LES VECTEURS DES COURBURES CYCLIQUES DES COURBES D'UN ESPACE RIEMANNIEN ET LEURS QUELQUES PROPRIÉTÉS

M. PRVANOVIĆ (Novi Sad)

1. *OBJET DU TRAVAIL.* — En considérant en chaque point P du sous-espace V_n d'espace riemannien V_m, un système de $m-n$ vecteurs unitaires d'espace V_m qui devaient remplir certaines conditions, T. K. Pan [2] a défini et étudié le vecteur de la première courbure relative. En partant de ce vecteur, on peut démontrer [4] qu'ils existent, en chaque point d'une courbe de V_n, deux systèmes de n vecteurs unitaires orthogonaux entre eux, les vecteurs de chaque système satisfaisant certaines équations analogues aux formules de Frenet d'une courbe de V_n.

D'autre part, W. Blaschke [1] a défini et étudié un système de courbes appartenant à la surface de l'espace euclidien à trois dimensions et jouissant de la propriété que le cercle osculateur d'une courbe du système, en chaque point de la surface, coupe une deuxième fois un cercle qui, dans le point considéré, est orthogonal à la surface. Ce système est appelé, système des courbes cycliques.

Le système des courbes cycliques d'un sous-espace d'un espace riemannien est défini et étudié dans l'article [3]. La notion du vecteur de la courbure cyclique d'une courbe quelconque du sous-espace est aussi introduite dans le même article.

Dans le présent travail, après quelques remarques à titre d'introduction, il sera démontré:

1) que le vecteur de la première courbure relative est un cas spécial du vecteur de la courbure cyclique;

2) qu'on peut, en partant du vecteur da la courbure cyclique, déduire deux systèmes d'équations analogues aux formules de Frenet, c'est à dire qu'on peut définir deux vecteurs différents da la deuxième, troisième e.t.c. courbure cyclique d'une courbe quelconque de V_n; et

3) que chaque système d'équations ainsi obtenu se transforme, par la transformation conforme d'espace, en un système d'équations de la même espèce.

2. *VECTEUR DE COURBURE CYCLIQUE D'UNE COURBE DU SOUS-ESPACE D'UN ESPACE RIEMANNIEN.* — Considérons l'espace riemannien V_n de coordonnées x^i et de la première forme fondamentale $g_{ij}\,dx^i dx^j$, plongé dans l'espace riemannien V_m de coordonnées y^α et de la première forme fondamentale $a_{\alpha\beta}\,dy^\alpha dy^\beta$ [1]. Supposons les métriques de V_n et V_m positives. Dès lors entre les coefficients des premières formes fondamentales, il existe la relation

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, y^\alpha{}_{,i}\, y^\beta{}_{,j}, \tag{2.1}$$

où l'indice derrière la virgule dénote la dérivée covariante.

Désignons par q^α le vecteur da la courbure d'une courbe C de V_n, considérée comme plongée dans V_m, et par p^i le vecteur de la corbure de C, considérée comme la courbe du sous-espace V_n. Alors, nous pouvons écrire la relation connue:

$$q^\alpha = p^i\, y^\alpha{}_{,i} + \sum_\nu \Omega_{\nu|mn} \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} N_{\nu|}{}^\alpha,$$

où${}_{\nu|}{}^\alpha$ sont les composantes contravariantes, dans V_m, d'un système de $m-n$ vecteurs unitaires orthogonaux entre eux et normaux à V_n, $\Omega_{\nu|mn}$ sont les composantes du second tenseur fondemental de V_n relatif à l'espace ambiant V_m, et s est l'arc de la courbe C.

Envisageons dans le sous-espace V_n un champ des vecteurs ζ^i; alors $\zeta^\alpha = \zeta^i y^\alpha{}_{,i}$ sont les composantes des vecteurs de ce champ relatives à l'espace ambiant V_m. En chaque point du sous-espace V_n le vecteur ζ^α et les $m-n$ normales $N_{\nu|}{}^\alpha$ déterminent un espace géodésique à $m-n+1$ dimensions. Nous l'appellerons *l'espace normal géodésique* ζ.

