CLASSE DE SATURATION DU PROCÉDÉ DES MOYENNES TYPIQUES DE RIESZ

S. ALJANČIĆ (Belgrade)

SOMMAIRE — On détermine la classe de saturation et la meilleure approximation du procédé de sommation par les moyennes typiques de Riesz appliquées à la série de Fourier d'une fonction continue et périodique.

1. *INTRODUCTION ET RÉSULTATS.* Soit $f(x)$ une fonction continue et périodique de période 2π et soit

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

sa série de Fourier.

Soit Γ le procédé de sommation défini par la matrice triangulaire $\| \gamma_\nu^n \|$ $(\nu = 0, \ldots, n-1,\ n = 1, 2, \ldots)$ et appliquons le procédé Γ à la série de Fourier de $f(x)$:

$$\Gamma_n(x; f) = \frac{1}{2} a_0 \gamma_0^n + \sum_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

On dit avec Favard [2] que le procédé Γ est saturé s'il existe une fonction décroissante $\varphi(n) \to 0$, $n \to \infty$, et une classe de fonctions Σ, non vide, telles que

(i) $$f(x) - \Gamma_n(x; f) = o[\varphi(n)] \Longrightarrow f(x) = \text{const};$$

(ii) $$f(x) - \Gamma_n(x; f) = O[\varphi(n)] \Longleftrightarrow f(x) \in \Sigma\,.$$

On donne à Σ le nom de la classe de saturation du procédé Γ et $\varphi(n)$ est la meilleure approximation qu'on peut obtenir par le procédé Γ.

Le but de cette note est de déterminer la classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz, à savoir

$$R_n^{(\lambda)}(x;f)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right)(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

où (λ) désigne une suite croissante λ_n qui tend vers l'infini avec n. Ce résultat dans une forme un peu différente et sans démonstration nous avons déjà énoncé dans une note parue dans les *Comptes Rendus* [1].

THÉORÈME. *Soit $f(x)$ une fonction continue, périodique de période 2π et à valeur moyenne nulle.*

Soit λ_n une suite satisfaisant aux conditions: (i) $0<\lambda_n<\lambda_{n+1}$; (ii) $\lambda_n\to\infty$, $n\to\infty$; (iii) $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$ *ou* $\Delta^2\lambda_n\leqslant 0$; (iv) $\lambda_{2n}=O(\lambda_n)$ *si* $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$.

Désignons par $W^{(\lambda)}$ la classe de fonctions $f(x)$ admettant la représentation

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_{(\lambda)}(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

où

$$\psi_{(\lambda)}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\lambda_\nu},\qquad \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0\quad et\quad \|\varphi\|_M\leqslant 1.$$

Alors,

(I) *$f(x)-R_n^{(\lambda)}(x;f)=o(1/\lambda_n)$ entraîne $f(x)\equiv 0$;*

(II) *pour qu'on ait $f(x)-R_n^{(\lambda)}(x;f)=O(1/\lambda_n)$ i est nécessaire et suffisant que $f(x)\in W^{(\lambda)}$.*

En particulier, si $\lambda_n=n^\lambda$, $\lambda>0$, nous allons noter $R_n^{(\lambda)}(x;f)$ par $R_n^\lambda(x;f)$ et la classe $W^{(\lambda)}$ par W^λ; W^λ est alors la classe de fonctions $f(x)$ telles que

$$\left\|\left(f(x)\cos\frac{\lambda\pi}{2}+\tilde f(x)\sin\frac{\lambda\pi}{2}\right)^\lambda\right\|_M\leqslant K,$$

où g^λ désigne la dérivée au sens de Weyl d'ordre λ de g, et $\tilde f(x)$ est la fonction conjuguée de $f(x)$. Donc, on a le

COROLLAIRE 1. *Pour qu'on ait $f(x)-R_n^\lambda(x;f)=O(n^{-\lambda})$ il est nécessaire et suffisant que $f\in W^\lambda$.*

