)} \geq -w(\varepsilon)\to 0\,,\quad \varepsilon\to 0\,.$$

Beweis. Es ist

$$\operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq\lambda x} \frac{\rho(\lambda x)\,f(\lambda x)-\rho(x')\,f(x')}{\rho(\lambda x)} = \frac{\rho(\lambda x)\,f(\lambda x)-\rho(x_0)\,f(x_0)}{\rho(\lambda x)} \geq$$

$$\geq \frac{\rho(x_0)}{\rho(\lambda x)} \operatorname*{Min}_{x_0\leq x'\leq\lambda x} \frac{\rho(x')\,f(x')-\rho(x_0)\,f(x_0)}{\rho(x_0)}\,,$$

da $x\leq x_0\leq\lambda x\leq\lambda x_0$, und woraus (17), wegen (13) und (14) folgt.

Hilfsatz 3. *Aus* (13) *und* (16) *folgt*

(18) $$f(x) > O(1)\,, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty\,^{7)}.$$

Beweis. Sei $\lambda > 1$ und n das kleinste Ganze so dass $\frac{x}{\lambda^n} \leq 1$ ist, so wird wegen (13)

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda^{\nu-1}}\right) f\left(\frac{x}{\lambda^{\nu-1}}\right) - \rho\left(\frac{x}{\lambda^{\nu}}\right) f\left(\frac{x}{\lambda^{\nu}}\right) \geq -M\rho\left(\frac{x}{\lambda^{\nu}}\right), \textit{ für jedes } x \geq 0.$$

Wird hier $\nu = 1, 2, \ldots n$ gesetzt und hierauf addiert, so folgt dass

$$f(x) \geq -\frac{M}{\rho(x)} \sum_{\nu=1}^{n} \rho\left(\frac{x}{\lambda^{\nu}}\right) + \frac{1}{\rho(x)}\, \rho\left(\frac{x}{\lambda^{\nu}}\right) f\left(\frac{x}{\lambda^{\nu}}\right)$$

ist, was wegen (16) mit (18) gleichbedeutend ist.

Hilfsatz 4 *Aus* (10) *folgt*

(19) $$\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma x} f(x)\, dx \to 0\,, \quad \sigma \to 0\,;$$

wobei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $f(o) = 0$ *gesetzt worden ist.*

Beweis. Es ist

$$J(X) = \int_0^X e^{-\sigma x}\, d\,\{f(x)\} = \sigma \int_0^X e^{-\sigma x} f(x)\, dx + e^{-\sigma X} f(X\;;$$

wegen der Existenz von $\lim\limits_{X=\infty} J(X)$, wird aber

$$e^{-\sigma X} f(X) = e^{-\sigma X} \int_0^X e^{\sigma x}\, d\,\{J(x)\} =$$

[7]) Die Bedingung (16) kommt nur in diesem Hilfsatze vor, und zwar nur um (18) erhalten zu können. — Hier möchte ich aber ausdrücklich betonen dass diese Bedingung (16) völlig ausgelassen werden kann. Nämlich, wie im Spezialfalle $\rho(x) \equiv 1$, folgt auch allgemein (18) aus (10), (13) und (14), $\{$es folgt sogar dass $f(x) = O(1)$ ist$\}$. Den schwerfälligen Beweis dieser Tatsache möchte ich hier auslassen, um so mehr da für die in 2,1) und 2,2) betrachtete spezielle Funktionen $\rho(x)$ der Satz 3 (mit der Bedingung (18)) schon ausreicht.

Was den Beweis betrifft, so kann er analog wie derjenige des Satzes A meiner Arbeit [7] geführt werden.

$$=J(X)-\sigma e^{-\sigma X}\int\limits_0^X e^{\sigma x} J(x)\,dx \to 0, \quad bei \quad X\to\infty,$$

woraus also, wegen (10), die Behauptung (19) folgt.

Um nun den Satz 3 zu beweisen, benütze ich einen Spezialfall des Hauptsatzes 1 meiner Arbeit [5] (S. 28—29), welcher lautet:

Sei $F(t)\geq 0$, $t\geq 0$, und existiere

$$\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} F(t)\,dt \quad \textit{für} \quad \sigma>0.$$

Aus

$$\sigma\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} F(t)\,dt \to A, \quad bei \quad \sigma\to 0,$$

folgt

$$\sigma\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} g(\sigma t)\,F(t)\,dt \to A\int\limits_0^\infty e^{-t} g(t)\,dt, \quad bei \quad \sigma\to 0,$$

für jede beschränkte und R-integrable Funktion $g(t)$.

