SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DUALES

B. STANKOVIĆ (Novi Sad)

INTRODUCTION

Dans cette note nous allons montrer comment on peut résoudre le système d'équations intégrales:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^\alpha f(x)\, dx = \mu(y), \quad 0<y<1, \\ &\int_0^\infty J_\nu(yx) f(x)\, dx \quad = \nu(y), \quad y>1, \end{aligned} \tag{1}$$

en utilisant les propriétés bien connues des fonctions de Bessel et l'équation intégrale d'Abel. Nous allons aussi donner des conditions pour les fonctions $u(y)$ et $\nu(y)$ ainsi que pour les paramètres ν et α sous lesquelles les solutions trouvées sont valables.

Ce système se rencontre assez souvent dans les problèmes de Physique théorique, surtout dans ceux où il s'agit de disques électriques.

Il nous est presque impossible de citer tous les travaux dans lesquels sont traités les cas spéciaux du système (1) étant très nombreux. Aussi allons nous mentionner quelques uns seulement qui se rattachent aux cas assez généraux du système (1).

E. C. Titchmarsh dans son livre bien connu ([4], p. 334—339) a traité les équations (1) pour $\nu(y)\equiv 0$, $\alpha>0$, avec la transformation de Mellin, mais d'une manière formelle. C'est I. W. Busbridge [2] qui devait donner des conditions sous lesquelles la solution de E. C. Titchmarch est valable, quoique les équations (1) soient ici assez modifiées. Le même auteur a aussi donné une autre forme à la solution de E. C. Titchmarsh, cette fois ci valable pour $\alpha > -2$, sans conditions pour le paramètre ν et les fonctions $f(x)$ et $u(y)$.

C. J. Tranter [5] a publié un travail intéressant sur les équations intégrales (1) dans le cas $\alpha = 1$. Il a procédé d'une manière tout à fait différente, mais aussi sans conditions sous lesquelles ses résultats sont valables.

Enfin, B. Noble [3] a montré comment on peut trouver des solutions numériques du système (1).*)

Dans la présente note la solution du système (1) est donnée par les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Supposons que la fonction $u(y)$ puisse être écrite sous la forme $u(y) = y^{\nu}[\delta + \varepsilon(y)]$ où $y^{2\nu}\varepsilon(y)$ est une fonction continue pour $y = 0$, égale à zéro pour $y = 0$, satisfaisant la condition $[y^{2\nu}\varepsilon(y)]^{(i)} = O(y^{\omega - i})$, $y \to 0$, $i = 0, 1, 2$ et $\omega \geqslant 1/2 + 2\nu$, $\omega > 0$.*

Si en plus l'intégrale

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(yx)\, x^{-\alpha/2}\, dx \int_0^1 A(t) \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dt \tag{2}$$

converge pour $0 < y < 1$, où

$$A(x) = \frac{x^{\nu+\alpha/2+1/2}}{2^{\alpha/2}\,\Gamma(\alpha/2+1)} \frac{d}{dx} x^{-2\nu-\alpha} \int_0^x \frac{[t^{2\nu}\varepsilon(t)]'}{(x^2-t^2)^{-\alpha/2}}\, dt,$$

alors

$$f(x) = x^{-\alpha/2} \int_0^1 A(t) \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dt - \Omega J_{\nu+\alpha/2+1}(x),$$

où

$$\Omega = \int_0^1 A(\tau)\, \tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\, d\tau - \frac{\delta\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\alpha/2}\,\Gamma(\nu+\alpha/2+1)},$$

est la solution du système (1) pour $v(y) \equiv 0$, $y > 1$, $-2 < \alpha < 0$, $\nu + \frac{\alpha}{2} > -1$.

THÉORÈME II. *Supposons que la fonction $v(y)$ satisfasse aux conditions suivantes:*

1. $v^{(i)}(y) = O(y^{\alpha/2-2-i})$, $y \to \infty$, $i = 0, 1, 2$.

*) Pendant que la présente note était en presse, j'ai reçu un article récent de B. Noble: Certain dual integral equations, *Jornal of Math. and Phys.* **33** (1958), 128–136.