Considérons maintenant, un système de courbes du sous-espace V_n caractérisées par la propriété que *dans chaque point du sous-espace la projection du vecteur* $\bar{q}^\alpha = \dfrac{q^\alpha}{a_{\beta\gamma}\, q^\beta q^\gamma}$ *de la courbe du système sur le vecteur* ψ^α *est égale à la projection du vecteur* ζ^α *sur le vecteur* ψ^α, ψ^α *désignant le vecteur unitaire qui appartient tant à l'espace normal géodésique* ζ *qu'à la surface géodésique osculatrice de la courbe.*

---

[1] Dans cette note, les indices latins prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$; les indices grecs prennent les valeurs $1, 2, \ldots, m$, excepté ν, τ et σ qui varient de $n+1$ jusqu'à m.

Un tel système de courbes est [3] *le système des courbes cycliques par rapport au champ des vecteurs* ζ^i. Les équations différentielles d'un tel système des courbes ont la forme [3]:

$$p^i = \frac{1}{\xi^2}\left(\xi^i - \xi_j \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\right), \tag{2.2}$$

$\xi^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j$ désignant l'intensité du vecteur ξ^i.

On peut considérer, en chaque point d'une courbe C, qui n'appartient pas au système des courbes cycliques par rapport au champ des vecteurs ξ^i, le vecteur

$$v^i = p^i - \frac{1}{\xi^2}\left(\xi^i - \xi_j \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\right); \tag{2.3}$$

c'est *le vecteur de la courbure cyclique* [3] de C par rapport au champ des vecteurs ξ^i.

3. *LES VECTEURS DES p-IÈMES COURBURES CYCLIQUES D'UNE COURBE DE V_n*. — Considérons en chaque point P du sous-espace V_n l'ensemble de $m-n$ vecteurs unitaires $\lambda_{\tau|}^{\alpha}$ d'espace ambiant V_m, satisfaisant aux conditions suivantes: 1) ils sont fonctions des coordonnées x^i du point P et de la direction dx^i du sous-espace V_n au point P; 2) ils forment avec un ensemble quelconque de n vecteurs linéairement indépendants du sous-espace V_n, l'ensemble de m vecteurs linéairement indépendants d'espace V_m; et 3) ils coïncident avec la direction dx^i si celle-ci est la direction asymptotique du sous-espace V_n. Un ensemble de vecteurs unitaires $\lambda_{\tau|}^{\alpha}$, ainsi associé à chaque point du sous-espace V_n d'espace riemannien V_m, forme l'ensemble de $m-n$ congruences des vecteurs unitaires si $\lambda_{\tau|}^{\alpha}$ sont les fonctions de x^i seulement; mais il se compose de $m-n$ congruences des cones si $\lambda_{\tau|}^{\alpha}$ sont les fonctions à la fois de x^i et de dx^i.

On peut décomposer le vecteur $\lambda_{\tau|}^{\alpha}$ en une composante tangentielle à V_n et une composante normale à V_n, c'est à dire on peut écrire

$$\lambda_{\tau|}^{\alpha} = t_{\tau|}^{i}\, y^{\alpha}_{,i} + \sum_{\nu} l_{\nu\tau|} N_{\nu|}^{\alpha},$$

où $t_{\tau|}^{i}$ désignent les composantes contravariantes d'un vecteur de V_n.

Le remplacement du système des normales $N_{\nu|}^{\alpha}$ par l'ensemble des vecteurs $\lambda_{\tau|}^{\alpha}$, permet à T. K. Pan [2] d'introduire le vecteur de la première courbure relative par rapport à la congruence λ d'une courbe du sous-espace, c'est-à-dire le vecteur:

$$\eta^i = p^i - \sum_{\nu,\tau} \bar{l}_{\nu\tau|} K_{\nu|}\, t_{\tau|}^{i} + \sum_{\nu,\tau} \bar{l}_{\nu\tau|} K_{\nu|}\, t_{\tau|k} \frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds}, \tag{3.1}$$

où

$$K_{\nu|}=\Omega_{\nu|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds},$$

et $\bar{l}_{\nu\tau|}$ est le cofacteur de $l_{\nu\tau|}$ dans le déterminant $|l_{\nu\tau|}|$.