Un énoncé analogue existe s'il s'agit de l'approximation de la fonction conjuguée $\tilde{f}(x)$ par $R_n^\lambda(x;\tilde{f})$. Il n'y a que de remplacer la classe W^λ par la classe conjuguée $\tilde{W}^\lambda$, définie par

$$\left\| \left(\tilde{f}(x)\cos\frac{\lambda\pi}{2} - f(x)\sin\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{\lambda} \right\|_M \leqslant K.$$

Si la série de Fourier de $f(x)$ est de la forme d'une série entière, c-à-d.

$$f(x) \sim c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \dots,$$

on a $\tilde{f}(x) = -i f(x)$, de sorte qu'en posant

$$\overset{*}{R}{}_n^\lambda(x;f) = \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu^\lambda}{n^\lambda}\right)c_\nu e^{i\nu x},$$

il y a lieu le

COROLLAIRE 2. *Pour qu'on ait* $f(x) - \overset{*}{R}{}_n^\lambda(x;f) = O(n^{-\lambda})$ *il est nécessaire et suffisant que* $\|f^\lambda(x)\|_M \leqslant K$.

Nous remarquons que des résultats analogues existent si l'on considère l'approximation en moyenne, c-à-d. si l'on se pose, au lieu de l'espace C, dans l'espace L^p.

Le cas $\lambda_n = n^\lambda$, $\lambda > 0$ du notre théorème était déjà traité par divers auteurs. Notamment Zygmund [6] a démontré que si $|f^\lambda(x)| \leqslant K$ (λ entier) pour tout x, l'approximation de $f(x)$ par $R_n^\lambda(x;f)$ respectivement de $\tilde{f}(x)$ par $R_n^\lambda(x;\tilde{f})$ est d'ordre $O(n^{-\lambda})$ suivant que λ est pair respectivement impair (et que dans les cas opposés on ne peut obtenir q'une approximation d'ordre $O(n^{-\lambda}\log n)$). Zamansky [5] a démontré l'affirmation inverse et, par conséquent, déterminé la classe de saturation pour λ entier. Le cas $\lambda > 0$ quelconque ont traité Sz. Nagy [3] (suffisance) et Sunouchi et Watari [4] (nécessité). Ladite note de Sunouchi et Watari est parue presque simultanement avec la note mentionnée de l'auteur [1].

Le démonstration du notre théorème repose sur deux lemmes dont le second est un résultat familier de la théorie des séries de Fourier.

LEMME 1. *Soit* λ_n *une suite telle que* $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to \infty$ *et telle que* $\lambda_{n+1}/\lambda_n = O(1)$.

$$C \equiv \sum C_\nu, \quad C^{(\lambda)} \equiv \sum \lambda_\nu C_\nu$$

et

$$R_n^{(\lambda)}(C) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right) c_\nu .$$

Pour que la série C soit sommable-$R^{(\lambda)}$ vers la somme généralisée s et pour qu'on ait

$$R_n^{(\lambda)}(C) - s = O(1/\lambda_n) \tag{1.1}$$

il est nécessaire et suffisant que

$$R_n^{(\lambda)}(C^{(\lambda)}) = O(1). \tag{1.2}$$

LEMME 2. *Soit λ_n une suite telle que:* (i) $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1}$; (ii) $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$; (iii) $\Delta^2 \lambda_n \geqslant 0$ *ou* $\Delta^2 \lambda_n \leqslant 0$; (iv) $\lambda_{2n} = O(\lambda_n)$ *si* $\Delta^2 \lambda_n \geqslant 0$.

Pour que la série trigonométrique T:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x$$

soit la série de Fourier d'une fonction appartenant à l'espace M il est nécessaire et suffisant que

$$R_n^{(\lambda)}(T) = O(1).$$

2. *DÉMONSTRATIONS*

2.1. *DÉMONSTRATION DU LEMME* 1. Posons

$$\overline{R}_n^{(\lambda)}(C) = \frac{1}{\lambda_n \lambda_{n+1}} \sum_{\nu=2}^{n} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu-1}) \lambda_\nu R_\nu^{(\lambda)}(C). \tag{2.1.1}$$

