ÜBER DEN PERRONSCHEN SATZ IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN

S. ALJANČIĆ (Belgrad)

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird der Perronsche Satz über das Verhalten der Lösung einer linearen Differenzengleichung derart präzisiert, dass man asymptotische Relationen einführt.

Es sei

$$f(x+n)+a_1(x)\,f(x+n-1)+\cdots+a_n(x)\,f(x)=0 \tag{1}$$

eine lineare Differenzengleichung, deren Koeffizienten $a_m(x)$, $(m=1,\ldots,n;$ $x=0,1,\ldots)$ folgende Bedingungen erfüllen

$$\lim_{x=\infty} a_m(x)=a_m, \quad a_m(x)\neq 0, \quad a_m\neq 0; \tag{2}$$

$$\theta(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n), \tag{3}$$

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|.$$

Nach O. Perron [4] existiert dann ein System von Fundamentallösungen $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ so dass

$$\lim_{x=\infty}\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)}=\lambda_\nu \qquad (\nu=1,\ldots,n).$$

Unlängst gab M. A. Evgrafov [1] einen neuen und einfachen Beweis des Perronschen Satzes, der zu neuen Untersuchungen Anlass gab. So bewiesen A. O. Gelfond und I. M. Kubenskaja [2] den folgenden Satz:

Wenn die Koeffizienten der Gleichung (1), ausser (2) und (3), noch folgenden Bedingungen genügen:

$$|a_m(x)-a_m|\leqslant\varphi(x) \qquad (m=1,\ldots,n),$$

$$\lim_{x=\infty}\varphi(x)=0, \quad 0<\varphi(x+1)\leqslant\varphi(x), \quad \lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}=1, \tag{4}$$

dann existiert ein System von Fundamentallösungen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ so dass

$$\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)} = \lambda_\nu + O[\varphi(x)] \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

In dieser Arbeit untersuchen wir was man aus dem asymptotischen Verhalten von $a_m(x) - a_m$ $(x \to \infty)$ über dasjenige von $\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)} - \lambda_\nu$ schliessen kann. Dabei lassen wir in asymptotischen Beziehungen als Vergleichsfunktionen die sogenannten langsam sich änderden Funktionen (LA-Funktionen) zu. Nach J. Karamata [3], $L(t)$ ist eine LA-Funktion wenn sie stetig und vom konstanten Vorzeichen ist und wenn

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty \text{ für jedes } \lambda > 0. \tag{5}$$

Von den wichtigeren Eigenschaften der LA-Funktionen, führen wir die folgenden an:

(6) Der Grenzübergang (5) gilt gleichmässig in λ, $0 < a \leqslant \lambda \leqslant b < \infty$.

(7) Wenn $\eta > 0$, dann $t^\eta L(t) \to \infty$ und $t^{-\eta} L(t) \to 0$, $t \to \infty$.

(8) Für $\eta > 0$ ist

$$\operatorname*{Max}_{t \leqslant \tau < \infty} \{\tau^{-\eta} L(\tau)\} \sim t^{-\eta} L(t), \qquad t \to \infty,$$

d.h. $t^{-\eta} L(t)$ gestattet eine monotone Majorante mit demselben asymptotischen Verhalten.

SATZ. *Es mögen die Koeffizienten der Gleichung* (1) *den Bedingungen* (2) *und* (3) *genügen und es sei*

$$a_m(x) = a + A_m x^{-\alpha_m} L_m(x) + o[x^{-\alpha_m} L_m(x)] \qquad (A_m \neq 0,\ \alpha_m \geqslant 0,\ m = 1, \ldots, n)$$

wobei $L_m(x)$ LA-Funktionen sind, die im Falle $\alpha_m = 0$ monoton gegen Null abnehmen. Man setze

$$\alpha = \operatorname{Min}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Sind von den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ genau r $(r \leqslant n)$ gleich α:

$$\alpha_{m_1} = \alpha_{m_2} = \cdots = \alpha_{m_r} = \alpha$$

und dabei

$$L_{m_1}(x) \sim L_{m_2}(x) \sim \cdots \sim L_{m_r}(x) \sim L(x),$$

dann existiert ein System von Fundametallösungen $f_1(x),\ldots,f_n(x)$, *so dass*

$$\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)}=\lambda_\nu+K_\nu(r)\,x^{-\alpha}L(x)+o\,[x^{-\alpha}L(x)] \qquad (\nu=1,\ldots,n)$$

mit

$$K_\nu(r)=K_\nu(m_1,\ldots,m_r)=-\frac{1}{\theta'(\lambda_\nu)}\sum_{\rho=1}^{\nu}A\,m_\rho\,\lambda_\nu^{n-m_\rho}.$$