La courbe du sous-espace V_n dont le vecteur de la première courbure relative s'annule en chaque point, c'est à dire la courbe dont les équations différentielles sont

$$p^i=\sum\bar{l}_{\nu\tau|}K_{\nu|}t^i_{\tau|}-\sum_{\nu,\tau}\bar{l}_{\nu\tau|}K_{\nu|}t_{\tau|k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds}, \tag{3.2}$$

est appelée par T. K. Pan [2] la courbe pseudogéodésique par rapport à la congruence λ.

En comparant les équations (3.1) et (2.3), on voit que le vecteur de la première courbure relative d'une courbe C est un cas spécial du vecteur de la courbure cyclique de C. Aussi le système des courbes pseudogéodésiques est un cas spécial du système des courbes cycliques, ce qui suis des équations (3.2) et (2.2). Alors, en désignant par τ^i le champ de vecteurs ayant en chaque point la direction du vecteur $\sum\limits_{\nu,\tau}\bar{l}_{\nu\tau|}K_{\nu|}t^i_{\tau|}$ et pour l'intensité — la valeur réciproque d'intensité du vecteur $\sum\limits_{\nu,\tau}\bar{l}_{\nu\tau|}K_{\nu|}t^i_{\tau|}$, on peut dire:

ψ^α étant le vecteur unitaire qui appartient tant à l'espace normale géodésique τ^i qu'à la surface géodésique osculatrice, la projection du vecteur $\bar{q}^\alpha$ d'une courbe pseudogéodésiqus du sous-espace V_n sur le vecteur ψ^α est égale à la projection du vecteur τ^i sur le vecteur ψ^α.

Le procédé développé dans [4] ne dépend pas du vecteur $\sum\limits_{\nu,\tau}\bar{l}_{\nu\tau|}K_{\nu|}t^i_{\tau|}$. Alors, il est possible de l'élargir et d'obtenir, en partant du vecteur (2.5) de la coubure cyclique, deux systèmes d'équations analogues aux formules de Frenet. En effet, on peut exprimer le vecteur (2.3) sous la forme:

$$v^i=\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left[\Gamma^i_{jk}+\frac{1}{\xi^2}\left(\delta^r_m\,\delta^i_k-\delta^r_k\,\delta^i_m\right)\xi^m g_{rj}\right]\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds},$$

ou, en posant

$$u^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\frac{1}{\xi^2}\left(\delta^r_m\,\delta^i_k-\delta^r_k\,\delta^i_m\right)\xi^m g_{rj}, \tag{3.3}$$

sous la forme

$$v^i=\frac{d^2x^i}{ds^2}+u^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{3.4}$$

puisque

$$p^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds},$$

où Γ^i_{jk} sont les symboles de Christoffel de seconde espèce relatifs à la metrique de V_n.

Donc, le vecteur de la courbure cyclique est la dérivée intrinsèque du vecteur unitaire de la tangente de la courbe C par rapport à la connexion u^i_{jk}. Mais cette connexion, comme on voit de (3.3) n'est pas symétrique. Par conséquent, un vecteur quelconque a^i du sous-espace a deux dérivées intrinsèques le long de la courbe C et par rapport à la connexion u^i_{jk}:

$$\frac{D}{Ds} a^i = \frac{d}{ds} a^i + u^i_{jk} a^j \frac{dx^k}{ds}, \tag{3.5}$$

et

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} a^i = \frac{d}{ds} a^i + u^i_{jk} a^k \frac{dx^j}{ds}. \tag{3.6}$$

Lorsque le vecteur a^i coïncide avec le vecteur unitaire de la tangente de la courbe C, seule la partie symétrique de la connexion u^i_{jk} figure dans les relations (3.5) et (3.6), de sorte que nous avons

$$\frac{D}{Ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s}\left(\frac{dx^i}{ds}\right). \tag{3.7}$$

Désignons par $\underset{1}{v}^i$ le vecteur unitaire et par $\underset{1}{k}$ l'intensité du vecteur v^i, c'est-à-dire

$$\frac{D}{Ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \underset{1}{k}\,\underset{1}{v}^i .$$