Alors

$$\begin{aligned} \overline{R}_n^{(\lambda)}(C) &= \frac{1}{\lambda_n \lambda_{n+1}} \sum_{\nu=2}^{n} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu-1}) \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (\lambda_\nu - \lambda_\mu) c_\mu = \\ &= \frac{1}{\lambda_n \lambda_{n+1}} \sum_{\mu=1}^{n-1} c_\mu \sum_{\nu=\mu+1}^{n} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu-1})(\lambda_\nu - \lambda_\mu) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n \lambda_{n+1}} \sum_{\mu=1}^{n-1} [\lambda_n \lambda_{n+1} - \lambda_{\mu+1} \lambda_\mu - \lambda_\mu (\lambda_{n+1} + \lambda_n - \lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu)] c_\mu \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\overline{R}_n^{(\lambda)}(C) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_\mu}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{\lambda_\mu}{\lambda_{n+1}}\right) c_\mu . \tag{2.1.2}$$

En utilisant cette deuxième expression pour $\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)$, il est facile à vérifier les deux identités suivantes

$$\lambda_{n+1}[R_n^{(\lambda)}(C)-\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)] = R_n^{(\lambda)}(C^{(\lambda)}), \tag{2.1.3}$$

$$\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)-\overline{R}_{n-1}^{(\lambda)}(C) = \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}\lambda_{n+1}} R_n^{(\lambda)}(C^{(\lambda)}), \tag{2.1.4}$$

dont le lemme 1 est une conséquence immédiate.

(i) $(1.1) \Longrightarrow (1.2)$. D'abord nous remarquons que

$$(1.1) \Longrightarrow \overline{R}_n^{(\lambda)}(C)-s = O(1/\lambda_n). \tag{2.1.5}$$

En effet, d'après (2.1.1), on a

$$\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)-s = \frac{1}{\lambda_n\lambda_{n+1}}\sum_{\nu=2}^{n}(\lambda_{\nu+1}-\lambda_{\nu-1})\lambda_\nu[R_\nu^{(\lambda)}(C)-s] - s\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_n\lambda_{n+1}}$$

et de (1.1) résulte

$$\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)-s = \frac{O(1)}{\lambda_n\lambda_{n+1}}\sum_{\nu=2}^{n}|\lambda_{\nu+1}-\lambda_{\nu-1}| + O\left(\frac{1}{\lambda_n\lambda_{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

En utilisant l'identité (2.1.3) on voit que (1.1) et (2.1.5) entraînent (1.2).

(ii) $(1.2) \Longrightarrow (1.1)$. De (1.2) et de l'identité (2.1.4) résulte d'abord

$$\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)-\overline{R}_{n-1}^{(\lambda)}(C) = O\left(\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}\lambda_{n+1}}\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}|\overline{R}_m^{(\lambda)}(C)-\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)| &\leqslant \sum_{\nu=n+1}^{m}|\overline{R}_\nu^{(\lambda)}(C)-\overline{R}_{\nu-1}^{(\lambda)}(C)| \leqslant \\ &\leqslant K\sum_{\nu=n+1}^{m}\left(\frac{1}{\lambda_{\nu-1}}-\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right).\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Par conséquent, $\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)$ converge, soit vers s. En faisant $m \to \infty$ dans (2.1.6) en obtient $\overline{R}_n^{(\lambda)}(C)-s = O(1/\lambda_n)$, d'où, en tenant compte de l'identité (2.1.3), résulte (1.1).

2.2. *DÉMONSTRATION DU LEMME* 2. Pour $\lambda_n = n$, c. à. d. quand il s'agit du procédé de Cesàro, le résultat du lemme 2 est bien connu ([7], Ch. IV, Th. 4. 2). D'après une remarque de Zygmund[1] ce résultat subsiste pour tout procédé de sommation dont le noyau est quasi-positif et qui somme p. p.