Wir bemerken dass unsere Annahme über das Verhalten von $a_m(x)-a_m$ implizit voraussetzt dass die $a_m(x)-a_m$ zuletzt $(x\to\infty)$ konstantes Vorzeichen haben. Ebenso folgt, laut (6), (7) und (8), aus unseren Annahmen die Existenz einer monotonen Majorante $\varphi(x)$ für die $|a_m(x)-a_m|$, welche den Bedigungen (4) des Gelfond-Kubenskajaschen Satze genügt.

Der Beweis unseres Satzes folgt demselben Gedankengang wie derjenige von Gelfond und Kubenskaja. Abweichungen treten erst dann auf wo man Abschätzungen durch asymptotische Relationen ersetzt. Der klarheit halber geben wir hier einen vollständigen Beweis.

(i) Auf Grund des Perronschen Satzes existiert ein System von Fundamentallösungen $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ der Gleichung (1) so dass

$$\lim_{x=\infty}\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)}=\lambda_\nu \quad (\nu=1,\ldots,n).$$

Es ist also

$$f_\nu(x+1)=[\lambda_\nu+\gamma_\nu(x+1)]\,f_\nu(x),$$

wobei

$$|\gamma_\nu(x)|\leqslant\delta(x)\downarrow 0,\ x\to\infty.$$

Folglich ist

$$f_\nu(x)=f_\nu(x_0)\prod_{k=x_0+1}^{x}\{\lambda_\nu+\gamma_\nu(k)\}=C\lambda_\nu^x\prod_{k=1}^{x}\left\{1+\frac{\gamma_\nu(k)}{\lambda_\nu}\right\}=\lambda_\nu^x\,e^{o(x)}, \tag{9}$$

da wegen $\gamma_\nu(x)\to 0,\ x\to\infty$,

$$\left|\log\prod_{k=1}^{x}\left\{1+\frac{\gamma_\nu(k)}{\lambda_\nu}\right\}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{x}\left|\log\left(1+\frac{\gamma_\nu(k)}{\lambda_\nu}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{|\lambda_\nu|}\sum_{k=1}^{x}|\gamma_\nu(k)|=o(x).$$

(ii) Wir nehmen ein festes ν ins Auge und führen das System von Funktionen $u_s^\nu(x)$ $(s=1,\dots,n)$ ein, mittels

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
f_\nu(x) &= u_1^\nu(x)+\dots+u_n^\nu(x),\\
f_\nu(x+1) &= \lambda_1 u_1^\nu(x)+\dots+\lambda_n u_n^\nu(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
f_\nu(x+n-1) &= \lambda_1^{n-1}u_1^\nu(x)+\dots+\lambda_n^{n-1}u_n^\nu(x).
\end{aligned}
$$

Um diseses System von Gleichungen nach $u_s^\nu(x)$ $(s=1,\dots,n)$ aufzulösen, führen wir

$$\theta_s(\lambda)=\frac{\theta(\lambda)}{\lambda-\lambda_s}=\lambda^{n-1}+C_{1,s}\lambda^{n-2}+\dots+C_{n-1,s}$$

ein, multiplizieren die Gleichungen (10) mit $C_{n-1,s},\dots,C_{1,s},C_{0,s}=1$ der Reihe nach und erhalten nach Addition

$$(11)\qquad \sum_{q=0}^{n-1} C_{q,s}f_\nu(x+n-q-1)=\sum_{k=1}^{n}\theta_s(\lambda_k)\,u_k^\nu(x)=\theta'(\lambda_s)\,u_s^\nu(x).$$