2. *Pour tout* $t \geqslant t_0$ *et* $\xi \geqslant \xi_0$

$$\left| \int_1^t \frac{\tau^{1-\nu}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}} d\tau \int_\xi^\infty f(x) J_\nu(xy\tau)\, dx \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

où t_0 *et* ξ_0 *sont deux nombres bien choisis, et*

$$f(x) = x^{1-\alpha/2} \int_1^\infty B(t) \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt,$$

où

$$B(x) = -\frac{2^{\alpha/2}}{\Gamma(1-\alpha/2)}\, y^{\nu+\alpha/2-1/2} \frac{d}{dy}\, y^{2-\nu-\alpha} \int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}\, v(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}} d\tau.$$

Alors la fonction $f(x)$ *ainsi définie est la solution du système* (1) *pour* $u(y) \equiv 0,\ 0 < y < 1,$ *et* $\nu+\alpha > 1/2,\ -2 < \alpha < 0.$

Pour démontrer les théorèmes I et II nous allons considérer les lemmes suivants:

LEMME 1. *Si la fonction* $A(t)$ *et* $A(t)\, t^{-\nu-\alpha/2-1/2} \in L(0, 1)$, *alors*

$$\int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^{\alpha/2}\, dx \int_0^1 A(t) \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha/2}\, \Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{\Gamma(\nu+1)}\, y^\nu \int_0^1 A(\tau)\, \tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\, d\tau -$$

$$- \frac{2^{\alpha/2+1}}{\Gamma(-\alpha/2)\, y^\nu} \int_0^y \frac{t^{2\nu+\alpha+1}}{(y^2-t^2)^{\alpha/2+1}}\, dt \int_0^t A(\tau)\, \tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\, d\tau,$$

pour $-2 < \alpha < 0,\ \nu+\alpha/2+1 > 0.$

Démonstration. — Considérons d'abord l'intégrale:

$$\int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^{\alpha/2} \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dx$$

qui converge en valeur absolue, en vertu des propriétés qui satisfont les fonctions de Bessel pour tout $t \in [0, 1]$. Comme nous avons supposé

$A(t) \in L(0, 1)$, on peut intégrer sous le signe d'intégration

$$\int_0^1 A(t)\,dt \int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^{\alpha/2} \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(xt)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^{\alpha/2}\,dx \int_0^1 A(t) \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt$$

$$= \int_0^y + \int_y^1 A(t)\,dt \int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^{\alpha/2} \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dx\,.$$

Maintenant nous allons d'abord utiliser la relation 1. (voir la fin de cet article):

$$= \frac{2^{\alpha/2}\, y^{-\nu-\alpha-2}}{(\nu+\alpha/2+1)\,\Gamma(-\alpha/2)} \cdot$$

$$\cdot \int_0^y A(t)\, t^{\nu+\alpha/2+3/2}\, {}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1,\ \frac{\alpha}{2}+1;\ \nu+\frac{\alpha}{2}+2;\ \frac{t^2}{y^2}\right)dt$$

$$+ \frac{\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{2^{-\alpha/2}\,\Gamma(\nu+1)}\, y^\nu \int_y^1 A(t)\, t^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,dt,$$

puis la relation 2. pour la fonction de la série hypergéométrique

$$= \frac{2^{\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha/2)}\, y^\nu \int_0^y A(t)\, t^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,dt \int_0^{t^2/y^2} \tau^{\nu+\alpha/2}(1-\tau)^{-\alpha/2-1}\,d\tau +$$

$$+ \frac{\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{2^{-\alpha/2}\,\Gamma(\nu+1)}\, y^\nu \int_y^1 A(t)\, t^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,dt.$$

Il ne nous reste qu'à effectuer l'intégration partielle dans la première intégrale. En tenant compte de la relation 3., on obtient:

$$= \frac{2^{\alpha/2}\,\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{\Gamma(\nu+1)}\, y^\nu \int_0^1 A(\tau)\, \tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,d\tau -$$

$$- \frac{2^{\alpha/2+1}}{\Gamma(-\alpha/2)\, y^\nu} \int_0^y \frac{t^{2\nu+\alpha+1}}{(y^2-t^2)^{\alpha/2+1}}\,dt \int_0^t A(\tau)\, \tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,d\tau,$$

ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 2. *La fonction définie par l'intégrale:*

$$\int_0^\infty e^{-cx} J_\nu(yx)\, x^{-\alpha/2} \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dx$$

est une fonction continue par rapport à $t \in [0, 1]$ *pour tout* $y > 1$ *et* $0 < c < (y^2-1)/4$, $\alpha > -2$, $\nu+\alpha/2+1 > 0$.

