# UNE REMARQUE RELATIVE AUX QUELQUES THÉORÈMES DE SOMMABILITÉ

B. BAJŠANSKI (Beograd)

**1.** Soit $T$ un procédé permanent de sommation. Pour quelles valeurs de $c$, $c \neq 0$,

$$T-\lim (cx_n + (1-c)\, x_{n-1}) = x \tag{1}$$

implique

$$T-\lim x_n = x\,? \tag{2}$$

La condition n'est connue que dans des cas particuliers. Ainsi, si le procédé de sommation se réduit à la convergence, la condition est $\mathrm{Rl}\, c > 1/2$ ([1], 3. Teil, Aufgabe (48)). Dans le cas des sommations d'Abel et de Nörlund, la condition est la même [2]. Mais, s'il s'agit des sommations d'Euler-Knopp et de Borel, les conditions deviennent $\mathrm{Rl}\, c > \dfrac{1}{2\,|q+1|}$ et $\mathrm{Rl}\, c > 0$, respectivement [3].

Nous allons donner ici une condition nécessaire pour $c$ dans le cas général. Cette condition montre que les résultats cités sont les meilleurs, sauf pour la sommation d'Abel pour laquelle la condition $\mathrm{Rl}\, c > 1/2$ peut être remplacée par $\mathrm{Rl}\, c \geqslant 1/2$. Aussi nous allons donner dans des cas particuliers des conditions suffisantes pour $c$, de sorte que les résultats connus seront unifiés dans deux théorèmes.

**2.** THÉORÈME 1. *Soit $S$ la region dans laquelle le procédé de sommation $T$ prolonge analytiquement les séries entières des fonctions $(1-z)^{-k}$, $k=1,2,\ldots$ Alors, si (1) implique (2), le point $1-1/c$ se trouve dans $S$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que

(i) le point $1-1/c$ appartient à la région dans laquelle le procédé $T$ prolonge analytiquement la série géométrique, et que

(ii) si le point $1-1/c$ appartient à la région dans laquelle le procédé de sommation $T$ prolonge la série entière de la fonction $(1-z)^{-n}$ la série entière de la fonction $(1-z)^{-n-1}$ sera aussi prolongée par le procédé $T$ au point $1-1/c$.

(i) Soit $x_n=(1-1/c)^n$, $n=0,1,\ldots$. Alors $cx_n+(1-c)x_{n-1}=0$, $n=1,2,\ldots$. Donc $T-\lim x_n=T-\lim(1-1/c)^n=0$, c'est-à-dire la série géométrique est prolongée par le procédé $T$ au point $1-1/c$.

(ii) Soit $s_\nu^{(n)}(z)$ la $\nu$-ième somme partielle de la série entière de la fonction $(1-z)^{-n}$. Si $z_0=1-1/c$, alors

$$T-\lim s_\nu^{(n)}(z_0)=\frac{1}{(1-z_0)^n},$$

c'est-à-dire

$$T-\lim\frac{s_\nu^{(n)}(z_0)}{1-z_0}-\frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}. \tag{3}$$

Comme

$$s_\nu^{(n)}(z_0)=\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{n+\mu-1}{\mu}z^\mu,$$

on aura

$$s_\nu^{(n)}(z)=s_\nu^{(n+1)}(z)-z\,s_{\nu-1}^{(n+1)}(z).$$

Alors, d'après (3), la suite

$$t_\nu=cs_\nu^{(n+1)}(z_0)+(1-c)\,s_{\nu-1}^{(n+1)}(z_0)=\frac{s_\nu^{(n+1)}(z_0)-z_0\,s_{\nu-1}^{(n+1)}(z_0)}{1-z_0}=\frac{s_\nu^{(n)}(z_0)}{1-z_0}$$

est $T$-sommable vers $(1-z_0)^{-n-1}$. Comme (1) implique (2), la suite $s_\nu^{(n+1)}(z_0)$ sera aussi $T$-sommable vers $(1-z_0)^{-n-1}$, c'est-à-dire le point $z_0=1-1/c$ appartient à la région dans laquelle le procédé $T$ donne un prolongement analytique de la fonction $(1-z)^{-n-1}$.

**3.** Avant de formuler les théorèmes 2 et 3 nous allons donner une

*Définition.* Le procédé de sommation $T$ satisfait à la condition de Mertens (à la condition mixte de Mertens) si de

$$T-\lim\sum_{n=0}^{\infty}u_n=u$$

et de la $T$-sommabilité absolue (de la convergence absolue) de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ vers $v$ il s'ensuit que le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est $T$-sommable vers $uv$.

La condition de Mertens est satisfaite, par exemple, pour les procédés d'Abel, d'Euler-Knopp ([4], p. 237), d'Euler-Perron [5], de Borel ([4], p. 238, 246). La condition mixte de Mertens est satisfaite, par exemple, pour les procédés de Nörlund. Pour le constater il suffit de poser $a_0 = 1$, $a_n = 0$, pour $n \geqslant 1$ dans le théorème suivant de Mears [6]:

Si

$$|N(a_n)| - \sum_{k=0}^{\infty} u_k = U$$

et

$$N(b_n) - \sum_{k=0}^{\infty} v_k = V,$$

alors

$$N(c_n) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k = UV$$

où $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ est le produit de Cauchy des séries $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ et où

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Les exemples donnés montrent que les résultats cités au début de cet article sont contenus dans les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 2. *Si le procédé de sommation $T$ satisfait à la condition de Mertens, et si le point* $1 - 1/c$ *appartient à la région dans laquelle le procédé $T$ donne un prolongement analytique, absolument convergent, de la série géométrique, alors* (1) *implique* (2).

THÉORÈME 3. *Si le procédé de sommation satisfait à la condition mixte de Mertens, et si* $\mathrm{Rl} > 1/2$ *((c'est-à-dire si le point* $1 - 1/c$ *est situé à l'intérieur du cercle-unité) alors* (1) *implique* (2).

*Démonstration* des théorèmes 2 et 3. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ est le produit de Cauchy des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} [c\,(x_n - x_{n-1}) + (1-c)(x_{n-1} - x_{n-2})].$$

**4.** Pour les procédés d'Abel, d'Euler-Knopp, de Borel et pour quelques procédés de Nörlund (par exemple, pour les procédés de Cesàro), la condition suffisante pour $c$ donnée par le théorème 2 ou 3, respectivement, est équivalente à la condition nécessaire donnée par le théorème 1. Il faut remarquer, cependant, qu'il n'est pas ainsi pour un procédé de Nörlund qui somme toutes les dérivées de la série géométrique dans quelque point $e^{\vartheta i}$: la question si (1) implique (2) pour $c=\dfrac{1}{1-e^{\vartheta i}}$ reste non-résolue dans ce cas.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Polya, G. und Szegö, G. — Aufgaben und Lehrsätze aus d r Analysis, Bd. I. Berlin 1933.

[2] Vučković, V, — Deux théorèmes de type mercerien. *Publ. Inst. Math. Ac. Serbe Sci.* **8** (1955), 55—58.

[3] Bojanić, R. — Quelques problèmes de sommation. *Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine* **6** (1955), p. 9—17. (en serbe, resumé en franfais)

[4] Hardy, G. H. — Divergent series. Oxford 1949.

[5] Macphail, M. S. — The extended Euler-Knopp transformation. *Trans. Roy. Soc. Canada.* Sect. III (3) **46**, (1952), 39—43.

[6] Mears, F. M. — Some multiplication theorems for the Norlund Mean. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41** (1935), 875—880.