Auf Grund von (9) ist aber

$$\sum_{q=0}^{n-1} C_{q,s}f_\nu(x+n-q-1)=f_\nu(x)\sum_{q=0}^{n-1}C_{q,s}\prod_{k=x+1}^{x+n-q-1}[\lambda_\nu+\gamma_\nu(k)]$$

$$=f_\nu(x)\left(\theta_s(\lambda_\nu)+\sum_{q=0}^{n-1}C_{q,s}\left\{\prod_{k=x+1}^{x+n-q-1}[\lambda_\nu+\gamma_\nu(k)]-\lambda_\nu^{n-q-1}\right\}\right).$$

was zusammen mit (11)

$$(12)\qquad u_s^\nu(x)=\frac{f_\nu(x)}{\theta'(\lambda_s)}\left(\theta_s(\lambda_\nu)+\sum_{q=0}^{n-1}C_{q,s}\left\{\prod_{k=x+1}^{x+n-q-1}[\lambda_\nu-\gamma_\nu(k)]-\lambda_\nu^{n-q-1}\right\}\right)$$

gibt. Da

$$\frac{\theta_s(\lambda_\nu)}{\theta'(\lambda_s)}=\begin{cases}1, & s=\nu,\\ 0, & s\neq\nu,\end{cases}$$

folgt aus (12)

$$u_s^\nu(x)=\begin{cases}f_\nu(x)\;[1+O(\delta(x))], & s=\nu,\\ f_\nu(x)\;O(\delta(x)), & s\neq\nu,\end{cases}$$

so dass

$$(13)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{u_s^\nu(x)}{u_\nu^\nu(x)}=0,\quad s\neq\nu.$$

Auf Grund der Definition der Zahlen $C_{q,s}$, erhält man aus (11)

$$u_s^\nu(x+1) - \lambda_s u_s^\nu(x) = \frac{1}{\theta'(\lambda_s)}\left\{\sum_{q=0}^{n-1} C_{q,s} f_\nu(x+n-q) - \lambda_s \sum_{q=0}^{n-1} C_{q,s} f_\nu(x+n-q-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta'(\lambda_s)}\left\{f_\nu(x+n) + \sum_{q=1}^{n} [C_{q,s} - \lambda_s C_{q-1,s}]\ f_\nu(x+n-q) - \lambda_s C_{n-1,s} f(x)\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta'(\lambda_s)}\left\{f_\nu(x+n) + \sum_{q=1}^{n} a_q f(x+n-q)\right\},$$

so dass, laut (1),

$$u_s^\nu(x+1) - \lambda_s u_s^\nu(x) = -\frac{1}{\theta'(\lambda_s)} \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q(x) f_\nu(x+n-q)$$

mit

$$\varepsilon_q(x) = a_m(x) - a_m.$$

Drückt man die $f_\nu(x+n-q)$ mittels (10) aus, so findet man

$$u_s^\nu(x+1) - \lambda_s u_s^\nu(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,s}(x)\ u_k^\nu(x) \tag{14}$$

wobei

$$\varepsilon_{k,s}(x) = -\frac{1}{\theta'(\lambda_s)} \sum_{q=1}^{n} \lambda_k^{n-q} \varepsilon_q(x)$$

gesetzt ist.

Nach Voraussetzung des Satzes über das asymptotische Verhalten der $\varepsilon_m(x)$ und gemäss (7), ist wenn $x \to \infty$

$$\varepsilon_{k,s}(x) \sim -\frac{1}{\theta'(\lambda_s)} \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_k^{n-m_\rho} \varepsilon_{m_\rho}(x) \sim K_{k,s}(r)\, x^{-\alpha} L(x) \quad (k=1,\ldots,n) \tag{15}$$

mit

$$K_{k,s}(r) = K_{k,s}(m_1,\ldots,m_r) = -\frac{1}{\theta'(\lambda_s)} \sum_{\rho=1}^{r} A_{m_\rho} \lambda_k^{n-m_\rho}.$$

Auf Grund von (13) und (15) folgt also aus (14)

$$u_s^\nu(x+1) - \lambda_s u_s^\nu(x) = u_\nu^\nu(x)\ \psi_s^\nu(x) \tag{16}$$

wobei

$$\psi_s^\nu(x) \sim \varepsilon_{\nu,s}(r) \sim K_{\nu,s}(r)\, x^{-\alpha} L(x). \tag{17}$$

Für $s=\nu$ ist speziell

$$\frac{u_\nu^\nu(x+1)}{u_\nu^\nu(x)}=\lambda_\nu+\psi_\nu^\nu(x) \tag{18}$$

mit

$$\psi_\nu^\nu(x)\sim K_\nu(r)\,x^{-\alpha}\,L(x),\quad K_\nu(r)=K_{\nu,\nu}(x). \tag{19}$$

(iii) Um die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (16) zu erhalten, konstruiren wir zuerst eine partikuläre Lösung von (16) und zwar getrennt für $s<\nu$ und $s>\nu$.