Démonstration. — D'après un résultat de G. N. Watson [6] on a:

$$\int_0^\infty e^{-cx} \sqrt{t}\, J_\nu(yx)\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, x^{-\alpha/2}\, dx =$$

$$= \sqrt{t} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (t/2)^{\nu+\alpha/2+2m+1}}{m!\,\Gamma(\nu+\alpha/2+2+m)} \frac{(y/2)^\nu \Gamma(2\nu+2m+2)}{(y^2+c^2)^{\nu+1+m}\,\Gamma(\nu+1)} \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1(\nu+1+m,\ -1/2-m,\ \nu+1;\ y^2/(y^2+c^2)),$$

pour $\Re t > 0$, $\Im t < c$ et $|t| < \sqrt{y^2+c^2} - c$, $\alpha > -2$, $\nu > -1$; dans ce cas cette relation reste valable aussi pour $t=0$, puisque nous supposons $\nu+\alpha/2+1 > 0$.

Si C est choisi tel que $|t| < \sqrt{y^2+C^2} - C$, la série citée peut être majorée pour tout $0 < c \leqslant C$ par la série suivante:

$$\sqrt{t} \sum_{m=0}^\infty \frac{(1/2)^{\nu+\alpha/2+1+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+\alpha/2+2+m)} \frac{(y/2)^\nu \Gamma(2\nu+2m+2)}{(y^2+C^2)^{\nu+1+m}} \left| \frac{\Gamma(-1/2)(1-\sqrt{X})^{-A-2m-1}}{\Gamma(-1/2-m)\,\Gamma(\nu+1+m)} \right|,$$

$$X = \frac{C^2}{y^2+C^2}, \quad A = \max\{|2\nu+2|, 1\}.$$

On voit maintenant que la série obtenue converge uniformément pour $t \in [0, 1]$ et tout $0 < c \leqslant C$. C'est donc une fonction continue par rapport à $t \in [0, 1]$.

Enfin nous montrons qu'on peut prendre pour $C = (y^2-1)/4$. La fonction $\sqrt{y^2+c^2} - c$ est une fonction monotone décroissante, égale à 1 pour $c = (y^2-1)/2$.

LEMME 3. *Supposons que la fonction* $v(y)$ *satisfasse à la condition* $v^{(i)}(y) = O(y^{\alpha/2-2-i})$, $i = 0, 1, 2$, $y \to \infty$, *et soit*

$$\tilde{B}(y) = y^{\nu+\alpha/2-1/2} \frac{d}{dy} y^{2-\nu-\alpha} g(y),$$

où

$$g(y)=\int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}\, v(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau$$

alors $\tilde{B}(y)=O(y^{-3/2})$ *et* $\tilde{B}'(y)=O(y^{-5/2})$.

Démonstration. — Prenons la dérivée indiquée dans la fonction $\tilde{B}(y)$

$$\tilde{B}(y)=y^{\nu+\alpha/2-1/2}\left[(2-\nu-\alpha)\,y^{1-\nu-\alpha}\int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}\, v(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau+y^{2-\nu-\alpha}\int_1^\infty \frac{\tau^{2-\nu}\, v'(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau\right],$$

La dérivation sous le signe d'intégration est permise à cause des propriétés de la fonction $v(y)$ données dans l'énoncé de ce lemme. En vertu des mêmes propriétés de la fonction $v(y)$ on a:

$$\left|\int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}\, v(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau\right| \leqslant \frac{M}{y^{2-\alpha/2}}\int_1^\infty \frac{\tau^{\alpha/2-\nu-1}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau=O(y^{\alpha/2-2})$$

et

$$\left|\int_1^\infty \frac{\tau^{2-\nu}\, v'(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau\right| \leqslant \frac{N}{y^{3-\alpha/2}}\int_1^\infty \frac{\tau^{\alpha/2-\nu-1}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau=O(y^{\alpha/2-3}),$$

d'où $\tilde{B}(y)=y^{1/2-\alpha/2}\,O(y^{\alpha/2-2})+y^{3/2-\alpha/2}\,O(y^{\alpha/2-3})=O(y^{-3/2})$.

De la même manière on obtient la deuxième partie de ce lemme.