Il est facile de voir que le vecteur v^i et, en conséquence, le vecteur $\underset{1}{v}^i$, est normal au vecteur tangente de la courbe. Puis, comme dans le cas de la courbure relative [4], on déduit que le vecteur

$$\frac{D}{Ds} \underset{1}{v}^i + \underset{1}{k} \frac{dx^i}{ds} \tag{3.8}$$

est normal à la fois au vecteur $\frac{dx^i}{ds}$ et au vecteur $\underset{1}{v}^i$. En désignant par $\underset{2}{v}^i$ le vecteur unitaire et par $\underset{2}{k}$ l'intensité du vecteur (3.8), et en procédant ainsi, nous obtenons finalement les équations

$$
(3.9) \quad \begin{cases} \dfrac{D}{Ds}\left(\dfrac{dx^i}{ds}\right) = \underset{1}{k}\underset{1}{v}^i, \\[2ex] \dfrac{D}{Ds}\underset{p}{v}^i = -\underset{p}{k}\underset{p-1}{v}^i + \underset{p+1}{k}\underset{p+1}{v}^i, \\[2ex] p = 1, 2, \ldots, n-1; \quad \underset{n}{k} = 0; \quad \underset{0}{v}^i = \dfrac{dx^i}{ds}. \end{cases}
$$

Ce sont *les formules de Frenet des courbures cycliques de la premières espèce* par rapport au champ des vecteurs ξ^i · $\underset{p}{v}^i$ est *le vecteur unitaire de la p-ième courbure cyclique de la première espèce* et $\underset{p}{k}$ est la *p-ième courbure cyclique de la première espèce* de la courbe C du sous-espace V_n.

De la même manière nous démontrons que les vecteurs unitaires $\underset{1}{w}^i, \underset{2}{w}^i, \ldots, \underset{n-1}{w}^i$ satisfaisant aux équations

$$
(3.10) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s}\left(\dfrac{dx^i}{ds}\right) = \underset{1}{\varkappa}\underset{1}{w}^i, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s}\underset{p}{w}^i = -\dfrac{1}{\xi^2}\xi_l \underset{p}{w}^l \dfrac{dx^i}{ds} - \underset{p}{\varkappa}\underset{p-1}{w}^i + \dfrac{1}{\xi^2}\xi_l \dfrac{dx^l}{ds}\underset{p}{w}^i + \underset{p+1}{\varkappa}\underset{p+1}{w}^i, \\[2ex] p = 1,2,\ldots, n-1; \quad \underset{n}{\varkappa} = 0, \end{cases}
$$

forment, en chaque point de la courbe C, un système de vecteurs orthogonaux deux à deux et normaux à $\dfrac{dx^i}{ds}$. En vertu de la condition (3.7) on a toujours

$$
(3.11) \quad \underset{1}{v}^i = \underset{1}{w}^i \quad \text{et} \quad \underset{1}{k} = \underset{1}{\varkappa}.
$$

Les relations (3.10) sont *les formules de Frenet des courbures cycliques de la deuxième espèce* par rapport au champ des vecteurs ξ · $\underset{p}{w}^i$ est *le vecteur* unitaire de la *p-ième courbure cyclique de la deuxième espèce* et $\underset{p}{\varkappa}$ *est la p-ième courbure cyclique de la deuxième espèce* de la courbe C du sous-espace V_n.

Lorsque $\xi \to \infty$, les (2.3) se réduisent à la forme $v^i = p^i$, ce que signifie que le vecteur de la première courbure est le cas limite du vecteur de la courbure cyclique. De ce fait et du fait que la connexion (3.3) se réduit aux symboles de Christoffel, les équations (3.9), ainsi que (3.10), coincident, lorsque $\xi \to \infty$, avec les formules ordinaires de Frenet d'une courbe du sous-espace V_n.

4 *LES PROPRIÉTÉS CONFORMES DES ÉQUATIONS* (3.9). — Soit l'espace riemannien $\overline{V}_m$, dont la métrique $\overline{a}_{\alpha\beta}\, d\overline{y}^\alpha\, d\overline{y}^\beta$, positive, obtenue de l'espace riemannien V_m, donné par la transformation conforme

$$\overline{a}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} a_{\alpha\beta}, \quad \overline{a}^{\alpha\beta} = e^{-2\sigma} a^{\alpha\beta}, \tag{4.1}$$

σ étant une fonction de la position. Nous supposons qu'aux points correspondants, on a $\overline{y}^\alpha = y^\alpha$.