[1] Ibidem

toute série de Fourier. Aussi nous allons démontrer que le procédé des moyennes typiques, sous les suppositions faites sur la suite λ_n, enjoie ces propriétés. A cet effet nous remarquons d'abord que des hypothèses faites sur la suite λ_n résulte

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n = O\left(\frac{\lambda_n}{n}\right). \tag{2.2.1}$$

En premier lieu, si $\Delta^2 \lambda_n \leqslant 0$, on a

$$\left[\frac{n}{2}\right](\lambda_{n+1}-\lambda_n) \leqslant (\lambda_n-\lambda_{n-1}) + (\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}) + \ldots + (\lambda_{n-[n/2]+1}-\lambda_{n-[n/2]}) =$$
$$\leqslant \lambda_n - \lambda_{n-[n/2]} \leqslant \lambda_n,$$

d'où l'affirmation. En second lieu, si $\Delta^2 \lambda_n \geqslant 0$ et $\lambda_{2n} = O(\lambda_n)$, on a

$$n(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \leqslant (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}) + \ldots + (\lambda_{n+1}-\lambda_n) = \lambda_{2n}-\lambda_n,$$

d'où

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n \leqslant \frac{\lambda_{2n}-\lambda_n}{n} = \frac{\lambda_n}{n}\left(\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n}-1\right) = O\left(\frac{\lambda_n}{n}\right).$$

(i) *Quasi-positivité du noyau.* On a

$$R_n^{(\lambda)}(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n^{(\lambda)}(x-t)\, f(t)\, dt$$

avec

$$K_n^{(\lambda)}(t) = \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right)\cos \nu t. \tag{2.2.2}$$

En posant

$$s_n(t) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu t = \frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2},$$

$$\tau_n(t) = s_0 + \cdots + s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\,t/2}{\sin t/2}\right)^2,$$

et en sommant deux fois par parties, on obtient,

$$K_n^{(\lambda)}(t)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)\,s_\nu(t)+O(1)=$$

(2.2.3)

$$=\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n}\tau_{n-1}(t)-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\lambda_{\nu+2}-2\lambda_{\nu+1}+\lambda_\nu)\,\tau_\nu(t)+O(1),$$

d'où

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|K_n^{(\lambda)}(t)|\,dt\leqslant\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\tau_{n-1}(t)\,dt+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}|\Delta^2\lambda_\nu|\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\tau_\nu(t)dt+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n}n+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu|+O(1).$$

Par conséquent, on a, suivant que $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$ ou $\Delta^2\lambda_n\leqslant 0$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|K_n^{(\lambda)}(t)|\,dt\leqslant\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n}n\pm\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)\,\Delta^2\lambda_\nu+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n}n\pm\frac{1}{\lambda_n}\{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\,n-\lambda_n+2\lambda_1-\lambda_2\}+O(1)$$

$$\leqslant\begin{cases}2\dfrac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n}\,n+O(1), & \Delta^2\lambda_n\geqslant 0;\\[2mm] O(1), & \Delta^2\lambda_n\leqslant 0.\end{cases}$$

Donc, en tenant compte de (2.2.1), résulte la quasi-positivité du noyau $K_n^{(\lambda)}(t)$, c-à-d.

$$\int_0^\pi|K_n^{(\lambda)}(t)|\,dt=O(1).$$

(ii) *Sommation par le procédé* $R_n^{(\lambda)}(x;f)$. Pour q'une série sommable-$R^{(\lambda)}$ soit sommable-$R^{(\lambda)}$ il est nécessaire et suffisant, d'après les conditions générales de Toeplitz, que

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left|\frac{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}{\lambda'_{\nu+1}-\lambda'_\nu}-\frac{\lambda_{\nu+2}-\lambda_{\nu+1}}{\lambda'_{\nu+2}-\lambda'_{\nu+1}}\right|\lambda'_{\nu+1}=O(\lambda_n). \tag{2.2.4}$$

Étant donné que le procédé de Cesàro somme p. p. toute série de Fourier, on obtient, en posant $\lambda'_n=n$ dans (2.2.4), que la condition

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu|=O(\lambda_n)$$

est nécessaire et suffisante pour que le procédé $R^{(\lambda)}$ somme p. p. toute série de Fourier. Or, d'après ce qu'on a vu dans (i) cette condition est bien satisfaite en tenant compte de (2.2.1).