LEMME 4. *Soit*

$$f(x)=x^{1-\alpha/2}\int_1^\infty \tilde{B}(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt$$

et admettons que $v(y)$ *possède les propriétés citées dans l'énoncé du lemme* 3., *alors* $f(x)=O(x^{-\alpha/2-1/2})$, $x\to\infty$ *et*

$$f(x)=-x^{-\alpha/2}\tilde{B}(1)\, J_{\nu+\alpha/2+1}(x)+O(x^{-\alpha/2+1}),\quad x\to 0.$$

Démonstration. — Nous allons faire l'intégration partielle

$$f(x)=x^{-\alpha/2}\left[-\tilde{B}(1)\, J_{\nu+\alpha/2+1}(x)-\int_1^\infty \tilde{B}'(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dt+\right.$$

$$\left.+(\nu+\alpha/2+1/2)\int_1^\infty \tilde{B}(t)\, t^{-1/2} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dt\right].$$

Puis considérons les intégrales ainsi obtenues:

$$\left|\int_1^\infty \tilde{B}'(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt\right| \leqslant \frac{M}{x^{1/2}}\int_1^\infty \frac{dt}{t^{5/2}} = O(x^{-1/2}), \quad x\to\infty;$$

ainsi que

$$\left|\int_1^\infty \tilde{B}(t)\, t^{-1/2} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt\right| = O(x^{-1/2}), \quad x\to\infty,$$

d'où la première partie de ce lemme.

Pour la deuxième partie faisons le changement de variable $tx=\tau$ dans l'intégrale considérée

$$\int_1^\infty \tilde{B}'(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt = \int_x^\infty \tilde{B}'\left(\frac{\tau}{x}\right)\sqrt{\frac{\tau}{x}}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(\tau)\frac{d\tau}{x}.$$

Partageons la en deux parties. La première est

$$\left|\int_x^\omega \tilde{B}'\left(\frac{\tau}{x}\right)\sqrt{\frac{\tau}{x}}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(\tau)\frac{d\tau}{x}\right| \leqslant Cx\int_0^\omega \tau^{\nu+\alpha/2-1}\,d\tau = O(x), \quad x\to\infty.$$

Pour la deuxième on a:

$$\left|\int_\omega^\infty \tilde{B}'\left(\frac{\tau}{x}\right)\frac{\tau^{1/2}}{x^{3/2}} J_{\nu+\alpha/2+1}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant Ax\int_\omega^\infty \frac{d\tau}{\tau^{5/2}} = O(x), \quad x\to 0.$$

On peut traiter de la même manière l'intégrale

$$\int_1^\infty \tilde{B}(t)\, t^{-1/2} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt$$

et on obtient qu'elle est de l'ordre $O(x)$, $x\to 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 5. *Supposons que l'intégrale*

$$\int_0^\infty f(x)\, J_\nu(yx)\,dx$$

converge pour tout $y > 1$ *et qu'on puisse trouver* ξ_0 *et* t_0 *de manière que:*

$$\left| \int_1^t \frac{\tau^{1-\nu}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau \int_\xi^\infty f(x)\, J_\nu(yx)\, dx \right| < \varepsilon,$$

pour tout $t \geqslant t_0$ *et* $\xi \geqslant \xi_0$.

Alors

$$\int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau \int_0^\infty f(x)\, J_\nu(\tau y x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx \int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu} J_\nu(\tau y x)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau .$$

La fonction $f(x)$ *est la fonction du lemme précédent.*

Démonstration. — En tenant compte d'un théorème de T. J. I'A. Bromwich [1], on peut démontrer ce lemme assez facilement. Toutes les conditions du théorème cité sont satisfaites presque immédiatement en vertu des résultats des lemmes précédents.

LEMME 6. *Pour tout* $t \geqslant 1$, $0 < y < 1$ *et* $\nu + \alpha/2 > -1$, $0 \leqslant c \leqslant (t^2-1)/2$ *l'intégrale*

$$\int_1^\infty x^{1+\alpha/2} \sqrt{t}\, J_\nu(xy)\, J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, e^{-cx}\, dx$$

est une fonction continue d'ordre $O(t^{-\nu-\alpha/2-3/2})$, $t \to \infty$.

Démonstration. — D'après le résultat déjà cité de G. N. Watson on a:

$$\sqrt{t} \int_0^\infty e^{-cx}\, x^{\alpha/2+1} J_\nu(yx)\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx =$$

$$= \sqrt{t} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (y/2)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+1+m)} \frac{(t/2)^{\nu+\alpha/2}\Gamma(2\nu+\alpha+2+m)}{(t^2+c^2)^{\nu+\alpha/2+1+m}\,\Gamma(\nu+\alpha/2+1)} \times$$

$$\times {}_2F_1(\nu+\alpha/2+1+m,\ -1/2-m;\ \nu+\alpha/2+1;\ t^2/(t^2+c^2)),$$

$$|y| < \sqrt{t^2+c^2} - c;$$

la série majorante est:

$$\frac{2^{\alpha/2+1}}{\pi^{3/2}} |\Gamma(-1/2)|\, t^{\nu+\alpha/2+1/2} \frac{(t^2+c^2)^{1/2}}{(\sqrt{t^2+c^2}-c)^{\nu+\alpha+3}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+1)^{1/2}}{(\nu+m+1)^{\alpha/2+1/2}} \frac{y^{\nu+2m}}{(\sqrt{t^2+c^2}-c)^{\nu+2}}$$

d'où

$$\sim k t^{-\nu-\alpha/2-3/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^{1/2}}{(\nu+m+1)^{\alpha/2+1/2}} y^{\nu+2m},$$