Le sous-espace V_n de V_m se transforme, par la transformation (4.1), en sous-espace $\overline{V}_n$ d'espace $\overline{V}_m$. Si $\overline{g}_{ij}$ sont les composantes du premier tenseur fondamental de $\overline{V}_n$, nous avons

$$\overline{g}_{ij} = \overline{a}_{\alpha\beta}\, \overline{y}^\alpha_{,i}\, \overline{y}^\beta_{,j}. \tag{4.2}$$

Or, le tenseur $y^\alpha_{,i}$ est invariable par rapport à la transformation conforme. Alors, en vertu de (2.1) et (4.1), il suit de (4.2)

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \quad \overline{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}. \tag{4.3}$$

Soit C une courbe de V_n, $\overline{C}$ la coubre correspondante, par rapport à la transformation (4.3), de $\overline{V}_n$. Il est facile à voir que

$$\frac{d\overline{x}^i}{d\overline{s}} = e^{-\sigma} \frac{dx^i}{ds}, \tag{4.4}$$

$$\overline{p}^i = e^{-2\sigma}\left[p^i - \left(\sigma^i - \sigma_m \frac{dx^m}{ds}\, \frac{dx^i}{ds}\right)\right], \tag{4.5}$$

où $\frac{dx^i}{ds}$ et $\frac{d\overline{x}^i}{d\overline{s}}$ sont les vecteurs unitaires des tangentes et p^i et $\overline{p}^i$ les vecteurs des premières courbures des courbes C et $\overline{C}$ aux points correspondants, tandis que

$$\sigma^i = g^{im} \sigma_m = g^{im} \frac{\partial \sigma}{\partial x^m}.$$

Envisageons le vecteur de la courbure cyclique de la courbe $\overline{C}$ du sous-espace $\overline{V}_n$:

$$\overline{v}^i = \overline{p}^i - \frac{1}{\overline{\xi}^2}\left(\overline{\xi}^i - \overline{\xi}_j \frac{d\overline{x}^j}{d\overline{s}} \frac{d\overline{x}^i}{d\overline{s}}\right). \tag{4.6}$$

Si le vecteur ξ^i est invariable par rapport à la transformation (4.3), c'est à dire si

$$\overline{\xi}^i = \xi^i, \tag{4.7}$$

nous avons

$$\overline{\xi}_j = \overline{g}_{ij}\,\overline{\xi}^i = e^{2\sigma} g_{ij}\xi^i = e^{2\sigma}\xi_j\,;\ \overline{\xi}^2 = \overline{g}_{ij}\,\overline{\xi}^i\,\overline{\xi}^j = e^{2\sigma} g_{ij}\,\xi^i\,\xi^j = e^{2\sigma}\xi^2,$$

et, en vertu de (4.4) et (4.5), nous obtenons de (4.6):

$$\overline{v}^i = e^{-2\sigma}\left[p^i - \left(\sigma^i + \frac{\xi^i}{\xi^2}\right) + \left(\sigma_j + \frac{\xi_j}{\xi^2}\right)\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^i}{ds}\right].$$

Le vecteur

$$V^i = p^i - \left(\sigma^i + \frac{\xi^i}{\xi^2}\right) + \left(\sigma_j + \frac{\xi_j}{\xi^2}\right)\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + U^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds},$$

où nous avons posé:

$$U^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + (\delta^i_k\delta^r_m - \delta^i_m\delta^r_k)\left(\sigma^m + \frac{\xi^m}{\xi^2}\right)g_{rj},$$

est le vecteur de la première courbure cyclique de la première espèce par rapport au champ des vecteurs Ξ^i, ayant en chaque point la direction du vecteur $\sigma^i + \dfrac{\xi^i}{\xi^2}$ et l'intensité — la valeur réciproque d'intensité du vecteur $\sigma^i + \dfrac{\xi^i}{\xi^2}$, de la courbe C de V_n. Donc, en désignant l'intensité de ce vecteur par $\underset{1}{K}$ et le vecteur unitaire par $\underset{1}{V^i}$, nous avons

$$\underset{1}{\overline{v}^i}\,\underset{1}{\overline{k}} = e^{-2\sigma}\underset{1}{V^i}\,\underset{1}{K},$$

d'où

$$\underset{1}{\overline{v}^i} = e^{-\sigma}\underset{1}{V^i} \quad \text{et} \quad \underset{1}{\overline{k}} = e^{-\sigma}\underset{1}{K}. \tag{4.8}$$