Ist, erstens, $s<\nu$ also $|\lambda_s|>|\lambda_\nu|$, setze man

$$\begin{aligned} v_s^\nu(x) &= -\sum_{k=0}^{\infty} u_\nu^\nu(x+k)\,\psi_s^\nu(x+k)\,\lambda_s^{-k-1} \\ &= -\lambda_s^{-1}u_\nu^\nu(x)\,\psi_s^\nu(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_\nu^\nu(x+k)}{u_\nu^\nu(x)}\,\frac{\psi_s^\nu(x+k)}{\psi_s^\nu(x)}\,\lambda_s^{-k}. \end{aligned} \tag{20}$$

Da nach (17) und (6)

$$\frac{\psi_s^\nu(x+1)}{\psi_s^\nu(x)}\to 1,\quad x\to\infty,$$

ist wegen $|\lambda_s|>|\lambda_\nu|$

$$\left|\frac{\psi_s^\nu(x+1)}{\psi_s^\nu(x)}\right|\leqslant\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{1/4},\qquad x>x_0,$$

und für $q=2, 3,\ldots,k$ erst recht

$$\left|\frac{\psi_s^\nu(x+q)}{\psi_s^\nu(x+q-1)}\right|\leqslant\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{1/4},\qquad x>x_0,$$

so dass

$$\left|\frac{\psi_s^\nu(x+k)}{\psi_s^\nu(x)}\right|\leqslant\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{k/4},\qquad x>x_0.$$

Anderseits, ist nach (18)

$$\frac{u_\nu^\nu(x+k)}{u_\nu^\nu(x)} = \prod_{p=1}^{k} \frac{u_\nu^\nu(x+p)}{u_\nu^\nu(x+p-1)} = \lambda_\nu^k \prod_{p=1}^{k} \left\{1 + \frac{\psi_\nu^\nu(x+p-1)}{\lambda_\nu}\right\},$$

und da gemäss (19)

$$\left|\frac{\psi_\nu^\nu(x)}{\lambda_\nu}\right| < \left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{1/4} - 1, \quad x > \bar{x}_0,$$

und für $p=2,3,\ldots,k$ erst recht

$$\left|\frac{\psi_\nu^\nu(x+p-1)}{\lambda_\nu}\right| < \left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{1/4} - 1, \quad x > \bar{x}_0,$$

finden wir

$$\left|\frac{u_\nu^\nu(x+k)}{u_\nu^\nu(x)}\right| < |\lambda_\nu|^k \left|\frac{\gamma_s}{\lambda_\nu}\right|^{k/4}, \qquad x > \bar{x}_0.$$

Es ist also $(x > \mathrm{Max}\,\{x_0, \bar{x}_0\})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{u_\nu^\nu(x+k)}{u_\nu^\nu(x)} \frac{\psi_s^\nu(x+k)}{\psi_s^\nu(x)} \lambda_s^{-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\lambda_\nu}{\lambda_s}\right|^{k/4} < \infty,$$

dh. die zweite Reihe in (20) konvergiert gleichmässig in x. Infolgedessen ist nach (18) und (17)

$$\lim_{x=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_\nu^\nu(x+k)}{u_\nu^\nu(x)} \frac{\psi_s^\nu(x+k)}{\psi_s^\nu(x)} \lambda_s^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x=\infty} \left\{ \frac{u_s^\nu(x+k)}{u_\nu^\nu(x)} \frac{\psi_s^\nu(x+k)}{\psi_s^\nu(x)} \right\} \lambda_s^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_\nu^k \lambda_s^{-k} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_\nu},$$

so dass nach (20) und (17)

$$(21) \qquad v_s^\nu(x) \sim -\frac{1}{\lambda_s - \lambda_\nu} u_\nu^\nu(x) \psi_\nu^\nu \sim \frac{K_{\nu,s}(r)}{\lambda_\nu - \lambda_s} u_\nu^\nu(x)\, x^{-\alpha} L(x) \quad (s < \nu).$$

Es ist leicht einzusehen dass $v_s^\nu(x)$ eine partikuläre Lösung $(s < \nu)$ von (16) ist.