étant donné que $\sqrt{t^2+c^2}-c$ est une fonction monotone décroissante et égale à 1 pour $c=(t^2-1)/2$.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES I ET II

Démonstration du Théorème I. — En vertu du lemme 1 et de la relation 1. pour $t=1$, on a, pour tout $0<y<1$,

$$\int_0^\infty J_\nu(yx)\, x^{\alpha/2}\left[\int_0^1 A(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt-\Omega J_{\nu+\alpha/2+1}(x)\right]dx=$$

$$=\frac{2^{\alpha/2+1}}{\Gamma(-\alpha/2)\,y^\nu}\int_0^y \frac{t^{2\nu+\alpha+1}}{(y^2-t^2)^{\alpha/2+1}}\,dt\int_0^t A(\tau)\,\tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,d\tau+$$

$$+y^\nu\frac{2^{\alpha/2}\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left[\int_0^1 A(\tau)\,\tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,d\tau-\Omega\right].$$

Déterminons Ω et $A(t)$ de manière que:

$$\int_0^1 A(\tau)\,\tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\,d\tau-\Omega=\frac{\delta\Gamma(\nu+1)}{2^{\alpha/2}\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}$$

et

$$\int_0^\infty J_\nu(yx)\,x^{\alpha/2}\left[\int_0^1 A(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt-\Omega J_{\nu+\alpha/2+1}(x)\right]dx=u(y),\quad 0<y<1. \tag{4}$$

C'est-à-dire que la fonction

$$f(x)=x^{-\alpha/2}\int_0^1 A(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt-\Omega J_{\nu+\alpha/2+1}(x) \tag{5}$$

soit la solution de la première équation du système (1).

Comme nous avons vu, l'équation (4) peut être écrite sous la forme:

$$\int_0^y \frac{t^{2\nu+\alpha+1}}{(y^2-t^2)^{\alpha/2+1}}\,\beta(t)\,dt=\frac{\Gamma(-\alpha/2)}{2^{\alpha/2+1}}\,y^\nu\,[\delta y^\nu-\mu(y)],$$

où

$$\beta(t) = \int_0^t A(\tau)\, \tau^{-\nu-\alpha/2-1/2}\, d\tau .$$

Faisons le changement de variables $y^2 = s$, $t^2 = \tau$

$$\int_0^s \frac{\tau^{\nu+\alpha/2}}{(s-\tau)^{\alpha/2+1}} \beta(\sqrt{\tau})\, d\tau = \frac{\Gamma(-\alpha/2)}{2^{\alpha/2}} s^{\nu/2} [\delta s^{\nu/2} - u(\sqrt{s})], \quad 0 < s < 1 .$$

On a ainsi pour la fonction $\beta(t)$ une équation intégrale d'Abel. En tenant compte des suppositions faites sur la fonction $u(y)$, nous pouvons utiliser la théorie bien connue de l'équation d'Abel, nous donnant la solution unique

$$\beta(x) = \frac{x^{-2\nu-\alpha}}{2^{\alpha/2}\Gamma(\alpha/2+1)} \int_0^x \frac{[\delta t^{2\nu} - t^\nu u(t)]'}{(x^2-t^2)^{-\alpha/2}} dt ,$$

d'où

$$A(x) = -x^{\nu+\alpha/2+1/2} \frac{d}{dx} x^{-2\nu-\alpha} \int_0^x \frac{[t^{2\nu} \varepsilon(t)]'}{(x^2-t^2)^{-\alpha/2}} dt .$$

Il est maintenant facile de voir que la fonction $A(t)$ ainsi définie satisfait aux conditions du lemme 1.