Pour examiner la transformation conforme de la deuxième courbure cyclique de la première espéce, exprimons, en vertu de (3.9), un tel vecteur de la courbe $\overline{C}$ du sous-espace $\overline{V}_n$ sous la forme

$$\underset{2}{\overline{k}}\,\underset{2}{\overline{v}^i} = \frac{D}{\overline{Ds}}\,\underset{1}{\overline{v}^i} + \underset{1}{\overline{k}}\,\frac{d\overline{x}^i}{\overline{ds}} = \frac{d}{\overline{ds}}\,\underset{1}{\overline{v}^i} + \overline{u}^i_{jk}\,\underset{1}{\overline{v}^j}\,\frac{d\overline{x}^k}{\overline{ds}} + \underset{1}{\overline{k}}\,\frac{d\overline{x}^i}{\overline{ds}}. \tag{4.9}$$

Mais,

$$\overline{u}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \frac{1}{\overline{\xi}^2}\left(\overline{\delta}^r_m \overline{\delta}^i_k - \overline{\delta}^r_k \overline{\delta}^i_m\right)\overline{\xi}^m\,\overline{g}_{rj} =$$

$$= \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j - \sigma^i g_{jk} + \frac{1}{\xi^2}\left(\delta^r_m\,\delta^i_k - \delta^r_k\,\delta^i_m\right)\xi^m g_{rj}$$

$$= \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\,\sigma_k + \left(\delta^r_m \delta^i_k - \delta^r_k \delta^i_m\right)\sigma^m g_{rj} + \frac{1}{\xi^2}\left(\delta^r_m\,\delta^i_k - \delta^r_k \delta^i_m\right)\xi^m g_{rj}$$

$$= \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \sigma_k + \left(\delta^r_m\,\delta^i_k - \delta^r_k\,\delta^i_m\right)\left(\sigma^m + \frac{\xi^m}{\xi^2}\right) g_{rj},$$

c'est à dire

$$\overline{u}^i_{jk} = U^i_{jk} + \delta^i_j\,\sigma_k, \tag{4.10}$$

puisque les symboles de Christoffel $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ et Γ^i_{jk} des espaces $\overline{V}_n$ et V_n sont liés par la relation

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \sigma_k + \sigma^i_k \sigma_j - \sigma^i g_{jk}.$$

D'autre part, en partant de (4.8), on a

$$\frac{d}{\overline{ds}}\,\underset{1}{\overline{v}^i} = \frac{d}{ds}\left(e^{-\sigma}\underset{1}{V^i}\right) e^{-\sigma} = e^{-2\sigma}\left(\frac{d\underset{1}{V^i}}{ds} - \sigma_m\,\frac{dx^m}{ds}\,\underset{1}{V^i}\right).$$

Alors, en tenant compte de (4.10), on peut exprimer les équations (4.9) sous la forme

$$\underset{2}{\overline{k}}\,\underset{2}{\overline{v}^i} = e^{-2\sigma}\left[\frac{d\underset{1}{V^i}}{ds} - \sigma_m\,\frac{dx^m}{ds}\,\underset{1}{V^i} + U^i_{jk}\underset{1}{V^j}\,\frac{dx^k}{ds} + \delta^i_j\,\sigma_k\underset{1}{V^j}\,\frac{dx^k}{ds} + \underset{1}{K}\,\frac{dx^i}{ds}\right],$$

c'est à dire

$$\underset{2}{\overline{k}}\,\underset{2}{\overline{v}^i} = e^{-2\sigma}\left(\frac{d\underset{1}{V^i}}{ds} + U^i_{jk}\underset{1}{V^j}\,\frac{dx^k}{ds} + \underset{1}{K}\,\frac{dx^i}{ds}\right).$$