Wegen (18) ist $f(x)+M>0$; wird also in diesem Satze $F(x)=f(x)+M$ gesetzt, so folgt wegen (19) dass

$$\sigma\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} g(\sigma t)\,f(t)\,dt \to 0, \quad bei \quad \sigma\to 0.$$

Wird hier

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0<t<1, \\ e^t & ,, \quad 1\leq t\leq 1+\varepsilon, \\ 0 & ,, \quad 1+\varepsilon<t<\infty, \end{cases}$$

und $\sigma=1/x$ gesetzt, so folgt weiter:

$$(20) \qquad \frac{1}{x}\int\limits_x^{x(1+\varepsilon)} f(t)\,dt=o(1), \quad bei \quad x\to\infty.$$

Von (20) ausgehend, wird nun der Beweis des Satzes 3 dem Prinzip nach derselbe wie derjenige des Satzes 1^c.

Sei

$$\frac{\rho(x)}{x}\int\limits_x^{x(1+\varepsilon)}\frac{dt}{\rho(t)}=r(x),$$

gesetzt, so ist wegen (14) und (15)

$$r(x)\geq a>0. \tag{21}$$

Dann folgt erstens, aus

$$\frac{1}{x}\int\limits_x^{x(1+\varepsilon)}\{\rho(t)\,f(t)-\rho(x)\,f(x)\}\,\frac{dt}{\rho(t)}+r(x)\,f(x)=\frac{1}{x}\int\limits_x^{x(1+\varepsilon)}f(t)\,dt,$$

wegen (13) und (20), dass

$$f(x)\,r(x)\leq w(\varepsilon)\,r(x)+o(1),\quad bei\quad x\to\infty,$$

ist, woraus wegen (21)

$$\limsup_{x\to\infty} f(x)\leq 0 \tag{22}$$

folgt.

Zweitens, folgt aus, wenn $\lambda=1+\varepsilon$ ist,

$$\frac{1}{x}\int\limits_x^{x\lambda}\{\rho(\lambda x)\,f(\lambda x)-\rho(t)\,f(t)\}\,\frac{dt}{\rho(t)}-\frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)}\,r(x)\,f(\lambda x)=-\frac{1}{x}\int\limits_x^{x\lambda}f(t)\,dt,$$

wegen (17) und (20), dass

$$f(\lambda x)\,\frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)}\,r(x)\geq -\,w(\varepsilon)\,\frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)}\,r(x)+o(1),\quad bei\quad x\to\infty,$$

ist. Daraus folgt aber

$$\liminf_{x=\infty} f(x)\geq 0,$$

was mit (22) die Behauptung (12) ergibt.

2,1) Wird jetzt der Spezialfall $\rho(x)=x^c$ betrachtet, so sind in diesem Falle die Bedingungen (14), (15) und (16), wenn $c>0$ ist, erfüllt. Da aber im Falle $c=0$ der Satz 2^0 hervorgeht, so ist der folgende Satz für $c \geqq 0$ giltig.

Satz 2^c. *Alles wie in 2^0 jedoch statt* (11)

$$(23) \qquad \liminf_{x=\infty} \min_{x \leqq x' \leqq x(1+\varepsilon)} x^{-c} \{x'^c f(x') - x^c f(x)\} \geqq -w(\varepsilon) \to 0\,,$$

bei $\varepsilon \to 0$ *und* $c \geqq 0$.

Was den Zusammenhang zwischen den KB-en (11) d. h (23, $c=0$) und (23, $c>0$) betrifft, so kann dasselbe bemerkt werden, was in **1,1)** über (3) und (5) gesagt war. Wird nämlich in der KB. (23) x bzw. x', durch e^x bzw. $e^{x'}$, $f(e^x)$ durch $f(x)$ und $1+\varepsilon$ durch e^{ε} ersetzt, so nimmt diese die Form (5) an.