Enfin nous allons montrer que la fonction $f(x)$, définie par la relation (5), satisfait aussi à la deuxième équation du système (1) pour $v(y) \equiv 0$, $y > 1$. A cet effet nous partons de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-cx} J_\nu(yx)\, x^{-\alpha/2} \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dx . \tag{6}$$

En vertu du lemme II on a:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 A(t)\, dt \int_0^\infty e^{-cx} J_\nu(yx)\, x^{-\alpha/2} \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-cx} J_\nu(yx)\, x^{-\alpha/2}\, dx \int_0^1 A(t) \sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dt , \end{aligned} \tag{7}$$

et aussi:

$$\lim_{c\to 0}\int_0^1 A(t)\,dt\int_0^\infty e^{-cx}J_\nu(yx)\,x^{-\alpha/2}\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dx=$$

$$=\int_0^1 A(t)\sqrt{t}\,dt\lim_{c\to 0}\int_0^\infty e^{-cx}J_\nu(yx)\,x^{-\alpha/2}J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dx;$$

enfin, d'après le théorème fondamental relatif aux intégrales de Laplace et la relation 7.

$$=\int_0^1 A(t)\sqrt{t}\,dt\int_0^\infty J_\nu(yx)\,x^{-\alpha/2}J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt=0,$$

pour tout $y>1$.

Quant à la deuxième intégrale de la relation (7), en vertu de la supposition de convergence de l'intégrale (2), on peut entrer avec l'opération $\lim\limits_{c\to 0}$ sous le signe d'intégrale et la relation (7) peut être écrite

$$\int_0^\infty J_\nu(yx)\,x^{-\alpha/2}\,dx\int_0^1 A(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,dt=0,\quad y>1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

D é m o n s t r a t i o n du théorème II. — Considérons la deuxième équation du système (1). D'abord nous allons introduire le paramètre $\tau\geqslant 1$ et intégrer, après l'avoir multipliée par une fonction bien choisie

$$\int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\,d\tau\int_0^\infty f(x)\,J_\nu(\tau yx)\,dx=\int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}\,v(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\,d\tau.$$

En vertu du lemme 5. on peut échanger l'ordre d'intégration et, d'après la relation 4., on aura:

$$\frac{\Gamma(1-\alpha/2)}{2^{\alpha/2}}\,y^{\alpha/2-1}\int_0^\infty f(x)\,x^{\alpha/2-1}J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx=\int_1^\infty\frac{\tau^{1-\nu}}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\,v(y\tau)\,d\tau,\qquad y>1.$$

Maintenant le système (1) a la forme:

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,J_\nu(xy)\,dx=0,\quad 0<y<1,$$

$$\int_0^\infty f(x)\, x^{\alpha/2-1} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx = G(y), \quad y > 1,$$

où

$$G(y) = \frac{2^{\alpha/2}}{\Gamma(1-\alpha/2)}\, y^{1-\alpha/2} \int_1^\infty \frac{\tau^{1-\nu}\, v(y\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, d\tau .$$

Nous allons chercher la solution sous la forme

$$f(x) = x^{1-\alpha/2} \int_1^\infty B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt .$$

Pour déterminer la fonction $B(t)$, partons de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx$$

et supposons pour la fonction $B(t)$ qu'elle soit d'ordre $O(y^{-3/2})$ et $B'(t) = O(y^{-5/2})$. Alors, d'après les propriétés des fonctions de Bessel, on a:

$$\begin{aligned}
\left(\int_1^{y-\varepsilon} + \int_{y+\eta}^\infty\right) B(t)\, dt \int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx = \\
= \int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \left(\int_1^{y-\varepsilon} + \int_{y+\eta}^\infty B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt\right) \\
= \int_0^\infty e^{-cx} f(x)\, x^{\alpha/2-1} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx - \qquad (8) \\
- \int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt .
\end{aligned}$$

On peut entrer sous le signe d'intégrale avec l'opération $\lim_{c\to 0}$ pour les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx ,$$

$$\int_0^\infty e^{-cx} f(x)\, x^{\alpha/2-1} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt\,,$$

car ces intégrales convergent pour $c=0$; la première pour $\nu+\alpha/2>0$ et par suite pour $\nu+\alpha>1/2$, $\alpha<0$; la deuxième d'après le lemme 4. et la dernière d'après le résultat de G. N. Watson ([6], p. 404).

Nous allons encore montrer que

$$\lim_{c\to 0}\int_1^{y-\varepsilon} + \int_{y+\eta}^\infty B(t)\, dt \int_0^\infty e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx\,,$$

$$= \int_1^{y-\varepsilon} + \int_{y+\eta}^\infty B(t)\, dt \lim_{c\to 0}\int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx\,, \tag{9}$$

et

$$\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt = 0\,. \tag{10}$$

Prenons d'abord la relation (10). Il suffit de montrer qu'on peut entrer sous le signe d'intégrale avec l'opération $\lim\limits_{\varepsilon,\eta\to 0}$, puisque l'intégrale, par rapport à t, converge en valeur absolue pour tout $x\geqslant 0$.