Ist, zweitens, $s > \nu$ also $|\lambda_s| < |\lambda_\nu|$, so stellt

$$(22) \qquad v_s^\nu(x) = \lambda_s^{x-1} \sum_{k=0}^{x-1} u_\nu^\nu(k)\, \psi_s^\nu(k)\, \lambda_s^{-k}$$

eine partikuläre Lösung von (16) dar. Um das asymptotische Verhalten von $v_s^\nu(x)$ zu ermitteln, schreiben wir $v_s^\nu(x)$ in der Form

$$(23) \qquad v_s^\nu(x) = \lambda_s^{-1}\, u_\nu^\nu(x)\, \psi_s^\nu(x) \sum_{q=1}^{x} \lambda_\nu^q \frac{u_\nu^\nu(x-q)}{u_\nu^\nu(x)} \; \frac{\psi_s^\nu(x-q)}{\psi_s^\nu(x)} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right)^q$$

und bemerken dass, ähnlich wie oben, wegen $|\lambda_s| < |\lambda_\nu|$,

$$\left| \lambda_\nu^q \frac{u_\nu^\nu(x-q)}{u_\nu^\nu(x)} \right| = \left| \lambda_\nu^q \prod_{p=1}^{q} \frac{u_\nu^\nu(x-p)}{u_\nu^\nu(x-p+1)} \right|$$

$$= \prod_{p=1}^{q} \left| 1 + \frac{\psi_\nu^\nu(x-p)}{\lambda_\nu} \right|^{-1} \leqslant M_0 \left| \frac{\lambda_\nu}{\lambda_s} \right|^{q/4}$$

und

$$\left| \frac{\psi_s^\nu(x-q)}{\psi_s^\nu(x)} \right| = \prod_{p=1}^{q} \left| \frac{\psi_s^\nu(x-p)}{\psi_s^\nu(x-p+1)} \right| \leqslant M_1 \left| \frac{\lambda_\nu}{\lambda_s} \right|^{q/4},$$

wo M_0 und M_1 von $x-q$ frei sind.

Es ist also

$$\sum_{q=1}^{x} \left| \lambda_\nu^q \frac{u_\nu^\nu(x-q)}{u_\nu^\nu(x)} \; \frac{\psi_s^\nu(x-q)}{\psi_s^\nu(x)} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right)^q \right| \leqslant M \sum_{q=1}^{x} \left| \frac{\lambda_s}{\lambda_\nu} \right|^{q/2} < M \sum_{q=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_s}{\lambda_\nu} \right|^{q/2} < \infty,$$

und folglich

$$\lim_{x=\infty} \sum_{q=1}^{x} \lambda_\nu^q \frac{u_\nu^\nu(x-q)}{u_\nu^\nu(x)} \; \frac{\psi_\nu^\nu(x-q)}{\psi_\nu^\nu(x)} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right)^q =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \lim_{x=\infty} \left\{ \lambda_\nu^q \frac{u_\nu^\nu(x-q)}{u_\nu^\nu(x)} \; \frac{\psi_s^\nu(x-q)}{\psi_s^\nu(x)} \right\} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right)^q$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right)^q = \frac{\lambda_s}{\lambda_\nu - \lambda_s}.$$

Auf Grund von (23) erhält man für $s > \nu$

$$(21_2) \qquad v_s^\nu(x) \sim \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_s} u_\nu^\nu(x)\,\psi_s^\nu(x) \sim \frac{K_{s,\nu}(r)}{\lambda_\nu - \lambda_s} u_\nu^\nu(x)\, x^{-\alpha} L(x)$$

also dasselbe Resultat wie für $s < \nu$.

