NOTE SUR L'ÉCART ABSTRAIT ET LES ESPACES (V)

Z. MAMUZIĆ (Beograd)

Dans le travail [2], p. 63, j'ai défini une classe d'espaces de voisinages (V) de M. Fréchet de la façon suivante. Soient: E, M deux ensembles non vides quelconques dont le premier possède au moins deux éléments; f une application de l'ensemble-produit $E \times E$ dans l'ensemble M; (λ_a) un ensemble non vide d'indices, défini pour chaque point $a \in E$ (qui alors peut être différent pour les points différents de E); $X_{\lambda_a} \ni f(a, a)$, $\lambda_a \in (\lambda_a)$, une famille de parties de M contenant l'élément $f(a, a)$, définie pour chaque $a \in E$. Au moyen de la structure sur M de ci-dessus et de la fonction f il est possible de topologiser l'ensemble E par intermédiaire de la base de voisinages définie ainsi:

$$(1) \qquad W_{\lambda_a}(a) = \{b\colon\ b \in E \text{ et } f(a, b) \in X_{\lambda_a}\},\ \lambda_a \in (\lambda_a),\ a \in E.$$

Un espace (T, τ) étant donné (pour $A \subset T$, $\tau(A)$ signifiant l'ensemble des points de T contigus à l'ensemble A de l'espace considéré (T, τ)), nous dirons que (T, τ) est de la classe $E(M)$ s'il existe au moins un ensemble M, une fonction $f(T \times T) \subset M$ et une structure sur M de ci-dessus tels que l'espace (T, τ) peut être reconstruit par la base correspondante de voisinages (1).

Conformément à la terminologie usuelle (cf. [1], p. 106), nous appelerons $f(a, b)$ l'écart abstrait du point b à partir du point a, ou bien M-écart du point b au point a. Nous dirons aussi que, dans ces circonstances, on peut reconstuire l'espace donné (T, τ) moyennant un écart abstrait, ou bien un M-écart, ou, tout simplement, que l'espace (T, τ) admet un écart abstrait, ou bien un M-écart.

Il est évident que chaque espace de la classe $E(M)$ est un espace de voisinages (V) de M. Fréchet, c'est-à-dire que chaque espace admettant au moins un écart abstrait au sens des définitions de ci-dessus est un espace de la classe (V). Dans cette note nous allons démontrer la réciproque: de plus, nous allons montrer que chaque espace de la classe (V) de M. Fréchet admet au moins deux écarts abstraits dont l'un est antisymétrique et l'autre symétrique et que j'appelerais *l'écart abstrait intrinsèque*, ou bien *absolu, antisymétrique* respectivement *symétrique.* Nous préciserons ces faits dans la forme de deux théorèmes suivantes.

THÉORÈME 1. *Chaque espace de la classe (V) de M. Fréchet admet au moins un écart abstrait antisymétrique.*

DÉMONSTRATION. Soit (T, τ) un espace de la classe (V) quelconque avec la base $\mathfrak{B}$ de voisinages de ses points. Posons $M=T$ et soit f la fonction définie sur $T \times T$ de la manière suivante:

$$f(x, y)=y, \qquad (x, y) \in T \times T.$$

En désignant par $\mathfrak{B}_x$ la base locale de voisinages du point $x \in T$ et par Vx un voisinage du point $x \in T$, choisissons pour l'ensemble (λ_x) d'indices la famille $\mathfrak{B}_x$ et posons $X_{\lambda_x}=Vx=X_{Vx}$, $Vx \in \mathfrak{B}_x$, $x \in T$. Il est évident que $f(x, x)=x \in Vx$ pour chaque $Vx \in \mathfrak{B}_x$ et chaque $x \in T$. En appliquant le procédé (1) on obtient la famille de voisinages suivantes:

$$W_{Vx}(x)=\{y\colon y \in T,\ f(x, y)=y \in X_{Vx}=Vx\}, \quad Vx \in \mathfrak{B}_x, \quad x \in T.$$

On a évidemment $W_{Vx}(x)=Vx$ pour chaque $Vx \in \mathfrak{B}_x$ et chaque $x \in T$, ce qui montre que l'espace (T, τ) est bien de la classe $E(M)$, c'est-à-dire que l'espace (T, τ) admet un écart abstrait qui est, de plus, antisymétrique car $f(x, y) \neq f(y, x)$ si $y \neq x$, c. q. f. d.

THÉORÈME 2. *Chaque espace de la classe (V) de M. Fréchet admet au moins un écart abstrait symétrique.*

DÉMONSTRATION. (T, τ) étant un espace de la classe (V), soit M l'ensemble dont les points sont tous les ensembles contenant au plus deux éléments de l'ensemble T, c'est-à-dire les éléments de M sont de la forme $\{x\}$, $x \in T$, et $\{x, y\}$ si $x \neq y$, $x, y \in T$. Définissons l'application $T \times T \xrightarrow{f} M$ ainsi:

$$f(x, y)=\{x, y\}, \qquad (x, y) \in T \times T.$$

Pour l'ensemble (λ_x) d'indices choisissons de nouveau la famille de voisinages $\mathfrak{B}_x$ du point $x \in T$ et posons:

$$X_{\lambda_x} = X_{Vx} = \{\{x, y\} : y \in Vx\}, \quad Vx \in \mathfrak{B}_x, \quad x \in T.$$

Évidemment, $f(x, x) = \{x\} \in X_{Vx}$ pour chaque $Vx \in \mathfrak{B}_x$ et chaque $x \in T$, puisque $\{x, x\} = \{x\}$. Par le procédé (1) on peut définir la famille de voisinages

$$W_{Vx}(x) = \{y : y \in T, \ f(x, y) = \{x, y\} \in X_{Vx}\}, \quad Vx \in \mathfrak{B}_x, \quad x \in T,$$

d'où l'on tire immédiatement $W_{Vx}(x) = Vx$ pour tout $Vx \in \mathfrak{B}_x$ et tout $x \in T$. On voit que l'espace (T, τ) est bien de la classe $E(M)$, c'est-à-dire qu'il admet un écart abstrait qui est, de plus, symétrique car $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout $x, y \in T$, c. q. f. d.

Considérons par exemple un espace métrique (T, d) quelconque où d est la distance vérifiant les axiomes connus des espaces métriques. Il est facile de voir que l'espace (T, d) est un espace de la classe $E(M)$ où M est l'ensemble des nombres réels nonnégatifs où $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in T$, la fonction d jouant le rôle d'un M-écart, maintenant réel, au sens des définitions de ci-dessus (on pose $X_{\lambda_x} = V$, V parcourant tous les voisinages du point 0 dans le sous-espace M). D'après le théorème 1, l'espace (T, d) admet aussi l'écart abstrait intrinsèque antisymétrique, l'écart du point y au point x n'étant pas autre que le point y. D'après le théorème 2, ce même espace admet l'écart abstrait intrinsèque symétrique des points $x, y \in T$, qui n'est pas autre que l'ensemble $\{x, y\}$. Particulièrement, dans l'espace de tous les nombres réels, l'écart abstrait intrinsèque antisymétrique est encore un nombre réel mais qui peut être aussi négatif.

(Réçu le 18.XII.1959)

RÉFÉRENCES

[1] Kurepa, Dj. — Sur l'écart abstrait, *Glasnik mat. fiz. i astr.* **11** (1956), 105—132.

[2] Mamuzić, Z. — Sur la topologie transitive d'une classe d'espaces (V), *Bulletin de la Soc. des math. et phys. de la RP de Serbie,* VI (1954), 63—73.