Partageons notre intégrale en deux:

$$\int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt =$$

$$= \int_0^\omega + \int_\omega^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\, dx \int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dt\,.$$

Pour la première on a, d'après le théorème connu d'Arzelà:

$$\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_0^{\omega} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt=$$

$$=\int_0^{\omega} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt=0.$$

Pour la deuxième, il faut faire l'intégration partielle

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt = x^{-1}\{B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\}_{y-\varepsilon}^{y+\eta}-$$

$$-\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,B'(t)\,t^{1/2}\,dt+\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\,B(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}=O(x^{-1}).$$

Donc, on peut également entrer avec l'opération $\lim\limits_{\varepsilon,\eta\to 0}$ sous le signe de la deuxième intégrale.

Il ne nous reste qu'à démontrer la relation (9).

D'après le résultat déjà cité de G. N. Watson, on peut montrer que

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dx=O(t^{-\nu-\alpha/2}),\quad c\geqslant 0 \tag{11}$$

et que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dx,\quad c\geqslant 0 \tag{12}$$

définit une fonction continue par rapport à $t\in[0, y-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$.

Ceci étant, nous pouvons faire $c\to 0$ dans l'équation (8)

$$\int_1^{y-\varepsilon}+\int_{1+\eta}^{\infty} B(t)\,dt\int_0^{\infty} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty} f(x)\,x^{\alpha/2-1} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx-\int_0^{\infty} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx\int_{y-\varepsilon}^{y+\eta} B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt.$$

Si nous faisons encore $\lim\limits_{\varepsilon,\eta \to 0}$, nous aurons

$$\int_1^\infty B(t)\,dt \int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dx = \int_0^\infty f(x)\ x^{\alpha/2-1} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx$$

et, en vertu de la relation 5, on a:

$$\int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\,dx \int_1^\infty B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt =$$

$$= \int_1^y + \int_y^\infty B(t)\,dt \int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dx =$$

$$= y^{\nu+\alpha/2-1} \int_y^\infty B(t)\,t^{-\nu-\alpha/2+1/2}\,dt.$$

Ainsi donc, nous avons pour déterminer la fonction $B(t)$ l'équation

$$\int_y^\infty B(t)\,t^{-\nu-\alpha/2+1/2}\,dt = y^{1-\nu-\alpha/2}\,G(y),$$

d'où

$$B(y) = -y^{\nu+\alpha/2-1/2} \frac{d}{dy}\, y^{1-\nu-\alpha/2}\,G(y).$$

D'après le lemme 3. et la supposition faite sur la fonction $\nu(y)$, on voit que la fonction $B(t)$ ainsi déterminée satisfait aux conditions $B(t) = O(y^{-3/2})$, $B'(t) = O(y^{-5/2})$, comme nous l'avons supposé.

Enfin il faut montrer que la fonction:

$$f(x) = x^{1-\alpha/2} \int_1^\infty B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt$$

satisfait aussi à la première équation du système (1). Pour cella il suffit de montrer que l'on a la relation

$$\int_0^\infty x^{1+\alpha/2} J_\nu(xy)\,dx \int_1^\infty B(t)\sqrt{t}\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dt = \int_1^\infty B(t)\,dt \int_0^\infty x^{1+\alpha/2}\sqrt{t}\,J_\nu(xy)\,J_{\nu+\alpha/2}(tx)\,dx, \tag{13}$$

puisque le second membre s'annule en vertu de la relation 7.

Considérons l'intégrale:

$$\int_1^\infty B(t)\,dt \int_0^\infty e^{-cx} x^{1+\alpha/2} \sqrt{t}\, J_\nu(xy)\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx .$$

L'interversion d'ordre d'intégration est possible en vertu du lemme 6.

Faisons $c \to 0$. Avec cette opération on peut entrer sous les signes des intégrales, parce que l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{1+\alpha/2} \sqrt{t}\, J_\nu(xy)\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx$$

converge pour $\alpha < 0$, $\nu + \alpha/2 > -1$, $y < t$. De même l'intégrale:

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\, J_\nu(xy)\, dx, \quad 0 < y < 1,$$

converge d'après le lemme 4.

Le théorème II est ainsi complètement démontré.