Hier seien also nur noch die entsprechenden Spezialfälle der KB. (23) angeführt, und zwar:

$$(24) \qquad x^c \left\{ f(x) + \frac{M}{c} \right\} - \frac{M}{c} \quad \textit{soll nicht abnehmen,} \quad c \geqq 0\,, \quad M \geqq 0\,,$$

oder

$$c f(x) + x f'(x) > O(1)\,, \quad \textit{bei} \quad x \to \infty\,.$$

2,2) Im Gegenteil zum Satz 1^c, (welcher auf Reihen angewendet, ohne Interesse wird) gelten die Sätze 3 und 2^c auch für Reihen, da die vorkommenden Integrale die Dirichletschen und Potenzreihen als Spezialfälle enthalten.

Sei also

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \to \infty\,, \quad \textit{bei} \quad n \to \infty\,,$$

und

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

und sei für $f(x)$ folgende Treppenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0 \leqq x < \lambda_1 \\ s_n & \;\;\text{„} \quad \lambda_n \leqq x < \lambda_{n+1}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \end{cases}$$

genommen, so geht (10) in

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu e^{-\sigma \lambda_\nu} \to 0\,, \quad \textit{bei} \to 0\,,$$

über.

Was die Funktion $\rho(x)$ betrifft, so ist es, in diesem Falle am besten geeignet auch für diese eine Treppenfunktion zu nehmen, und zwar mit denselben Sprungstellen wie bei der Funktion $f(x)$, also von der Form:

$$\rho(x)=\begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0\leq x<\lambda_1 \\ \rho_n & \quad ,, \quad \lambda_n\leq x<\lambda_{n+1}, \quad n=1,2,\ldots, \end{cases}$$

Die Folge $\{\rho_n\}$ darf man dann so wählen dass die Bedingungen (14), (15) und (16) erfüllt werden.

Hier werden wir aber nur den Speziallfall betrachten wo

$$\rho_n=\lambda_n^c, \quad c>0, \quad n=1,2,\ldots,$$

ist. Dann wird die Bedingung (15) erfüllt wenn

$$\lambda_{n+1}=O(\lambda_n), \quad \textit{bei} \quad n\to\infty,$$

ist, in welchem Falle aber auch (16) erfüllt ist, da wegen $\rho(x)\leq x^c$ und $c>0$,

$$\frac{1}{\rho(x)}\sum_{\nu=1}^{n}\rho\left(\frac{x}{\lambda^\nu}\right)\leq\frac{x^c}{\rho(x)}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^{-\nu c}\leq\left(\frac{\lambda_{\mu+1}}{\lambda_\mu}\right)^c\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^{-\nu c},$$

wird, wo $\lambda_\mu\leq x\leq\lambda_{\mu+1}$ ist, und woraus die Bedingung (16) folgt.

In diesem Spezialfalle, auf Dirichletsche Reihen angewendet, lautet also der Satzt 3 wie folgt:

Satz 4. *Sei*

$$\lambda_n<\lambda_{n+1}\to\infty, \quad n\to\infty, \tag{25}$$

und

$$\lambda_{n+1}=O(\lambda_n), \quad \textit{bei} \quad n\to\infty. \tag{26}$$

Aus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu e^{-\sigma\lambda_\nu}\to 0, \quad \textit{bei} \quad \sigma\to 0, \tag{27}$$

folgt

$$s_n=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu\to 0, \quad \textit{bei} \quad n\to\infty, \tag{28}$$

wenn

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{\lambda_n\leq\lambda_{n'}\leq\lambda_n(1+\varepsilon)} \frac{\lambda_{n'}^c s_{n'}-\lambda_n^c s_n}{\lambda_n^c}\geq -w(\varepsilon)\to 0, \quad \varepsilon\to 0, \quad c\geq 0^{8)}. \tag{29}$$

[8]) Für $c=0$, ist die Bedingung (16) nicht mehr erfüllt. In diesem Falle aber, folgt (18) schon aus (10) und (29, $c=0$), (Siehe Fussnote [7])) wie ich dies in [6] gezeigt habe. Also gilt (29) für $c\geq 0$.

Wird ausser (26) noch

$$(30) \qquad \lambda_{n+1}/\lambda_n \to 1\,, \quad bei \quad n \to \infty$$

vorausgesetzt, so kann man der KB. (29) noch die folgende spezielle Form geben:

$$(31) \qquad \lambda_n^c\, s_n - \lambda_{n-1}^c\, s_{n-1} \geq -M\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\,, \quad c \geq 0\,.$$

Ist $c=0$, so stellt (31) die bekannte Hardy-Littlewoodsche KB. dar [1]. Ist aber $c \geq 0$, so ist (31), wegen (30), in der KB. (29) enthalten, wie dies aus folgendem hervorgeht.