Or, le vecteur $\frac{d\underset{1}{V^i}}{ds} + U^i_{jk}\underset{1}{V^i}\frac{dx^k}{ds}$ est la dérivée intrinsèque du vecteur $\underset{1}{V^i}$ par rapport à la connexion U^i_{jk}. Donc, en désignant par $\underset{1}{V^i}$ le vecteur unitaire et par $\underset{2}{K}$ l'intensité du vecteur de la deuxième courbure cyclique de la première espèce par rapport au champ des vecteurs Ξ^i, nous avons

$$\underset{2}{\bar{k}}\,\underset{2}{\bar{v}^i} = e^{-2\sigma}\underset{2}{K}\,\underset{2}{V^i},$$

d'où

$$\underset{2}{\bar{v}^i} = e^{-\sigma}\underset{2}{V^i} \qquad \text{et} \qquad \underset{2}{\bar{k}} = e^{-\sigma}\underset{2}{K}.$$

En procédant ainsi, nous obtenons

$$\underset{p}{\bar{v}^i} = e^{-\sigma}\underset{p}{V^i} \qquad \underset{p}{\bar{k}} = e^{-\sigma}\underset{p}{K},$$

où $\underset{p}{V^i}$ est le vecteur unitaire et $\underset{p}{K}$ est l'intensité du vecteur de la p-ième courbure cyclique de la première espèce de la courbe C par rapport au champ de vecteurs Ξ^i. Cela veut dire que

La direction du vecteur de la p-ième $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ *courbure cyclique de la première espèce, d'une courbe* $\bar{C}$ *appartenant au sous-espace* $\bar{V}_n$*, par raport au champ des vecteurs* $\bar{\xi}^i$ *se transforme, par la transformation conforme, en la direction du vecteur de la p-ième courbure cyclique de la première espèce, par rapport au champ des vecteurs* Ξ^i *de la courbe* C *de* V_n.

Or, les formules de Frenet des courbures cycliques de la premère espèce, d'une courbe $\bar{C}$ *de* $\bar{V}_n$*, par rapport au champ des vecteurs* $\bar{\xi}^i$*, se transforment, par la transformation conforme, aux formules de Frenet des courbures cycliques de la première espèce, par rapport au champ des vecteurs* Ξ^i*, de la courbe* C *de* V_n.

5. *LES PROPRIÉTÉS CONFORMES DES ÉQUATIONS* (3.10). — Pour étudier les propriétés conformes des formules de Frenet (3.10) des courbures cycliques de la deuxième espèce, nous appliquerons un procédé analogue à celui de la section précédante. En effet, $\underset{1}{\bar{w}^i}$ étant le vecteur unitaire et $\underset{1}{\bar{\varkappa}}$ l'intensité du vecteur de la première courbure cyclique de la deuxième espèce d'une courbe $\bar{C}$ de $\bar{V}_n$ par rapport au champ des vecteurs $\bar{\xi}^i$, nous avons, de (3.11) et (4.8),

$$\underset{1}{\bar{w}^i} = e^{-\sigma}\underset{1}{W^i} \quad \text{et} \quad \underset{1}{\bar{\varkappa}} = e^{-\sigma}\underset{1}{P^i}, \tag{5.1}$$

où $\underset{1}{W^i}$ est le vecteur unitaire et $\underset{1}{P}$ l'intensité du vecteur de la première courbure cyclique de la deuxième espèce de C par rapport au champ des vecteurs Ξ^i.

En vertu de (3.10), le vecteur de la deuxième courbure cyclique de la deuxième espèce de $\bar{C}$, par rapport au champ des vecteurs $\bar{\xi}^i$, est donné par

$$\underset{2}{\bar{\varkappa}}\,\underset{2}{\bar{w}^i}=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\bar{s}}\underset{1}{\bar{w}^i}+\frac{1}{\bar{\xi}^2}\bar{\xi}_l\,\underset{1}{\bar{w}^l}\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}}+\underset{1}{\bar{\varkappa}}\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}}-\frac{1}{\bar{\xi}^2}\bar{\xi}_l\frac{d\bar{x}^l}{d\bar{s}}\underset{1}{\bar{w}^i}.$$