Nous nous sommes bornés ici au cas $\alpha < 0$, parce que tous les systèmes que nous connaissons et qui (proviennent) relèvent d'un problème de Physique ont pour α une valeur négative. Mais cette méthode peut aussi être utilisée pour $\alpha > 0$.

Évidemment, si nous cherchions la solutions du système (1) dans l'ensemble des fonctions $L(0, \infty)$, les démonstrations seraient plus faciles et les conditions d'une forme plus simple, mais les cas du système (1) déjà résolus montrent que les solutions ne doivent pas appartenir à cet ensemble.

Enfin, nous avons supposé l'existence des deux dérivées de la fonction $u(y)$ et $v(y)$. D'un côté c'est logique, car ces équations, relevant d'un problème physique, sont presque toujours liées à une équation partielle. Il va de soi que pour les équations intégrales ces conditions ne sont pas naturelles. Il nous semble qu'en utilisant la sommabilité au sens d'Abel on peut les éviter complètement.

RELATIONS AUXILIAIRES

1. $$\int_0^\infty \sqrt{t}\, J_\nu(xy)\, x^{\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dx = \qquad (\alpha < 0, \quad \nu+\alpha/2 > -1)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha/2}\Gamma(\nu+\alpha/2+1)\, t^{\nu+\alpha/2+3/2}}{\Gamma(\nu+\alpha/2+2)\,\Gamma(-\alpha/2)\, y^{\nu+\alpha+2}} \times \\ \times {}_2F_1\left(\nu+\dfrac{\alpha}{2}+2,\ \dfrac{\alpha}{2}+1;\ \nu+\dfrac{\alpha}{2}+2;\ \dfrac{t^2}{y^2}\right), & 0<t<y; \\ \dfrac{\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{\Gamma(\nu+1)}\ \dfrac{2^{\alpha/2} y^\nu}{t^{\nu+\alpha/2+1/2}}, & 0<y<t; \end{cases}$$

2. $${}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1,\ \frac{\alpha}{2}+1;\ \nu+\frac{\alpha}{2}+2;\ \frac{t^2}{y^2}\right) =$$

$$= \left(\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(\frac{y}{t}\right)^{2\nu+\alpha+2} \int_0^{y^2/t^2} t^{\nu+\alpha/2}(1-t)^{-\alpha/2-1}\, dt;$$

3. $$\int_0^1 \frac{\tau^{\nu+\alpha/2}}{(1-\tau)^{\alpha/2+1}}\, d\tau = \frac{\Gamma(-\alpha/2)\,\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}{\Gamma(\nu+1)};$$

4. $$\int_1^\infty \frac{J_\nu(yx\tau)}{(\tau^2-1)^{\alpha/2}}\, \tau^{1-\nu}\, d\tau = \frac{\Gamma(1-\alpha/2)}{2^{\alpha/2}(xy)^{1-\alpha/2}} J_{\nu+\alpha/2-1}(yx), \quad \nu+\alpha>1/2,\ \alpha<2;$$

5. $$\int_0^\infty J_{\nu+\alpha/2-1}(yx)\sqrt{t}\, J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}}\left(\dfrac{y}{t}\right)^{\nu+\alpha/2-1/2}, & 0<y<t; \\ 0, & y>t; \end{cases}$$

6. $$\int_0^\infty J_\nu(xy)\sqrt{t}\, x^{1+\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2}(tx)\, dx = 0, \quad y<t;$$

7. $$\int_0^\infty J_\nu(xy)\, x^{-\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2+1}(tx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{y^\nu t^{-\nu-\alpha/2-1}}{2^{\alpha/2}\Gamma(1+\alpha/2)}(t^2-y^2)^{\alpha/2}, & 0<y<t; \\ 0, & y>t>0; \end{cases}$$

$$\nu>-1, \quad \alpha>-2.$$

(Reçu le 18.III.59)

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. J. I'A. **B r o m w i c h** — Note on double limits and on the inversion of a repeated infinite integrale, *Proc. London Math. Soc.* (2) **1** (1904), 176—201.

[2] I. W. **B u s b r i d g e** — Dual integral equations, *Proc. London Math. Soc.* (2) **44** (1938), 115—129.

[3] B. **N o b l e** — The approximate solution of dual integral equations by variational methods, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **2** (1958), 115—126.

[4] E. C. **T i t c h m a r s h** — Introduction to the theory of Fourier integrals, second ed., Oxford 1948.

[5] C. J. **T r a n t e r** — On some dual integral equations, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **2** (1951), 60—66.

[6] G. N. **W a t s o n** — A treatise on the theory of Bessel functions, second ed., Cambridge 1948.