Bezeichnet $v_s^\nu(x)$ den Ausdruck (20) bzw. (22), je nachdem $s < \nu$ bzw. $s > \nu$ ist, hat Gleichung (16) folgende allgemeine Lösung

$$u_s^\nu(x) = v_s^\nu(x) + C_s^\nu \lambda_s^x, \quad s \neq \nu.$$

Schreiben wir diese in der Form

$$(24) \qquad \frac{u_s^\nu(x)}{u_\nu^\nu(x)} = \frac{v_s^\nu(x)}{u_\nu^\nu(x)} + C_s^\nu \frac{\lambda_s^x}{u_\nu^\nu(x)}$$

und lassen wir $x \to \infty$, so strebt für $s < \nu$, wegen (13) und (21_1), die linke Seite und das erste Glied auf der rechten gegen Null. Da nach (18), $u_\nu^\nu(x) = \lambda_\nu^x e^{o(x)}$ [siehe (9)] und $|\lambda_s| > |\lambda_\nu|$, muss $C_s^\nu = 0$. Es ist also gemäss (21_1)

$$(25_1) \qquad u_s^\nu(x) \sim \frac{K_{\nu,s}(r)}{\lambda_\nu - \lambda_s} u_\nu^\nu(x)\, x^{-\alpha} L(x) \qquad (s < \nu).$$

Im Falle $s > \nu$, d.h. $|\lambda_s| < |\lambda_\nu|$, ist das zweite Glied auf der rechten Seite von (24), wegen $u_\nu^\nu(x) = \lambda_\nu^x e^{o(x)}$, von der Grössenordnung $\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^x e^{o(x)}$, also nach (7) sicher gleich $o[x^{-\alpha} L(x)]$. Infolgedessen ist nach (24)

$$u_s^\nu(x) = v_s^\nu(x) + u_\nu^\nu(x)\, o[x^{-\alpha} L(x)],$$

und gemäß (21_2)

$$(25_2) \qquad u_s^\nu(x) \sim \frac{K_{\nu,s}(r)}{\lambda_\nu - \lambda_s} u_\nu^\nu(x)\, x^{-\alpha} L(x), \quad (s > \nu).$$

(iv) Zuletzt entnehmen wir, laut (10), aus dem asymptotischen Verhalten von $u_s^\nu(x)$ dasjenige von $f_\nu(x+1)/f_\nu(x)$. Es ist, nähmlich, nach (18),

(25) und (19)

$$\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)}=\frac{\sum_{s=1}^{n} u_s^\nu(x+1)}{\sum_{s=1}^{n} u_s^\nu(x)}=\frac{u_\nu^\nu(x+1)}{u_\nu^\nu(x)}\left\{1+\frac{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{u_s^\nu(x+1)}{u_\nu^\nu(x+1)}-\frac{u_s^\nu(x)}{u_\nu^\nu(x)}\right)}{\sum_{s=1}^{n}\frac{u_s^\nu(x)}{u_\nu^\nu(x)}}\right\}$$

$$=(\lambda_\nu+\psi_\nu^\nu(x))\left\{1+\frac{o[x^{-\alpha}L(x)]}{1+O[x^{-\alpha}L(x)]}\right\}$$

$$=\{\lambda_\nu+K_\nu(r)\,x^{-\alpha}L(x)+o[x^{-\alpha}L(x)]\}\{1+o[x^{-\alpha}L(x)]\}.$$

so dass

$$\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)}=\lambda_\nu+K_\nu(r)\,x^{-\alpha}L(x)+o[x^{-\alpha}L(x)].$$

(Eingegangen am 13.V.59)

LITERATUR

[1] Е ф г р а ф о в, М. А. (Evgrafov, M. A.) — Новое доказательство теоремы Перрона Ein neuer Beweis des Perronschen Satzes *Izv. Akad. Nauk SSSR*, (ser. mat.) **17** (1953), 77-82.

[2] Г е л ф о н д, А. О. и К у б е н с к а я, И. М. (Gelfond, A. O. und Kubenskaja, I. M.) — О теореме Перрона в теории разностных уравнений (Über den Perronschen Satz in der Theorie der Differenzengleichungen) *Izv. Akad. Nauk SSSR* (ser. mat.) **17** (1953), 83-86.

[3] K a r a m a t a, J. — Sur un mode de croissance régulière, *Bull. Soc. Math. France* **LXI** (1933), 55-62.

[4] P e r r o n, O. — Über einen Poincareschen Satz, *J. reine u. angew. Math.* **136** (1910), 6-64