Ainsi, en tenant compte de (3.6), (4.4), (4.7), (4.10) et (5.1) nous avons:

$$\underset{2}{\bar{\varkappa}}\,\underset{2}{\bar{w}^i}=\frac{d}{d\bar{s}}\underset{1}{\bar{w}^i}+\bar{u}^i_{jk}\underset{1}{\bar{w}^k}\frac{d\bar{x}^j}{d\bar{s}}+\frac{1}{\bar{\xi}^2}\bar{\xi}_l\,\underset{1}{\bar{w}^l}\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}}+\underset{1}{\bar{\varkappa}}\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}}-\frac{1}{\bar{\xi}^2}\bar{\xi}_l\frac{d\bar{x}^l}{d\bar{s}}\underset{1}{\bar{w}^i}$$

$$=e^{-2\sigma}\left[\frac{d\underset{1}{W^i}}{ds}-\sigma_k\frac{dx^k}{ds}\underset{1}{W^i}+U^i_{jk}\underset{1}{W^k}\frac{dx^j}{ds}+\delta^i_j\sigma_k\underset{1}{W^k}\frac{dx^j}{ds}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\xi^2}\xi_k\underset{1}{W^k}\frac{dx^i}{ds}+\underset{1}{P}\frac{dx^i}{ds}-\frac{1}{\xi^2}\xi_k\frac{dx^k}{ds}\underset{1}{W^i}\right]$$

$$=e^{-2\sigma}\left[\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s}\underset{1}{W^i}+\left(\sigma_k+\frac{\xi_k}{\xi^2}\right)\underset{1}{W^k}\frac{dx^i}{ds}+\underset{1}{P}\frac{dx^i}{ds}-\left(\sigma_k+\frac{\xi_k}{\xi^2}\right)\frac{dx^k}{ds}\underset{1}{W^i}\right],$$

c'est à dire

$$\underset{2}{\bar{\varkappa}}\,\underset{2}{\bar{w}^i}=e^{-2\sigma}\underset{2}{P}\,\underset{2}{W^i}, \tag{5.2}$$

où $\underset{2}{W^i}$ est le vecteur unitaire et $\underset{2}{P}$ est l'intensité du vecteur de la deuxème courbure cyclique de la deuxième espèce par rapport au champ des vecteurs Ξ^i de la courbe C.

En vertu de (4.3), on a, de (5.2),

$$\underset{2}{\bar{w}^i}=e^{-\sigma}\underset{2}{W^i}\quad \text{et}\quad \underset{2}{\bar{\varkappa}}=e^{-\sigma}\underset{2}{P}.$$

En continuant ainsi, nous obtenons enfin:

$$\underset{p}{\bar{w}^i}=e^{-\sigma}\underset{p}{W^i}\quad \text{et}\quad \underset{p}{\varkappa}=e^{-\sigma}\underset{p}{P},\quad p=1,2,\ldots,n-1,$$

$\underset{p}{W^i}$ étant le vecteur unitaire et $\underset{p}{P}$ étant l'intensité de la p-ième courbure cyclique de la deuxième espèce de la courbe C de V_n par rapport au champ des vecteurs Ξ^i. De sorte qu'on peut dire que:

La direction du vecteur de la p-ième $(p=1,2,\ldots,n-1)$ *courbure cyclique de la deuxième espèce, d'une courbe* $\overline{C}$ *appartenant au sous-espace* $\overline{V}_n$, *par rapport au champ des vecteurs* $\overline{\xi}^i$, *se transforme, par la transformation conforme, en la direction du vecteur de la p-ième courbure cyclique de la deuxième espèce, par rapport au champ des vecteurs* Ξ^i *de la courbe* C *de* V_n.

Les formules de Frenet des courbures cycliques de la deuxième espèce, d'une courbe $\overline{C}$ *de* $\overline{V}_n$, *par rapport au champ des vecteurs* $\overline{\xi}^i$, *se transforment, par la transformation conforme, aux formules de Frenet des courbures cyqliques de la deuxième espèce, par rapport au champ des vecteurs* Ξ^i, *de la courbe* C *de* V_n.

(Reçu le 19.XI.1958)

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Blaschke — Sistemi ciclici di curve sopra una superficie, *Rendiconti Acad. d. L. Roma* (6) 2 (1925), 399—400.

[2] T. K. Pan: — Relative first curvature and relative parallelism in a subspace of a Riemannien s ace, *Univ. Nac. Tucuman, Revista* A, **11** (1957), 3—9.

[3] M. Prvanović — Système des courbes cycliques d'un sous-espace plongé dans un espace riemannien, *Glasnik mat. fiz. i astr.* (Zagreb), **12** (1957), 235—243.

[4] ———— Relative Frenet-formulas for curves in a subspace of a Riemannian space. *Tensor* (New Series) **9** (1959), 190—204.