Für $0 \leq c \leq 1$, sei in

$$1-x \leq \frac{1-x^c}{c}\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,,$$

$x=\lambda_{n-1}/\lambda_n$ gesetzt, so dass

$$\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \leq \frac{\lambda_n^c - \lambda_{n-1}^c}{c}\,,$$

entsteht, und woraus wegen (31),

$$\lambda_n^c\, s_n - \lambda_{n-1}^c\, s_{n-1} \geq -\frac{M}{c}(\lambda_n^c - \lambda_{n-1}^c)\,,$$

wird. Sei hier statt n: $n+1$, $n+2, \ldots n'$, $(\lambda_n \leq \lambda_{n'} \leq \lambda_n(1+\varepsilon))$ gesetzt, und hierauf addiert so entsteht die *KB. (29), mit* $w(\varepsilon) = \frac{M}{c}\{(1+\varepsilon)^c - 1\}$.

Für $c > 1$, gelingt der Beweis in derselben Weise, wenn man, von

$$x-1 \leq \frac{x^c - 1}{c}\,, \quad x \geq 1\,,$$

ausgehend, wo $x=\lambda_n/\lambda_{n-1}$ zu setzen ist, die Bedingung

$$\lambda_n^c\, s_n - \lambda_{n-1}^c\, s_{n-1} \geq -M\lambda_{n-1}^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

betrachtet, welche, wegen (30) mit (31) gleichbedeutend ist.

Die KB. (29) enthält aber auch KB-en für Dirichletsche Reihen bei welchen die Folge $\{\lambda_n\}$ statt (30) nur der Bedingung (26) zu genügen braucht.

So ist z. B. leicht einzusehen dass, wenn eine Konstante $c>0$ und eine Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$ existieren, derart dass

$$\lambda_n^c(s_n+\varepsilon_n) \quad \textit{nicht abnimmt},$$

dies, im Falle wo statt (30) nur (26) erfüllt ist, auch eine KB. darstellt.

3) In allen vorstehenden Sätzen ist die Limitierbarkeit zum Grenzwert 0 betrachtet. Ist aber $f(x)$ zum Grenzwert $s \neq 0$ limitierbar, so ist in diesen Sätzen $f(x)-s$ statt $f(x)$ zu setzen.

Damit man aber, in diesem Falle unter der KB der Form (K_2), aus der Limitierbarkeit an die Konvergenz schliessen kann, muss die Funktion $\rho(x)$ noch einer weiteren Bedingung unterworfen werden. Nämlich, die Funktion $\rho(x)$ darf nicht abnehmen und in **1,1**) muss die Bedingung

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\rho(x+\varepsilon)}{\rho(x)} \to 1, \quad \textit{bei} \quad 0<\varepsilon \to 0,$$

in **2,0**) und **2,2**) die Bedingung

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)} \to 1, \quad \textit{bei} \quad 1<\lambda \to 1,$$

erfüllt sein.

Beograd, 16-VII-1933.

LITERATUR-NACHWEIS.

1. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some theorems concerning Dirichlets series. Messanger of Math. **43**, 134—147 (1914).
2. J. Karamata, Un théorème général d'inversion des procédés de sommabilité. Verhandlungen des Internatiolen Math. — Kongresses, Zürich II, 147—149 (1932).
3. — —, Quelques théorèmes d'inversion relatifs aux integrales et aux séries I. Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 3, 5—14 (1932).
4. — —, Application de quelques théorèmes d'inversion à la sommabilité exponentielle. C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris, **193**, 1156—1158 (1931).
5. — —, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. Journal für die reine und angew. Math., **146**, 27—39 (1931).
6. — —, Über einen Satz von Vijayaraghavan. Math. Zeit. **34**, 737—740 (1932).
7. — —, Über die O-Inversionssätze der Limitierungsverfahren. Math. Zeit. (im Druck).
8. E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood. Rend. d. Circolo Math. di Palermo, **3** , 370—372 (1913).
9. — —, Über Dirichletsche Reihen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Nr. **1**, 525—527 (1932).
10. — —, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace Matematyezno-Fizyezne **21**, 97—117 (1910).
11. R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Math. Zeit. **22**, 89—152 (1925).

12. O. Szász, Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art. Sitzb. d. Bayerschen Akad. der Wissenschaften, Math.-naturwiss. Abt. 325—340 (1929).