2.3. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME*

(I) Pour $n\geqslant\nu$ on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-R_n^{(\lambda)}(x;f)]\cos\nu x\,dx=\frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}a_\nu$$

et si

$$f(x)-R_n^{(\lambda)}(x;f)=o(1/\lambda_n),$$

on obtient

$$\lambda_\nu a_\nu=o(1),$$

d'où $a_\nu=0\ (\nu=1,2,\ldots)$ car $\lambda_\nu>0$. D'une manière semblable résulte $b_\nu=0\ (\nu=1,2,\ldots)$. L'affirmation (I) du théorème est donc démontrée.

(II) La deuxième partie du théorème nous allons démontrer en trois pas:

1° En appliquant le lemme 1 à la série de Fourier de $f(x)$, on obtient:

Pour qu'on ait

$$f(x)-R_n^{(\lambda)}(x;f)=O(1/\lambda_n) \tag{2.3.1}$$

il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$R_n^{(\lambda)}(x;F)=O(1),$$

où F désigne la série trigonométrique

(2.3.2) $$\sum \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

2° En posant $T = F$ dans le lemme 2, résulte:

Pour qu'on ait (2.3.1) il est nécessaire et suffisant que F soit la série de Fourier d'une fonction appartenant à l'espace M.

3° Pour que F soit la série de Fourier d'une fonction appartenant à l'espace M il est nécessaire et suffisant que $f(x) \in W^{(\lambda)}$.

Afin de démontrer cette dernière affirmation, nous remarquons d'abord que des hypthèses faites sur la suite λ_n résulte que la série trigonométrique

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\lambda_\nu}$$

converge, sauf peut-être pour $x = 0$, vers une fonction intégrable $\psi^{(\lambda)}(x)$ dont elle est la série de Fourier. En effet, si $\Delta^2 \lambda_n \leqslant 0$ on a $\Delta^2 \lambda_n^{-1} \geqslant 0$ et l'affirmation résulte de [7], Ch. V, Th. 1.5. Si $\Delta^2 \lambda_n \geqslant 0$, on a $\lambda_n \geqslant Kn$, $K > 0$, et, par conséquent, $\sum \nu^{-1} \lambda_\nu^{-1} < \infty$, d'où l'affirmation d'après [7], Ch. V, Misc. th. and ex. 6.

Supposons que F est la série de Fourier d'une fonction $\varphi(x) \in M$. Alors, l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{(\lambda)}(x-t)\, \varphi(t)\, dt$$

est une fonction continue de x (on le voit en appliquant [7], Ch. II, lemma 1, après avoir effectué une majoration simple) et sa série de Fourier est ([7], Ch. II, Th. 1.5)

$$\sum a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x.$$

Donc,

(2.3.3) $$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{(\lambda)}(x-t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Inversement, admettons que la fonction continue f admet la représentation (2.3.3) et supposons que

$$\sum \alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x$$

est la série de Fourier de $\varphi(x) \in M$. Alors de (2.3.3) résulte ([7], Ch. II, Th. 1.5) que la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\sum \frac{\alpha_\nu}{\lambda_\nu} \cos \nu x + \frac{\beta_\nu}{\lambda_\nu} \sin \nu x.$$

Or, les coefficients de Fourier de $f(x)$ sont a_ν et b_ν, d'où

$$\alpha_\nu = \lambda_\nu a_\nu \quad \text{et} \quad \beta_\nu = \lambda_\nu b_\nu$$

ce qui démontre que

$$\sum \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

est la série de Fourier d'une fonction appartenant à l'espace M.

(Reçu le 1.IV.1959)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aljančić, S. — Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz. *Comptes Rendus, Paris* **246** (1958), 2567–2569.

[2] Favard, J. — Colloque d'Analyse harmonique, Nancy. Paris **15** (1949), 97–110.

[3] Sz. Nagy, B. — Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier. *Hungarica Acta Math.* **1** (1948), 14–52.

[4] Sunouchi, C. and Watari, G. — On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions. *Proc. Japan Acad.* **34** (1958), 477–481.

[5] Zamansky, M. — Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques. *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3) **67** (1950), 161–198.

[6] Zygmund, A. — The approximation of functions by typical means of their Fourier series. *Duke math. Journal* **12** (1945), 695–704.

[7] ———— Trigonometrical series, I and II, Cambridge 1959.